# Algèbre linéaire
# Diagonalisation

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

2022

# Table des matières

**Table des matières** **1**

**1 Espaces vectoriels** **2**

**2 Matrices** **8**

**3 Applications linéaires** **11**

**4 Rang** **16**

**5 Déterminant** **17**

**6 Diagonalisation** **21**

**7 Exemple d'application : suites** **24**

# 1. Espaces vectoriels

**Définition**

Un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel, abrégé par $\mathbb{R}$-ev, est la donné d'un triplet $(E, +, \cdot)$ où

- $E$ est un ensemble, dont les éléments sont appelés **vecteurs** et noté avec une flèche (par exemple $\overrightarrow{x}$),
- $+ : E \times E \mapsto E$ est une application appelé **loi de composition interne**, dont on simplifiera la notation $+(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ par $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$
- $\cdot : \mathbb{R} \times E \mapsto E$ est une application appelé **loi de composition externe**, dont on simplifiera la notation $\cdot(\lambda, \overrightarrow{x})$ par $\lambda \cdot \overrightarrow{x}$.

Ces données satisfaisants les règles "**CANSADU**" :

**Commutativité.** $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$

**Associativité.** $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in E,\ (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$

**Neutre.** $\exists \overrightarrow{0} \in E, \forall \overrightarrow{x} \in E,\ \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{x}$

**Symétrie.** $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \exists \overrightarrow{y} \in E,\ \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$

**Associativité.** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x} \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{x}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{x}$

**Distributivité.** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E, \Big(\lambda \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y}\Big) \wedge \Big((\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y}\Big)$

**Unité.** $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ 1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

Par exemple considérons le plan réel $\mathbb{R}^2 = \left\{ \overrightarrow{a} = \binom{x}{y} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ munit des opérations suivantes :

**Loi de composition interne :** $\binom{x}{y} + \binom{a}{b} = \binom{a+x}{b+y}$

**Loi de composition externe :** $\lambda \cdot \binom{x}{y} = \binom{\lambda x}{\lambda y}$

est un $\mathbb{R}$-ev.

On peut de même définir le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où l'addition et la multiplication scalaire est semblable à celle précédemment introduite.

**Remarque :** On pourrait replacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ voir même $\mathbb{Q}$ ou par n'importe quel ensemble portant une structure algébrique particulière : être un corps.

**Remarque :** On prendra garde aux notations, $\lambda \cdot \overrightarrow{x}$ correspond à la lois de composition externe tandis que $\lambda\mu$ est la multiplication de $\mathbb{R}$. On aura la même vigilance pour le $+$.

**Proposition**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev, $\overrightarrow{y} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i). L'élément neutre est unique.

(ii). $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

(iii). $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

(iv). $\lambda \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow (\lambda = 0) \vee (\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0})$

(v). Le symétrique de $\overrightarrow{x}$ est unique. On le note $-\overrightarrow{x}$

(vi). $-1 \cdot \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}$.

***Démonstration.***

(i). Soit $\overrightarrow{0}_1$ et $\overrightarrow{0}_2$ deux éléments neutre. Par définition $\overrightarrow{0}_1 = \overrightarrow{0}_1 + \overrightarrow{0}_2 = \overrightarrow{0}_2$.

(ii). $\overrightarrow{x} + 0 \cdot \overrightarrow{x} = 1 \cdot \overrightarrow{x} + 0 \cdot \overrightarrow{x} = (1+0) \cdot \overrightarrow{x} = 1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$. Par définition et unicité de $\overrightarrow{0}$, cela implique que $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

(iii). $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \lambda \cdot (0 \cdot \overrightarrow{x}) = (\lambda 0) \cdot \overrightarrow{x} = 0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

(iv). Supposons que $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ et que $\lambda \neq 0$. Dans ce cas, il existe $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\overrightarrow{0} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overrightarrow{0} = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = (\frac{1}{\lambda}\lambda) \cdot \overrightarrow{x} = 1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$.

(v) + (vi). Soient $\overrightarrow{y}_1$ et $\overrightarrow{y}_2$ deux symétriques de $\overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{x} + (-1) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} + (-1) \cdot \overrightarrow{x}$. En faisant le même raisonnement avec $\overrightarrow{y}_2$, on conclut que $\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{y}_2 = -1 \cdot \overrightarrow{x}$.

□

**Définition**

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $F \subset E$. On dira que F est un **sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel** de E, en abrégé sev, si

(i). $F \neq \varnothing$

(ii). $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F, \; \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$

(iii). $\forall \overrightarrow{x} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F$

**Proposition Vérification rapide**

Un sous ensemble F de E est un sev si et seulement si

(i). $F \neq \varnothing$

(ii). $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y} \in F$

***Démonstration.*** Si F est un sev alors $\overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y} \in F$ par définition. Inversement, supposons que $\overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y} \in F$ alors en prenant $\lambda = 1$ on prouve la stabilité pour la loi de composition interne et en prenant $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ on prouve la stabilité pour la loi de composition externe. □

Par exemple $F = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| 3x + 2y = 0 \right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\binom{x}{y} \in F$ et $\binom{a}{b} \in F$. Par définition de F on a $3x+2y = 0$ et $3a+2b = 0$. Si on utilise la vérification rapide, il faut observer que $\binom{x+\lambda a}{y+\lambda b} = \binom{x}{y} + \lambda \cdot \binom{a}{b}$ est bien un élément de F. Mais $3(x+\lambda a) + 2(y+\lambda b) = (3x+2y) + \lambda(3a+2b)$. Les deux termes de cette expression étant nul, F est bien un sev de $\mathbb{R}^2$.

**Proposition**

Tout sev est un ev.

***Démonstration.*** Soit F un sev d'un $\mathbb{R}$-ev E. Par définition, CANSADU est satisfait pour tous les vecteurs de E donc en particulier pour tous les vecteurs de F. Il n'y a rien à ajouter puisque ce dernier est stable pour les lois interne et externe. □

**Définition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $\mathfrak{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ une famille de vecteur d'un $\mathbb{R}$-ev E.

(i). On dira que $\overrightarrow{x}$ est une **combinaison linéaire** de $\mathfrak{F}$ si il existe des nombres réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ tel que

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}$$

(ii). On note $\langle \mathfrak{F} \rangle$ le plus petit sev (au sens de l'inclusion) de E contenant la famille $\mathfrak{F}$.

