Fiche Mnémotechnique
Déterminant - Règles

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant de la matrice A, noté $\mathtt{det}(A)$, est le nombre réel défini par

$$\mathtt{det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $\mathtt{det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
2. $\mathtt{det}(\mathrm{Id}_n) = 1$
3. $\mathtt{det}(\mathrm{Col}_1, \dots, \mathrm{Col}_i, \dots, \mathrm{Col}_j, \dots, \mathrm{Col}_n) = (-1)^{i+j}\mathtt{det}(\mathrm{Col}_1, \dots, \mathrm{Col}_j, \dots, \mathrm{Col}_i, \dots, \mathrm{Col}_n)$
4. $\mathtt{det}(\mathrm{Col}_1, \dots, \lambda\mathrm{Col}_i, \dots, \mathrm{Col}_n) = \lambda\mathtt{det}(\mathrm{Col}_1, \dots, \mathrm{Col}_i, \dots, \mathrm{Col}_n)$
5. $\mathtt{det}(\lambda \cdot A) = \lambda^n \mathtt{det}(A)$
6. On ne modifie pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

Théorème Calcul du déterminant par développement

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\hat{A}_{i,j}$ la matrice A où on a supprimer la ligne i et la colonne j. Alors

$$\forall j \in [\![1; n]\!], \quad \mathtt{det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \mathtt{det}(\hat{A}_{i,j})$$

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et A, B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathtt{det}(AB) = \mathtt{det}(A)\mathtt{det}(B)$$

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathtt{det}({}^tA) = \mathtt{det}(A)$$

Fiche Mnémotechnique
Déterminant - Exemples

En choisissant de développer par rapport à une ligne ou une colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=6} \underbrace{+0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} \underbrace{-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{+1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1} \underbrace{-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=6} \underbrace{+1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{+1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} \underbrace{-1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \underbrace{+(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=4} = 7$$

En effectuant des opérations élémentaires de Gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 7$$