TD1 : Révisions

Systèmes

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss. Vous préciserez les opérations élémentaires de Gauss.

1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & = & -5 \\ 8x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_3 & - & 6x_4 & = & 8 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}\right.$$

3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & \frac{5}{4}x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 8x_2 & - & \frac{24}{5}x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & \frac{25}{2}x_2 & - & 9x_3 & = & -5 \end{array}\right.$$

4.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 7x_2 & = & 7 \\ -7x_1 & - & 4x_2 & = & 6 \\ -9x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Discutez suivant les valeurs du paramètre k de l'existence des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3

Même exercice avec

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & kz & = & 1 \\ x & - & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & k^2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 4

Déterminer trois réels a, b et c tel que pour tout entier n strictement positif

$$\frac{1}{4n^3-n} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2n-1}$$

Exercice 5

Dans chacun des cas, déterminer un polynôme de plus degrés possible vérifiant les contraintes imposées.

1. Le polynôme P est tel que $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$
2. Le polynôme P est tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$
3. Le polynôme P est tel que $P(1) = 1$ et $P(2) = 4$ et $P(3) = 6$
4. Le polynôme P est tel que $P(1) = 1$ et $P(2) = 4$ et $P(3) = 9$
5. Le polynôme P est tel que $P(1) = 643$ et $P(0) = -47$ et $P(-1) = 999$

Exercice 6

Voici les informations dont vous disposez sur un code secret composé de quatre chiffres :

→ La somme des chiffres qui composent ce code est 15.
→ Le chiffre des dizaines est le double de celui des milliers.
→ La différence entre les chiffres des centaines et celui des unités est 1.
→ 24 fois le chiffre des centaines est 6 fois celui des dizaines.

Écrire le système associé à ce problème et le résoudre.

Calculs matricielles

Exercice 7

Considérons les quatre matrices suivantes. Parmi les opérations proposées, réaliser celles qui sont possibles. Marquer **IMPOSSIBLE** lorsque l'opération n'est pas définie. Aucune justification n'est attendue.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad , B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On rappel que l'on note Id_n *la matrice identité en dimension* n *et* ${}^tX$ *la matrice transposée de* X.

1. DAB
2. ${}^tA + 6D$
3. BC
4. BA
5. ABC
6. ${}^tA + C$
7. ${}^tC + D$
8. DCB
9. AB
10. ADC

Exercice 8

Même exercice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad , B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. AB
2. $C + 3\mathrm{Id}_2$
3. ABC
4. AC
5. BCA
6. ACD
7. $C + D$
8. BDC
9. ${}^tD + 3\mathrm{Id}_3$
10. $A + 9\mathrm{Id}_2$

Exercice 9

Même exercice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad , B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. AD
2. $B + C$
3. ${}^tA + 8B$
4. ${}^tC + D$
5. DBC
6. ACB
7. CAB
8. BDC
9. $A + 4\mathrm{Id}_2$
10. $A + C$