**Proposition**

Avec les notations de la définition précédente, $\langle\mathfrak{F}\rangle$ est composé des combinaisons linéaires des éléments de $\mathfrak{F}$. Autrement dit :

$$\langle\mathfrak{F}\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} \middle| \forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

***Démonstration.*** Notons $F$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\mathfrak{F}$. Il s'agit de voir que $F = \langle\mathfrak{F}\rangle$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que $F$ est bien un sev. Pour démontrer une égalité entre ensemble, on montre que l'un est inclut dans l'autre et réciproquement.

**$F \subset \langle\mathfrak{F}\rangle$ :** par définition de sev, $\langle\mathfrak{F}\rangle$ est stable pour les lois de composition interne et externe. Ainsi toutes combinaisons linéaires de vecteur de $\mathfrak{F}$ sont des éléments de $\langle\mathfrak{F}\rangle$. Autrement dit $F \subset \langle\mathfrak{F}\rangle$.

**$\langle\mathfrak{F}\rangle \subset F$ :** on observe que $\mathfrak{F} \subset F$ mais par définition $\langle\mathfrak{F}\rangle$ est le plus petit sev au sens de l'inclusion contenant $\mathfrak{F}$ donc par minimalité $\langle\mathfrak{F}\rangle \subset F$.

□

Par exemple $\left\langle \binom{1}{1} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2$ est le sev représentant la droite d'équation $y = x$ dans le plan.

**Définition**

Soient $A$ et $B$ deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev $E$. On défini

$$A + B = \left\{ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \middle| \overrightarrow{a} \in A, \overrightarrow{b} \in B \right\}$$

**Proposition**

Soient $A$ et $B$ deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev $E$ alors $A + B$ est un sev de $E$.

***Démonstration.*** Effectuons une vérification rapide. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x} \in A + B$ et $\overrightarrow{x}' \in A + B$. Par définition, il existe $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}' \in A$ et $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}' \in B$ tel que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{b}'$. Dans ce cas $\overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{x}' = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \lambda \cdot (\overrightarrow{a}' + \overrightarrow{b}') = (\overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{a}') + (\overrightarrow{b} + \lambda \cdot \overrightarrow{b}')$. Puisque $A$ et $B$ sont des sev on en déduit que $\overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{a}' \in A$ et $\overrightarrow{b} + \lambda \cdot \overrightarrow{b}' \in B$ ce que prouve que $\overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{x}'$ s'écrit bien comme la somme d'un élément de $A$ et d'un élément de $B$. □

**Définition**

Soient $A$ et $B$ deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev $E$.

**(i).** On dira que $A$ et $B$ sont **supplémentaires** si $A \cap B = \{\overrightarrow{0}\}$.

**(ii).** On note dans ce cas la somme $A + B$ par $A \oplus B$ et on dit que $A$ et $B$ sont en **somme directe**.

**Proposition**

Soient $A$ et $B$ deux sev supplémentaires d'un $\mathbb{R}$-ev $E$.

$$\forall \overrightarrow{x} \in A \oplus B,\ \exists! \overrightarrow{a} \in A,\ \exists! \overrightarrow{b} \in B,\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

***Démonstration.*** Il s'agit de démontrer que la décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ est unique. Pour cela considérons deux décompositions $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{a}_2 + \overrightarrow{b}_2$. En manipulant les termes on arrive à $\overrightarrow{a}_1 - \overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_1$. Mais le terme de droite est un élément de $A$ et celui de gauche de $B$. L'égalité implique donc que ces éléments sont dans $A \cap B$ qui est réduit à $\overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{a}_1 - \overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{0}$ ce qui prouve l'unicité.
□

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, considérons $A = \left\langle \binom{1}{1} \right\rangle$ et $B = \left\langle \binom{1}{-1} \right\rangle$. Ces deux espaces sont supplémentaires. En effet si $\overrightarrow{x} \in A \cap B$ alors par définition, $\overrightarrow{x} = \lambda \cdot \binom{1}{1} = \mu \binom{1}{-1}$. La lecture de la première ligne implique de $\lambda = \mu$, la lecture de la seconde ligne implique que $\lambda = -\mu$. Ce système de deux équations à deux inconnues se résout sans peine. On trouve $\lambda = \mu = 0$. Ainsi le seul élément de $A \cap B$ est $\overrightarrow{0}$.

**Définition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $\mathfrak{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ une famille de vecteur d'un $\mathbb{R}$-ev $E$.

(i). On dira que $\mathfrak{F}$ est une **famille génératrice** de $E$ si $\langle \mathfrak{F} \rangle = E$.

(ii). On dira que $\mathfrak{F}$ est une **famille libre** de $E$ si on a l'implication

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \Big(\forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i = 0\Big)$$

(iii). On dira que $\mathfrak{F}$ est une **base** si c'est à la fois une famille libre et une famille génératrice.

Par exemple $\mathfrak{F} = \{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}\}$ est une famille génératrice $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas une famille libre et à fortiori pas un base. Vérifions qu'il ne s'agit pas d'une famille libre. Considérons une combinaison linaire

$$\lambda \cdot \binom{1}{0} + \mu \cdot \binom{1}{1} + \nu \binom{1}{-1} = \overrightarrow{0}$$

En identifiant chacune des lignes on arrive au système

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu & = & 0 \\ \mu - \nu & = & 0 \end{cases}$$

Or ce système admet une infinité de solution et $(\lambda, \mu, \nu) = (-2, 1, 1)$ en est une non triviale. Donc le système n'est pas libre.

**Théorème Théorème de la base incomplète**

Toute famille libre et non génératrice d'un espace vectoriel $E$ peut être compléter par un vecteur de $E$ de telle sorte que la nouvelle famille ainsi construite reste libre.

