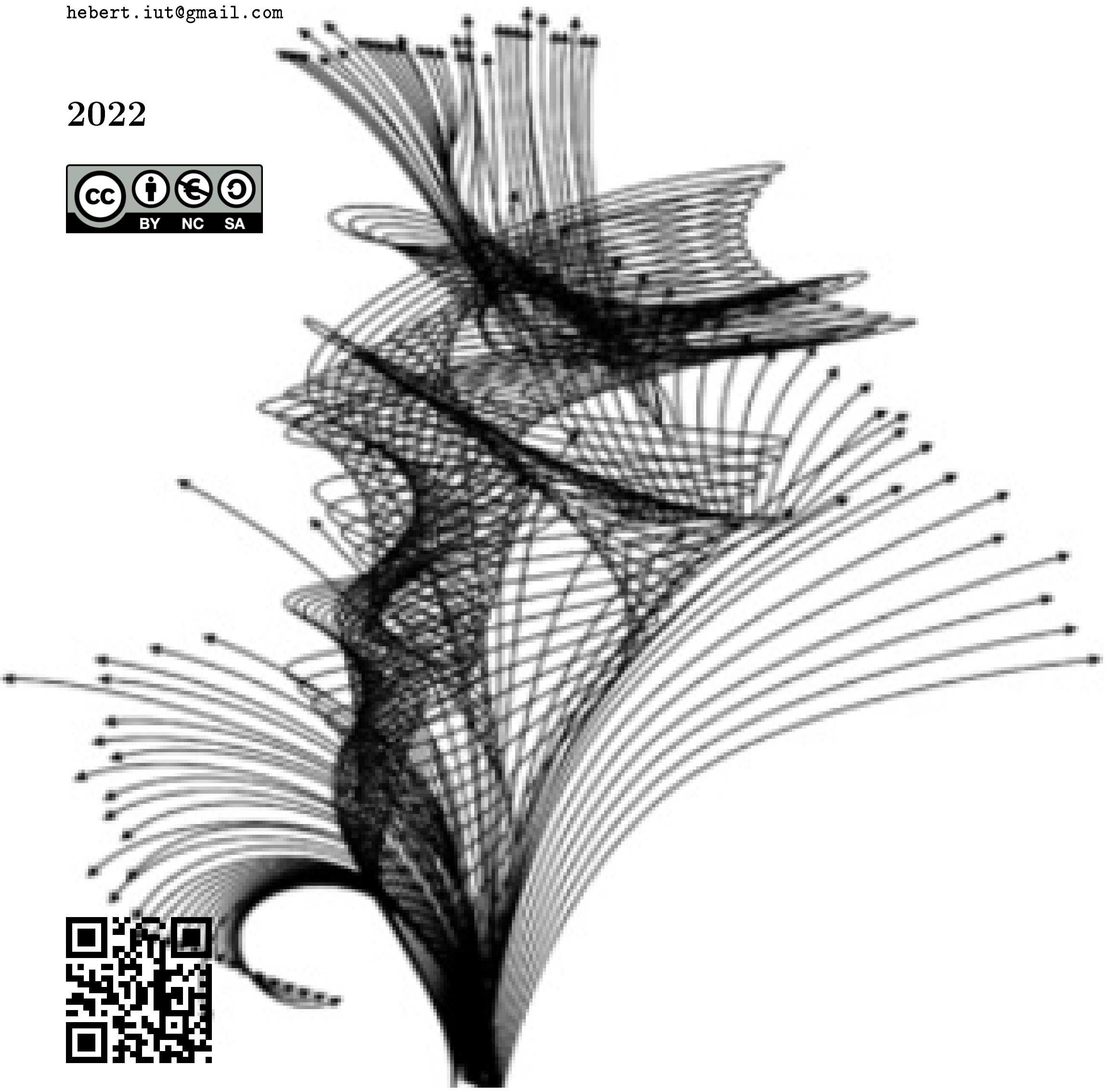
# Algèbre linéaire
# Diagonalisation

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

**2022**





## Systèmes

### Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss. Vous préciserez les opérations élémentaires de Gauss.

