TD3 : Espaces vectoriels et bases

Espaces vectoriels

Exercice 1

On considère sur $\mathbb{R}^2$ les lois de composition interne et externe suivantes :

$$"+" : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\binom{x}{y}, \binom{a}{b}\right) & \longmapsto & \binom{x+a}{y+b} \end{array} \qquad "\cdot" : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \binom{x}{y}\right) & \longmapsto & \binom{\lambda x}{0} \end{array}$$

Ces deux lois font-elles de $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-ev ?

Exercice 2

On considère sur $\mathbb{R}^2$ les lois de composition interne et externe suivantes :

$$"+" : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\binom{x}{y}, \binom{a}{b}\right) & \longmapsto & \binom{x+a}{y+b} \end{array} \qquad "\cdot" : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \binom{x}{y}\right) & \longmapsto & \binom{\lambda x}{y} \end{array}$$

Ces deux lois font-elles de $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-ev ?

Exercice 3

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des nombres réels strictement positif, les lois de composition interne et externe suivantes :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, x) & \longmapsto & x^\lambda \end{array}$$

Ces deux lois font-elles de $\mathbb{R}_+^*$ un $\mathbb{R}$-ev ?

Exercice 4

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On le munit des deux opérations suivantes :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (f, g) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right) \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array} \right) \end{array}$$

Prouver que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 5

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles. On le munit des deux opérations suivantes :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ ((u_n), (v_n)) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n + v_n \end{array} \right) \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (\lambda, (u_n)) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda u_n \end{array} \right) \end{array}$$

Prouver que $\mathcal{U}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 6

Parmi les ensembles suivants déterminer les sev de $\mathbb{R}^2$.

1. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy > 0 \right\}$
2. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy \geqslant 0 \right\}$
3. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy \neq 0 \right\} \cup \{\binom{0}{0}\}$
4. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| xy = 0 \right\}$
5. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x = 0 \right\}$
6. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x \geqslant 0 \right\}$
7. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 0 \right\}$
8. $E = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 1 \right\}$

Exercice 7

Pour chaque question, dire si F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Exercice 8

Pour chacune des sev suivants, donner une base et indiquer la dimension.

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 0 \right\}$
2. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y + z = 0 \right\}$
3. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y + z = 0 \wedge 2x - z = 0 \right\}$
4. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$
5. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$
6. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$
7. $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

Exercice 9

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_*^+$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $a > 0$, on note $f_a \in \mathcal{F}$ la fonction définie par $f_a(x) = \ln(ax)$.

Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces réels pour que la famille $\{f_a, f_b, f_c\}$ soit une partie libre de $\mathcal{F}$.