***Démonstration.*** Soit $\mathfrak{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ une famille de vecteur libre de $E$ mais non génératrice. Cela signifie qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{a} \in E$ tel que $\overrightarrow{a} \notin \langle \mathfrak{F} \rangle$ ; en particulier $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Considérons dans ce cas $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \cup \{\overrightarrow{a}\}$. Montrons que $\mathfrak{F}'$ est toujours libre ; pour cela considérons une combinaison linéaire nulle de $\mathfrak{F}'$ :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} + \lambda_{n+1} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors $\overrightarrow{a} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} \cdot \overrightarrow{e_i}$ et donc $\overrightarrow{a} \in \langle \mathfrak{F} \rangle$ ce qui n'est pas possible par choix de $\overrightarrow{a}$. Nécessairement $\lambda_{n+1} = 0$. Mais dans ce cas $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$ ; puisque $\mathfrak{F}$ est libre cela implique que tous les $\lambda_i$ sont nulles. Nous avons ainsi prouvé que $\mathfrak{F}'$ est libre. □

**Corollaire**

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ deux ensembles de cardinalité finie, étant chacun une base d'un même $\mathbb{R}$-ev. Alors

$$\sharp(\mathfrak{F}) = \sharp(\mathfrak{F}')$$

***Démonstration.*** Il s'agit d'une version adaptée du *lemme de Steinitz.*

Posons $\mathfrak{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_s}\}$ et $\mathfrak{F}' = \{\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_t}'\}$. Il s'agit de voir que $s = t$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $s \neq t$, par exemple $s < t$ (si $s > t$ il suffit d'inverser le rôle de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$).

- Puisque $\mathfrak{F}'$ est une base, c'est une famille génératrice. En particulier $\overrightarrow{e_1} \in \langle \mathfrak{F}' \rangle$. Ce qui implique qu'il existe des constantes $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que
$$\overrightarrow{e_1} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}'$$
Puisque $\overrightarrow{e_1} \neq \overrightarrow{0}$ (car $\mathfrak{F}$ est une famille libre) il existe un $\lambda_i$ non nul. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathfrak{F}'$ on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Dans ce cas
$$\overrightarrow{e_1}' = \frac{1}{\lambda_1}\overrightarrow{e_1} - \sum_{i=2}^{t} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\overrightarrow{e_i}'$$
Ceci permet d'affirmer que $\mathfrak{F}_1 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_t}'\}$ est une base.
- $\overrightarrow{e_2} \in \langle \mathfrak{F}_1 \rangle$. Ce qui implique qu'il existe des constantes $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que
$$\overrightarrow{e_2} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \sum_{i=2}^{t} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}'$$
Puisque $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ forment une famille libre (car $\mathfrak{F}$ est une base) les $\lambda_i$ pour $i \in [\![2; t]\!]$ ne sont pas tous nuls. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathfrak{F}_1$ on peut supposer que $\lambda_2 \neq 0$. Dans ce cas
$$\overrightarrow{e_2}' = \frac{1}{\lambda_2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\overrightarrow{e_1} - \sum_{i=3}^{t} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\overrightarrow{e_i}'$$
Ceci permet d'affirmer que $\mathfrak{F}_2 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}', \dots, \overrightarrow{e_t}'\}$ est une base.
- On continue comme ça et on se prend bien la tête avec des constantes, et des sommations dans tous les sens
- A la dernière itération on arrive à montrer que la famille $\mathfrak{F}_s = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_s}, \overrightarrow{e_{s+1}}', \dots, \overrightarrow{e_t}'\}$ est une base. Or $\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F} \cup \{\overrightarrow{e_{s+1}}', \dots, \overrightarrow{e_t}'\}$. En particulier $\overrightarrow{e_t}'$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathfrak{F}$ ce qui implique que la famille $\mathfrak{F}_s$ n'est pas libre ce qui contredit le fait d'être une base.

$\square$

**Définition**

Soit $\mathfrak{F}$ une base d'un $\mathbb{R}$-ev. On note $\dim(E)$ la **dimension** de $E$, définie comme la cardinalité de $\mathfrak{F}$.

**Remarque 1.0.3 :** D'après le corollaire du théorème de la base incomplète, peut importe la base, le nombre de vecteur présent est invariant.

Par exemple $\mathfrak{F} = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ tout comme $\mathfrak{F}' = \{\binom{1}{1}, \binom{1}{2}\}$. Les bases sont distinctes mais pas leur cardinalité.

**Définition**

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. On définit la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ comme la base $\{\overrightarrow{e_i} | i \in [\![1; n]\!]\}$ où

$$\overrightarrow{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

le $1$ étant situé sur la $i$-ème ligne.

**Proposition**

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{R}$-espace vectorielle.

(i). $\dim(E \times F) = \dim(E) \times \dim(F)$

(ii). Si $F \subseteq E$ et $\dim(E) = \dim(F)$ alors $E = F$.

(iii). $\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$

(iv). $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$

***Démonstration.*** Admise. □

**Corollaire**

Toute famille de $n$ vecteurs libre dans un espace de dimension $n$ est une base.

## 2. Matrices

**Définition**

Soient $m$ et $n$ deux entiers strictement positifs. Une **matrice** à $n$ lignes et $m$ colonnes à coefficient réel est la donnée d'un tableau $A$ à $n$ ligne et $m$ colonne. On note les éléments de cette matrice $a_{i,j}$. Le premier indice correspondant à celui de la ligne et le second à celui de la colonne.

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;m]\!]}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes à coefficient réels.
Lorsque $m = n$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 11 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$

**Théorème**

Soient $m$ et $n$ des entiers strictement positifs. On considère les deux opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ \left((a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;m]\!]}}, (b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;m]\!]}}\right) & \longmapsto & (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;m]\!]}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times M_{n,m}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ \left(\lambda, (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;m]\!]}}\right) & \longmapsto & (\lambda a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;m]\!]}} \end{array}$$

Alors $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

***Démonstration.*** Triviale. □

**Définition**

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(i). Les éléments de l'ev $\mathbb{R}^n$ s'identifie à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et sont appelés des **vecteurs colonnes** ou tout simplement **vecteur**.

(ii). Les éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont appelés des **vecteurs lignes**.

(iii). Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On appelle **i-ème coordonné** de $\vec{x}$ le nombre réel correspondant au coefficient, noté $\vec{x}_i = \vec{x}_{i,1}$, de $\vec{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la $i$-ème ligne et première colonne.

