TD2 : Déterminants et inverses matricielles

Déterminant

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 2

Soient a, b et c des nombres réel et $A = \begin{pmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{pmatrix}$. Montrer que

$$\mathtt{det}(A) = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants et le mettre sous forme factorisés.

1. $\begin{vmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ b & c & a \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5

Lorsque cela est possible calculer l'inverse des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$