1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & = & -5 \\ 8x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_3 & - & 6x_4 & = & 8 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}\right.$$

3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & \frac{5}{4}x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 8x_2 & - & \frac{24}{5}x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & \frac{25}{2}x_2 & - & 9x_3 & = & -5 \end{array}\right.$$

4.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 7x_2 & = & 7 \\ -7x_1 & - & 4x_2 & = & 6 \\ -9x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

### Exercice 2

Discutez suivant les valeurs du paramètre $k$ de l'existence des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \end{array}\right.$$

### Exercice 3

Même exercice avec

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & kz & = & 1 \\ x & - & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & k^2z & = & 1 \end{array}\right.$$

### Exercice 4

Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tel que pour tout entier $n$ strictement positif

$$\frac{1}{4n^3 - n} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2n-1}$$

### Exercice 5

Dans chacun des cas, déterminer un polynôme de plus degrés possible vérifiant les contraintes imposées.

1. Le polynôme $P$ est tel que $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$
2. Le polynôme $P$ est tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$
3. Le polynôme $P$ est tel que $P(1) = 1$ et $P(2) = 4$ et $P(3) = 6$
4. Le polynôme $P$ est tel que $P(1) = 1$ et $P(2) = 4$ et $P(3) = 9$
5. Le polynôme $P$ est tel que $P(1) = 643$ et $P(0) = -47$ et $P(-1) = 999$

### Exercice 6

Voici les informations dont vous disposez sur un code secret composé de quatre chiffres :

→ La somme des chiffres qui composent ce code est 15.
→ Le chiffre des dizaines est le double de celui des milliers.
→ La différence entre les chiffres des centaines et celui des unités est 1.

→ 24 fois le chiffre des centaines est 6 fois celui des dizaines.
Écrire le système associé à ce problème et le résoudre.

## Calculs matricielles

### Exercice 7

Considérons les quatre matrices suivantes. Parmi les opérations proposées, réaliser celles qui sont possibles. Marquer **IMPOSSIBLE** lorsque l'opération n'est pas définie. Aucune justification n'est attendue.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad , B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

*On rappel que l'on note* $\mathrm{Id}_n$ *la matrice identité en dimension* $n$ *et* ${}^tX$ *la matrice transposée de* $X$.

1. $DAB$
2. ${}^tA + 6D$
3. $BC$
4. $BA$
5. $ABC$
6. ${}^tA + C$
7. ${}^tC + D$
8. $DCB$
9. $AB$
10. $ADC$

### Exercice 8

Même exercice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad , B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. $AB$
2. $C + 3\mathrm{Id}_2$
3. $ABC$
4. $AC$
5. $BCA$
6. $ACD$
7. $C + D$
8. $BDC$
9. ${}^tD + 3\mathrm{Id}_3$
10. $A + 9\mathrm{Id}_2$

### Exercice 9

Même exercice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad , B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. $AD$
2. $B + C$
3. ${}^tA + 8B$
4. ${}^tC + D$
5. $DBC$
6. $ACB$
7. $CAB$
8. $BDC$
9. $A + 4\mathrm{Id}_2$
10. $A + C$

## Déterminant

### Exercice 10

Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix}$

## Exercice 11

Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres réel et $A = \begin{pmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{pmatrix}$. Montrer que

$$\mathtt{det}(A) = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

## Exercice 12

Calculer les déterminants suivants et le mettre sous forme factorisés.

1. $\begin{vmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ b & c & a \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

## Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.

## Exercice 14

Lorsque cela est possible calculer l'inverse des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$

## Espaces vectoriels

### Exercice 15

On considère sur $\mathbb{R}^2$ les lois de composition interne et externe suivantes :

$$\begin{array}{rcl} "+" : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\binom{x}{y}, \binom{a}{b}\right) & \longmapsto & \binom{x+a}{y+b} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} "\cdot" : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \binom{x}{y}\right) & \longmapsto & \binom{\lambda x}{0} \end{array}$$

Ces deux lois font-elles de $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-ev ?

### Exercice 16

On considère sur $\mathbb{R}^2$ les lois de composition interne et externe suivantes :

$$\begin{array}{rcl} "+" : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\binom{x}{y}, \binom{a}{b}\right) & \longmapsto & \binom{x+a}{y+b} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} "\cdot" : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \binom{x}{y}\right) & \longmapsto & \binom{\lambda x}{y} \end{array}$$

Ces deux lois font-elles de $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-ev ?