**Définition**

Soient $m$, $n$ et $p$ des entiers strictement positifs et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. On définit le produit de $AB$ par

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}}$$

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit des matrices n'est pas usuelle. Pour commencer il n'est pas commutatif, c'est à dire qu'il est plutôt rare d'avoir $AB = BA$. De plus il n'est pas *intègre*, c'est à dire que $AB = 0$ sans que $A = 0$ ni $B = 0$. On pourra se convaincre de ces deux fait en choisissant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

**Définition**

On appel **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Id}_n$, la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur la diagonale qui valent 1.

$$\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A$, $B$ et $C$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i). $A\mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n A = A$

(ii). $A(BC) = (AB)C$

(iii). $A(B+C) = AB + AC$

(iv). $(A+B)C = AC + BC$

(v). $\lambda AB = A\lambda B$

***Démonstration.*** Triviale. □

**Définition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de $A$, la matrice noté ${}^tA$ et définie par

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], \quad {}^tA_{i,j} = A_{j,i}$$

En définitive la transposé d'une matrice est la même matrice où les lignes et les colonnes sont inversées. Par exemple ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

**Proposition**

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

***Démonstration.***

$$\begin{aligned} {}^t(AB)_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}^tA_{k,j}{}^tB_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}^tB_{i,k}{}^tA_{k,j} \\ &= ({}^tB{}^tA)_{i,j} \end{aligned}$$

□

**Définition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dira que $A$ est inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$AB = BA = \mathrm{Id}_n$$

Cette définition ne garantie pas qu'un inverse existe. Il s'agit simplement d'une définition. Nous verrons, par l'intermédiaire du *déterminant*, un critère nécessaire et suffisant pour déterminer un inverse matricielle.

**Proposition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A$ est inversible alors l'inverse est unique.

***Démonstration.*** Soit $B_1$ et $B_2$ deux inverses alors

$$B_1 = B_1\mathrm{Id}_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = \mathrm{Id}_nB_2 = B_2$$

□

**Proposition**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

***Démonstration.*** On a

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathrm{Id}_nB = B^{-1}B = \mathrm{Id}_n$$

Ainsi par unicité de l'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ □

**Proposition**

Si $A$ est inversible alors ${}^tA$ aussi. De plus

$$({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$$

***Démonstration.***

$$\mathrm{Id}_n = {}^t\mathrm{Id}_n = {}^tAA^{-1} = {}^tA^{-1}{}^tA$$

Par unicité de l'inverse on a donc ${}^t(A^{-1}) = {}^tA^{-1}$ □

## 3. Applications linéaires

**Définition**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-ev. On dira qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est une **application linéaire** si :

(i). $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(ii). $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Par exemple, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & 2x - y \end{array}$$

est bien une application linéaire.

**Théorème**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-ev. Considérons l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$. Considérons également les opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ (f,g) & \longmapsto & \begin{pmatrix} E & \rightarrow & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x}) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \begin{pmatrix} E & \rightarrow & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & \lambda f(\overrightarrow{x}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

***Démonstration.*** Triviale. □

**Définition**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-ev de dimension respective $n_E \in \mathbb{N}_{>0}$ et $n_F \in \mathbb{N}_{>0}$. Considérons $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{n_E}}\}$ et $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_{n_F}}\}$ des bases de $E$ et $F$ respectivement.

La matrice de $f$ exprimée de $\mathcal{B}_E$ vers $\mathcal{B}_F$, noté $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est définie pour tout $i \in [\![1; n_E]\!]$ et tout $j \in [\![1; n_F]\!]$

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)_{i,j} = (f(\overrightarrow{e_j}))_i$$

où $f(\overrightarrow{e_j})$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{e_j}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}_F$.

Dans le cas ou $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$ on notera simplement $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E)$.

Considérons par exemple l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie pour tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ par $f\binom{x}{y} = \binom{x+y}{y}$. Considérons également la base canonique $\mathcal{B} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nous pourrions également considérer $\mathcal{B}' = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'une base. Par définition $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est, en colonne, l'expression des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimer dans la base $\mathcal{B}'$. C'est à dire qu'il s'agit de trouver $x$ et $y$ tel que $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Il est évident ici (et si ça ne l'est pas, il suffit de passer par la méthode de résolution de

Gauss pour s'en convaincre) que $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. En d'autre terme, on peut saisir la première colonne de $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ par ces valeurs.

En raisonnant de même, on trouve que $f(e_2) = 1f_1 + 0f_2$.

Ces calculs permettent donc d'écrire $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Quelle différence formelle existe-t-il entre la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ? Aucune ! Il s'agit de la même transformation de $\mathbb{R}^2$ mais vu avec des angles différents.

**Définition**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires entre $\mathbb{R}$-ev. On défini la **composition** des applications, notée $g \circ f$, comme l'application de $E$ dans $G$ définie par

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \qquad g \circ f(\overrightarrow{x}) = g(f(\overrightarrow{x}))$$

**Proposition**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires entre $\mathbb{R}$-ev alors la composée $g \circ f$ est une application linéaire.

***Démonstration.***

(i). Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ des éléments de $E$, alors

$$g \circ f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = g(f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})) = g(f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})) = g(f(\overrightarrow{x})) + g(f(\overrightarrow{y})) = g \circ f(\overrightarrow{x}) + g \circ f(\overrightarrow{y})$$

(ii). Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$g \circ f(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = g(f(\lambda \cdot \overrightarrow{x})) = g(\lambda \cdot f(\overrightarrow{x})) = \lambda \cdot g(f(\overrightarrow{x})) = \lambda \cdot g \circ f(\overrightarrow{x})$$

□

**Théorème**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires entre $\mathbb{R}$-ev. Notons $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de $E$, $F$ et $G$.

