TD4 : Applications linéaires et changements bases

Applications linéaires et matrices

Exercice 1

Vérifier si les applications suivantes sont bien des applications linéaires.

1. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x+1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y \\ y-x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} xz \\ y-2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y-2z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2

Pour chaque application linéaire suivante

(i). Déterminer la matrice des applications linaires

(ii). Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

(iii). Déterminer la dimension et une base de l'image de f.

1. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x+y \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y-2z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y-2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_+^*$ de la structure d'espace vectoriel exponentielle.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, x) &\longmapsto x^\lambda \end{aligned}$$

On munit l'espace $\mathsf{F} = \mathbb{R}$ de sa structure naturelle d'espace vectoriel (addition et multiplication classique). Vérifier que l'application suivante est une application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \ln(x^3) \end{array}$$

Déterminer son noyau.

Même question avec l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & e^{2x} \end{array}$$

Changement de base

Exercice 4

Pour chacune des matrices suivantes

(i). Déterminer le polynôme caractéristique

(ii). Déterminer le spectre

(iii). Calculer une base de chaque espace propre

(iv). Répondre à la question : Cette matrice est-elle diagonalisable ?

(v). Si la réponse à la question précédente est positive, donner une base de diagonalisation et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$