### Exercice 17

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des nombres réels strictement positif, les lois de composition interne et externe suivantes :

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, x) & \longmapsto & x^\lambda \end{array}$$

Ces deux lois font-elles de $\mathbb{R}_+^*$ un $\mathbb{R}$-ev ?

### Exercice 18

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On le munit des deux opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (f, g) & \longmapsto & \left( \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \left( \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array} \right) \end{array}$$

Prouver que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

**Exercice 19**

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles. On le munit des deux opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{U}\times\mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ ((u_n),(v_n)) & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n+v_n \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R}\times\mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (\lambda,(u_n)) & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda u_n \end{array}\right) \end{array}$$

Prouver que $\mathcal{U}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

**Exercice 20**

Parmi les ensembles suivants déterminer les sev de $\mathbb{R}^2$.

1. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy > 0\right\}$
2. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy \geqslant 0\right\}$
3. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy \neq 0\right\} \cup \{\binom{0}{0}\}$
4. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy = 0\right\}$
5. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x = 0\right\}$
6. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x \geqslant 0\right\}$
7. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x+y = 0\right\}$
8. $E = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x+y = 1\right\}$

**Exercice 21**

Pour chaque question, dire si $F$ et $G$ sont des sous-espaces supplémentaires de $E$.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

**Exercice 22**

Pour chacune des sev suivants, donner une base et indiquer la dimension.

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 0 \right\}$
2. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y + z = 0 \right\}$
3. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y + z = 0 \wedge 2x - z = 0 \right\}$
4. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$
5. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$
6. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$
7. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

**Exercice 23**

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $a > 0$, on note $f_a \in \mathcal{F}$ la fonction définie par $f_a(x) = \ln(ax)$.

Soient $a$, $b$ et $c$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces réels pour que la famille $\{f_a, f_b, f_c\}$ soit une partie libre de $\mathcal{F}$.

## Applications linéaires et matrices

**Exercice 24**

Vérifier si les applications suivantes sont bien des applications linéaires.

1. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 1 \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
4. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \end{array}$$
5. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y \\ y - x \end{pmatrix} \end{array}$$
6. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} xz \\ y - 2z \end{pmatrix} \end{array}$$
7. $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y - 2z \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 25**

Pour chaque application linéaire suivante

(i). Déterminer la matrice des applications linaires

(ii). Déterminer une base et la dimension du noyau de $f$.

(iii). Déterminer la dimension et une base de l'image de $f$.

1.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x+y \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y-2z \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y-2z \end{pmatrix} \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 26**

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_+^*$ de la structure d'espace vectoriel exponentielle.

$$\begin{array}{rcl} +:\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot:\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda,x) & \longmapsto & x^\lambda \end{array}$$

On munit l'espace $F = \mathbb{R}$ de sa structure naturelle d'espace vectoriel (addition et multiplication classique). Vérifier que l'application suivante est une application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f:E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \ln(x^3) \end{array}$$

Déterminer son noyau.

Même question avec l'application :

$$\begin{array}{rcl} g:F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & e^{2x} \end{array}$$

## Changement de base

**Exercice 27**

Pour chacune des matrices suivantes

(i). Déterminer le polynôme caractéristique

(ii). Déterminer le spectre

(iii). Calculer une base de chaque espace propre

(iv). Répondre à la question : Cette matrice est-elle diagonalisable ?

(v). Si la réponse à la question précédente est positive, donner une base de diagonalisation et calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

## Application : exponentielle de matrice

**Exercice 28**

Résoudre les systèmes d'équation différentielle suivant :

1. $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = -x + 2y + e^t \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = -8x - 5y - 3z \end{cases}$

**Exercice 29**

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 2y' - y = \cos(t)$
2. $5y'' - 2y = e^t$
3. $y''' + y' + 3y = 1$

**Exercice 30**

Pour chacune des suites récurrentes suivantes, donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
2. $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
3. $3u_{n+2} = u_{n+1} - 6u_n$
4. $u_{n+3} = -u_{n+2} + u_n$
5. $2u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$