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

***Démonstration.*** Il suffit de revenir à la définition. Rien de bien poétique. □

**Remarque :** En d'autre terme, la composition des applications linéaires correspond au produit des matrices associées.

**Définition**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-ev $E$ de dimension finie. La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, est la matrice

$$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

où $\mathrm{Id}$ est l'application linéaire de $E$ dans $E$ définie pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ par $\mathrm{Id}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1} = \binom{1}{0}, \overrightarrow{e_2} = \binom{0}{1}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1} = \binom{1}{1}, \overrightarrow{f_2} = \binom{1}{-1}\}$ sont deux bases. Alors

$$\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Proposition**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un ev $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Pour $\overrightarrow{x} \in E$ notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et $\beta_1, \ldots \beta_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

***Démonstration.*** Notons $\overrightarrow{e_i}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{f_i}$ ceux de $\mathcal{B}'$. En particulier

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overrightarrow{f_i}$$

Puisque $\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice de l'application identité, on a $\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{f_i}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$. Notons $\overrightarrow{f_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \overrightarrow{e_j}$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left( \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \overrightarrow{e_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_{i,j} \right) \overrightarrow{e_j}$$

On a alors

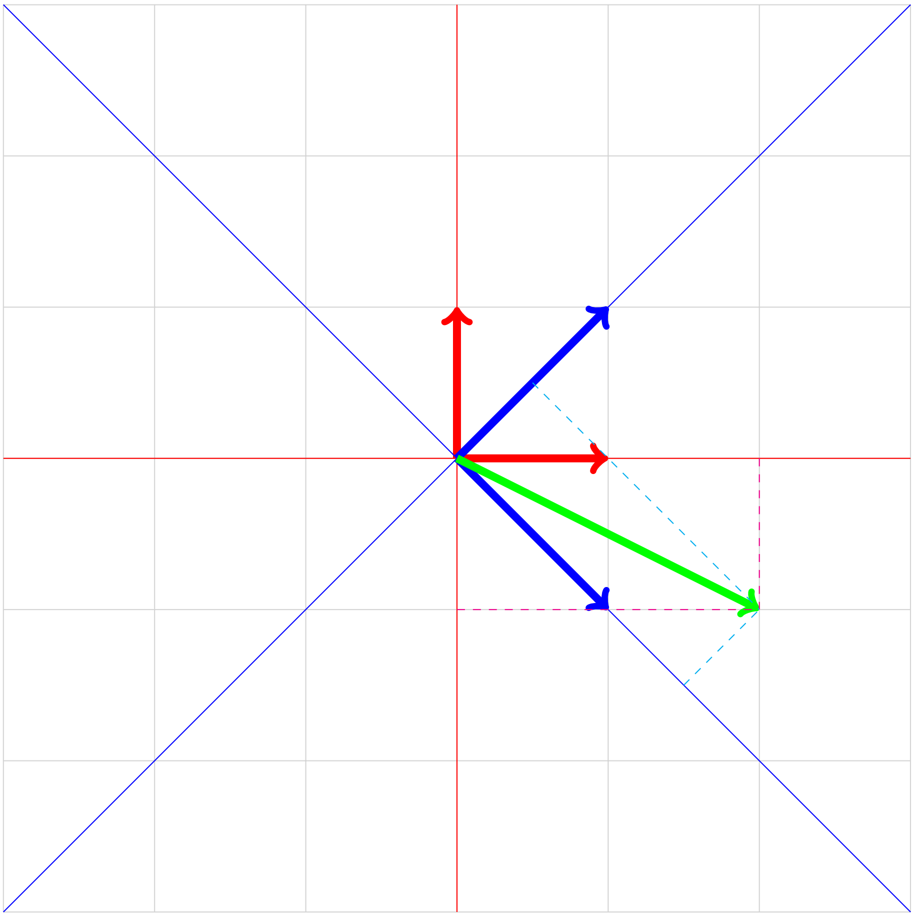
$$\begin{aligned}
\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} &= \mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \left( \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overrightarrow{f_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \overrightarrow{f_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left( \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \overrightarrow{e_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i p_{i,j} \overrightarrow{e_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_{i,j} \overrightarrow{e_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_{i,j} \right) \overrightarrow{e_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

Reprenons l'exemple précédent avec $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1} = \binom{1}{0}, \overrightarrow{e_2} = \binom{0}{1}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1} = \binom{1}{1}, \overrightarrow{f_2} = \binom{1}{-1}\}$ et

$$\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Considérons le vecteur $\overrightarrow{u} = \binom{2}{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors l'expression de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ est le résultat du produit $\mathsf{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.



**Lemme :** Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$ et $\mathrm{Id} : E \to E$ l'application linéaire définie pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ par $\mathrm{Id}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$. Quelque soit la base $\mathcal{B}_E$ de $E$,

$$\mathsf{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}_E) = \mathrm{Id}_n$$

***Démonstration.*** C'est la définition. $\square$

**Proposition**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-ev $E$ de dimension finie. Alors $\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible, de plus

$$\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \mathsf{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

*Démonstration.* C'est une conséquence trivial de l'observation suivante

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n$$

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}') = \mathrm{Id}_n$$

□

**Corollaire**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-ev $E$ et soit $f : E \to E$ une application linéaire.

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')\mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

*Démonstration.* Trivial. □

**Théorème**

Soient $m$ et $n$ des entiers strictement positifs. Pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$, notons $\mathcal{B}_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

Considérons les applications suivantes

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ A & \longmapsto & \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & A\overrightarrow{x} \end{array} \right) \end{array}$$

Alors $\varphi$ et $\psi$ sont des applications linéaire réciproque l'une de l'autre. En particulier, se donner une application linéaire entre $\mathbb{R}$-ev de dimension finie équivaut à se donner une matrice.

*Démonstration.* Admise. □

**Remarque :** Ce théorème implique en particulier que travailler avec des applications linéaires est équivalent au travail avec des matrices. Cependant, travailler avec des matrices nécessites le choix de base.

## 4. Rang

**Définition**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{R}$-ev.

(i). Le **noyau** de $f$ est l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{x} \in E \middle| f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \right\}$$

(ii). L'**image** de $f$ est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \overrightarrow{y} \in F \middle| \exists \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y} \right\}$$

**Proposition**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{R}$-ev. Le noyau est un sev de $E$ et l'image est un sev de $F$.

***Démonstration.*** Faisons une vérification rapide.

**Pour le noyau.** Soient $\overrightarrow{x}_1$ et $\overrightarrow{x}_2$ deux éléments du noyau et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f(\overrightarrow{x}_1+\lambda\cdot\overrightarrow{x}_2) = f(\overrightarrow{x}_1)+\lambda\cdot f(\overrightarrow{x}_2)$ puisque $f$ est une application linéaire. Par définition du noyau, $f(\overrightarrow{x}_1) = f(\overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{0}$ ce qui prouve que $f(\overrightarrow{x}_1 + \lambda \cdot \overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{x}_1 + \lambda \cdot \overrightarrow{x}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

**Pour l'image** Soient $\overrightarrow{y}_1$ et $\overrightarrow{y}_2$ deux éléments du noyau et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors par définition de l'image, il existe $\overrightarrow{y}_1$ et $\overrightarrow{y}_2$ de $E$ tels que $f(\overrightarrow{x}_1) = \overrightarrow{y}_1$ et $f(\overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{y}_2$. Par linéaire de $f$ on arrive à $f(\overrightarrow{x}_1 + \lambda \cdot \overrightarrow{x}_2) = f(\overrightarrow{x}_1) + \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{y}_1 + \lambda \cdot \overrightarrow{y}_2$ ce qui prouve que $\overrightarrow{y}_1 + \lambda \cdot \overrightarrow{y}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

□

**Théorème Théorème du rang**

Soient $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

***Démonstration.*** Admise. □

## 5. Déterminant

Voici une définition de déterminant qui nécessiterai pour la comprendre d'introduire le groupe symétrique, les transpositions et la signature. Le bagage théorique pour comprendre cette définition étant trop conséquent et un peu hors de propos, on pourra l'oublier après l'avoir lu [1].

**Définition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant de la matrice $A$, noté $\texttt{det}(A)$, est le nombre réel défini par

$$\texttt{det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

**Proposition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $\texttt{det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
2. $\texttt{det}(Id_n) = 1$
3. $\texttt{det}(Col_1, \dots, Col_i, \dots, Col_j, \dots, Col_n) = (-1)^{i+j}\texttt{det}(Col_1, \dots, Col_j, \dots, Col_i, \dots, Col_n)$
4. $\texttt{det}(Col_1, \dots, \lambda Col_i, \dots, Col_n) = \lambda \texttt{det}(Col_1, \dots, Col_i, \dots, Col_n)$
5. $\texttt{det}(\lambda \cdot A) = \lambda^n \texttt{det}(A)$
6. On ne modifie pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

***Démonstration.*** Ces propositions découlent plus ou moins trivialement de la définition. □

**Théorème Calcul du déterminant par développement**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\hat{A}_{i,j}$ la matrice $A$ où on a supprimer la ligne $i$ et la colonne $j$. Alors

$$\forall j \in [\![1;n]\!], \quad \texttt{det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \texttt{det}(\hat{A}_{i,j})$$

***Démonstration.*** Se démontre par récurrence sur la dimension $n$ en utilisant abusivement la définition. □

Par exemple calculons $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Le choix de la colonne a prendre est purement arbitraire, mais un œil averti remarquera que certain choix minimise les calculs...

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{+(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1} \underbrace{-(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=6} \underbrace{+(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{-(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=6} \underbrace{+(0)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} \underbrace{-(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = 7$$

1. Les personnes sujettes à des crises d'épilepsie sont priées de ne pas lire la définition qui suit.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{+1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} \underbrace{-1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \underbrace{+(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=4} = 7$$

On remarque que la dernière méthode était plus avantageuse car l'apparition du $0$ a limité le calcul. En utilisant qu'un déterminant n'est pas modifier si on ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres, on peut faire apparaitre le plus de $0$ possible pour simplifier significativement les opérations à effectuer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

**Théorème**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A$, $B$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathtt{det}(AB) = \mathtt{det}(A)\mathtt{det}(B)$$

***Démonstration.*** Il s'agit d'un exercice combinatoire usant sans retenue de la définition. □

**Proposition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathtt{det}({}^tA) = \mathtt{det}(A)$$

***Démonstration.*** Cela découle de la définition □

**Remarque :** Cette proposition implique en particulier que les propriétés du determinant sur les colonnes sont également vrai sur les lignes.

Par exemple calculons (à nouveau) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=6} \underbrace{+0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} \underbrace{-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 7$$

**Définition**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice des **cofacteurs** de $A$ ou **comatrice** de $A$ est la matrice, notée $\mathtt{Co}(A)$ définie pour tout $i$ et $j$ de $[\![1;n]\!]$ par

$$\mathtt{Co}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}\mathtt{det}(\hat{A}_{i,j})$$

où $\hat{A}_{i,j}$ est la matrice $A$ où on a supprimé la ligne $i$ et la colonne $j$.

Par exemple,

$$\mathtt{Co}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 13 & -13 \\ 40 & -30 & 0 \\ 9 & -23 & 13 \end{pmatrix}$$

**Théorème**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i). La matrice $A$ est inversible si et seulement si $\mathtt{det}(A) \neq 0$.

(ii). Si $A$ est inversible alors son inverse est $\dfrac{1}{\mathtt{det}(A)}{}^t\mathtt{Co}(A)$.

***Démonstration.*** Supposons que $\mathtt{det}(A) \neq 0$ et vérifions que $A^t\mathtt{Co}(A) = {}^t\mathtt{Co}(A)A = \mathtt{det}(A).\mathrm{Id}_n$.

$$\begin{aligned}
(A^t\mathtt{Co}(A))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}{}^t\mathtt{Co}(A)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\mathtt{Co}(A)_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(-1)^{j+k}\mathtt{det}(\hat{A}_{j,k})
\end{aligned}$$

Si $i = j$ alors cette dernière égalité correspond au déterminant d'après le calcul du déterminant par développement.

Sinon, cette dernière ligne s'identifie à $\mathtt{det}(A')$ où $A'$ est la même matrice que $A$ sauf que la ligne $j$ à été remplacée par la ligne $i$. Puisque $i$ est différent de $j$, la matrice $A'$ a deux lignes identiques ce qui implique que $\mathtt{det}(A') = 0$.

□

**Remarque :** l'inverse d'une matrice étant unique on la note en général $A^{-1}$. Ainsi le théorème précédent stipule que

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathtt{det}(A)}{}^t\mathtt{Co}(A)$$

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{130}\,{}^t\!\begin{pmatrix} -39 & 13 & -13 \\ 40 & -30 & 0 \\ 9 & -23 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{130}\begin{pmatrix} -39 & 40 & 9 \\ 13 & -30 & -23 \\ -13 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

**Corollaire**

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i). Si $A$ est inversible alors $\mathtt{det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathtt{det}(A)}$

(ii). Si $P$ est une matrice de passage alors $\mathtt{det}(PAP^{-1}) = \mathtt{det}(A)$

***Démonstration.***

(i). Puisque $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$ alors $\mathtt{det}(A)\mathtt{det}(A^{-1}) = \mathtt{det}(AA^{-1}) = \mathtt{det}(\mathrm{Id}_n) = 1$

(ii). $\mathtt{det}(PAP^{-1}) = \mathtt{det}(P)\mathtt{det}(A)\mathtt{det}(P^{-1}) = \mathtt{det}(P)\mathtt{det}(A)\dfrac{1}{\mathtt{det}(P)} = \mathtt{det}(A)$

$\square$

**Remarque :** Ce dernier corollaire prouve en particulier que le déterminant d'une matrice ne dépend pas de la base dans laquelle cette matrice s'exprime. On peut donc noter $\mathtt{det}(f)$ pour une application linéaire $f$, le déterminant se ramenant alors à un calcul sur une base choisi arbitrairement ... ou astucieusement.

## 6. Diagonalisation

**Définition**

Soit $f : E \to E$ une application linéaire sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie.

(i). Le **polynôme caractéristique** de $f$ est définie comme

$$\chi_f(X) = \mathtt{det}(f - X\mathrm{Id})$$

(ii). On dira que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de $f$ si $\chi_f(\lambda) = 0$.

(iii). On appel **spectre** de $f$ l'ensemble des valeurs propre de $f$. On note $\mathtt{Sp}(f)$ cet ensemble.

Considérons par exemple l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Alors en développant par rapport à la seconde ligne :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 0 & 3-X & 0 \\ 2 & -4 & 2-X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 2 & 2-X \end{vmatrix} = (3-X)(1-X)(2-X)$$

Ainsi $\mathtt{Sp}(f) = \{1, 2, 3\}$

**Remarque :** Le spectre est l'ensemble des valeurs annulant le polynôme caractéristique, c'est à dire annulant $\mathtt{det}(f - X\mathrm{Id})$. Cela signifie en particulier que $g = (f - \lambda\mathrm{Id})$ n'est pas inversible, ce qui implique que le noyau de $g$ est non restreint au vecteur nul.

Transpiration intense pour arriver à dire qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $g(x) = 0$ soit encore $f(x) = \lambda x$.

Un tel vecteur $x$ est appelé un **vecteur propre** associé à la valeur propre $\lambda$.

**Définition**

Soit $f$ une application linéaire et $\lambda$ une valeur propre. On appel **espace propre** l'espace vectoriel

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$$

Les éléments d'un espace propre sont appelés des **vecteurs propres**.

Reprenons l'exemple précédent et déterminons l'espace propre associé à la valeur propre 2. Il s'agit de déterminer $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Soit $\overrightarrow{x} \in E_2$, alors $(f - 2\mathrm{Id})(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. Or la matrice associée à $f - 2\mathrm{Id}$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 0 \\ 0 & 3-2 & 0 \\ 2 & -4 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $(f - 2\mathrm{Id})(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ traduit le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} -x & +2y & = & 0 \\ & y & = & 0 \\ 2x & -4y & = & 0 \end{array} \right.$$

Qui se résout par le pivot de Gauss et aboutis à la solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

**Définition**

Soient $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie.

(i). Soit $\lambda \in Sp(f)$. Il existe, $n_\lambda \in \mathbb{N}_{>0}$ et un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\chi_f(X) = (X-\lambda)^{n_\lambda}Q(X)$ et $Q(\lambda) \neq 0$. L'entier $n_\lambda$ s'appelle la **multiplicité algébrique** de $\lambda$.

(ii). On appel **multiplicité géométrique** de $\lambda \in Sp(f)$ l'entier $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}))$.

**Lemme :** Soit $\lambda$ une valeur propre d'une application linéaire, $m_\lambda$ sa multiplicité géométrique et $n_\lambda$ sa multiplicité algébrique

$$1 \leqslant m_\lambda \leqslant n_\lambda$$

***Démonstration.*** Admise. □

**Définition**

On dira qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est **diagonalisable** s'il existe une base de $E$ formée de vecteur propre de $f$.

**Remarque :** Soient $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire diagonalisable et $\mathcal{B}$ une base de vecteur propre. Alors

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_i \in Sp(f)$.

**Théorème**

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Les énoncés suivants sont équivalents.

(i). L'application $f$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(ii). $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$

(iii). La somme des multiplicité géométrique est égale à la dimension de $E$.

(iv). Le polynôme caractéristique se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynôme de degrés 1 et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à la multiplicité géométrique.

***Démonstration.*** Facile ;-) □

Reprenons l'exemple de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Le spectre de cette application est $\{1, 2, 3\}$. Notons $\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{Ker}(f - 1\mathrm{Id}) = \left\langle \overrightarrow{f_1} \right\rangle \qquad \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \left\langle \overrightarrow{f_2} \right\rangle \qquad \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \left\langle \overrightarrow{f_3} \right\rangle$$

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$. Alors

$$\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$\mathsf{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\mathsf{Mat}(f, \mathcal{B})\mathsf{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

# 7. Exemple d'application : suites

**Définition 7.0.1**

On dira que $U$ est une suite de $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}_{>0}$ si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $U_k \in \mathbb{R}^n$.

Le cas bien connu est celui des suites réelles (c'est à dire $n = 1$). Dans ce cas, il a été étudié le cas des suites récurrentes et explicites ainsi que le cas particulier des suites géométriques. Nous avions les résultats suivants :

**Définition 7.0.2**

Une suite $u$ de $\mathbb{R}$ sera dite **géométrique** si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre $q$ est appelé la **raison** de la suite.

A l'aide d'un raisonnement par récurrence on a le résultat suivant.

**Proposition 7.0.3**

Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = q^n u_0$$

On peut faire la même chose dans $\mathbb{R}^n$.

**Définition 7.0.4**

On dira qu'une suite $U$ de $\mathbb{R}^n$ est **géométrique** si il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ tel que

$$U_{n+1} = QU_n$$

Toujours par récurrence, avec pratiquement la même preuve, on arrive au (même) résultat suivant.

**Proposition 7.0.5**

Soit $u$ une suite géométrique de $\mathbb{R}^n$ de raison $Q$ alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$U_k = Q^k U_0$$

Appliquons ce principe au suite multi-récurrente.

**Définition 7.0.6**

On dira qu'une suite $u$ de $\mathbb{R}$ est **récurrente linéaire d'ordre** $n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}_{>0}$ s'il existe des réel $(a_i)_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_{k+n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u_{k+i}$$

On dit que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est la **raison** de cette suite récurrente linéaire.

Le cas bien connu est celui des suites récurrente linéaire d'ordre $1$ qui vérifie donc par définition $u_{k+1} = a_0 u_k$. Le nombre réel $a_0$ est donc la raison de la suite géométrique.

Une suite d'ordre 2 est de la forme $u_{k+2} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1}$. La plus célèbre est la suite de Fibonacci :

$$u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$$

où $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

**Définition 7.0.7**

Soit $u$ une suite récurrente linéaire d'ordre $n$ de raison $(a_0, \dots, a_{n-1})$. On appel **matrice compagnon** de $u$, notée $\mathrm{Compa}(a_0, \dots, a_{n-1})$ ou $\mathrm{Compa}(u)$, la matrice de $\mathcal{M}_n\mathbb{R}$

$$\mathrm{Compa}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice compagnon de la suite de Fibonacci est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Proposition 7.0.8**

Soit $u$ une suite récurrente linéaire d'ordre $n$. Notons $U$ la suite de $\mathbb{R}^n$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{pmatrix}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$U_k = \mathrm{Compa}(u)^n U_0$$

.

***Démonstration.*** Si $(a_0, \dots, a_{n-1})$ désigne la raison de $u$ alors on a

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \\ u_{k+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \\ a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \cdots + a_{n-1} u_{k+n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{Compa}(u) U_0$$

Ainsi $U$ est une suite géométrique de $\mathbb{R}^n$ et vérifie donc $U_k = \mathrm{Compa}(u)^n U_0$. $\square$

La difficulté réside donc dans le calcul de $\mathrm{Compa}(u)^n$ ; problème partiellement réglé par les outils d'algèbre des paragraphes précédents.

Nous avons cependant besoin de déterminer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon.

**Proposition 7.0.9**

Soit $u$ une suite récurrente linéaire d'ordre $n$ de raison $(a_0, \dots, a_{n-1})$. Alors $\chi_{\mathrm{Compa}(u)}(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice compagnon est

$$\chi_{\mathrm{Compa}(u)}(X) = (-1)^{n+1} \left( -X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \right)$$

*Démonstration.* Notons $P_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(X) = \chi_{\mathrm{Compa}(a_0,\ldots,a_{n-1})}(X)$ En développant suivant la première colonne on montre sans peine que

$$P_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(X) = -XP_{a_1,\ldots,a_{n-1}}(X) + (-1)^{n+1}a_0$$

Exactement de la même manière on montre que

$$P_{a_1,\ldots,a_{n-1}}(X) = -XP_{a_2,\ldots,a_{n-1}}(X) + (-1)^{n}a_1$$

En injectant cette égalité dans la première on arrive à

$$\begin{aligned}
P_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(X) &= -XP_{a_1,\ldots,a_{n-1}}(X) + (-1)^{n+1}a_0 \\
&= -X\left(-XP_{a_2,\ldots,a_{n-1}}(X) + (-1)^{n}a_1\right) + (-1)^{n+1}a_0 \\
&= (-X)^2P_{a_2,\ldots,a_{n-1}}(X) + (-1)^{n}(-X)a_1 + (-1)^{n+1}a_0 \\
&= (-X)^2P_{a_2,\ldots,a_{n-1}}(X) + (-1)^{n+1}Xa_1 + (-1)^{n+1}a_0
\end{aligned}$$

En itérant ce processus on arrive à

$$P_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(X) = (-X)^{n-1}P_{a_{n-1}}(X) + (-1)^{n+1}a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}Xa_1 + (-1)^{n+1}a_0$$

or $P_{a_{n-1}}(X) = \det(a_{n-1} - X) = a_{n-1} - X$. On arrive alors

$$\begin{aligned}
P_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(X) &= (-X)^{n-1}(a_{n-1} - X) + (-1)^{n+1}a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}Xa_1 + (-1)^{n+1}a_0 \\
&= (-X)^{n-1}a_{n-1} + (-X)^{n} + (-1)^{n+1}a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}Xa_1 + (-1)^{n+1}a_0 \\
&= (-1)^{n+1}\left(-X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X^1 + a_0X^0\right)
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 7.0.10**

Si l'équation $-X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_iX^i = 0$ admet $n$ solutions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors la suite récurrente linéaire de raison $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ s'écrit pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = \alpha_1\lambda_1^k + \alpha_2\lambda_2^k + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k$$

*Démonstration.* Si il existe $n$ solutions au polynôme caractéristique alors la matrice est diagonalisable. Dans une certaine base la matrice est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ dont la puissance $k$-ème donne $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$
Or on sait que $U_k = \mathrm{Compa}(u)^nU_0$. Puisque le changement de base correspond à une somme linéaire de ces puissances, le résultat est prouvé. □

Par exemple, pour la suite de Fibonacci, $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$. On considère l'équation $-X^2 + X + 1 = 0$ qui admet deux solutions $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Alors $u_k = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$. Puisqu'on sait que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ on en déduit les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 &= 0 \\ \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 &= 1 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned}\right.$$

On trouve $\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ pour avoir finalement

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

Autre exemple : on considère la suite récurrente linéaire d'ordre 3 définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $u_{k+3} = 2u_{k+2} + u_{k+1} - 2u_k$ avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$. On considère l'équation $X^3 = 2X^2 + X - 2$ qui équivaut à $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$ soit encore $X^2(X-2) - (X-2) = 0$ soit encore $(X^2-1)(X-2) = 0$ dont les solutions sont $-1$, $1$ et $2$. Alors $u_k = a(-1)^k + b(1)^k + c(2)^k$. Les conditions initiales permettent de donner le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & = & u_0 & = & a+b+c \\ 1 & = & u_1 & = & -a+b+2c \\ 3 & = & u_2 & = & a+b+4c \end{array}\right.$$

dont la seule solution est $a = 0$, $b = -1$ et $c = 1$. Finalement pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = 2^k - 1$$