Graphes et langages

David Hébert

hebert.iut@gmail.com

2024

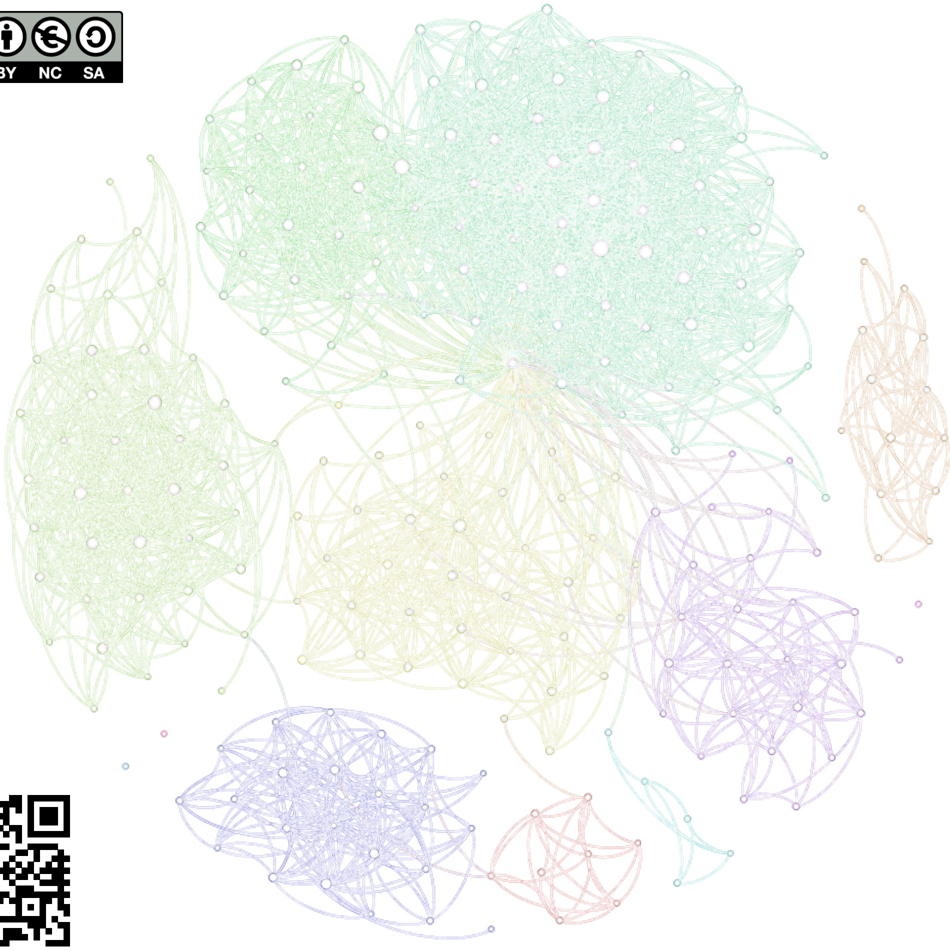


Table des matières

1. Généralités sur les graphes

1.1 Définitions

Définition 1.1.1

Un **graphe orienté** $\mathcal{G}$ est la donnée de :

(i) Un ensemble fini et non vide noté $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ appelé les **sommets** du graphe $\mathcal{G}$.

(ii) Un ensemble noté $\mathbf{Arc}(\mathcal{G})$ appelé les **Arcs** du graphe $\mathcal{G}$ dont les éléments sont des couples de $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$.

Par exemple $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathbf{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, d), (d, a), (d, e), (d, f), (e, a), (f, a)\}$ définissent un graphe orienté.

Définition 1.1.2

Un **graphe non orienté** $\mathcal{G}$ est la donnée de :

(i) Un ensemble fini et non vide noté $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ appelé les **sommets** du graphe $\mathcal{G}$.

(ii) Un ensemble noté $\mathbf{Ar}(\mathcal{G})$ appelé les **arêtes** du graphe $\mathcal{G}$ dont les éléments sont des ensembles formés de deux éléments de $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$.

Par exemple, $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathbf{Ar}(\mathcal{G}) = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$ définissent un graphe non orienté.

On prendra garde à ne pas confondre les notations et à ne pas mélanger avec les notions de graphe orienté et non orienté.

Un arc est un couple.
Une arête est un ensemble.

Alors que, dans le cas orienté, il y a une différence entre les arcs (a, b) et (b, a) il n'y a, dans le cas non orienté, aucune différence entre les arêtes $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$. De même, alors que (a, a) a un sens dans le cas orienté, il n'y a aucun sens à parler de l'arête $\{a, a\}$. En particulier, dans le cas non orienté, aucun sommet ne boucle sur lui-même.

Remarque 1.1.3 : Dans la suite on parlera simplement de **graphe** pour ne pas avoir a distinguer les graphes orientés des graphes non orientés.

Définition 1.1.4

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ deux graphes. On dira que $\mathcal{G}'$ est un **sous-graphe** de $\mathcal{G}$, noté $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ si

(i) $\mathbf{Som}(\mathcal{G}') \subseteq \mathbf{Som}(\mathcal{G})$

(ii) **Cas non orienté :** $\mathbf{Ar}(\mathcal{G}') \subseteq \mathbf{Ar}(\mathcal{G})$

(ii) **Cas orienté :** $\mathbf{Arc}(\mathcal{G}') \subseteq \mathbf{Arc}(\mathcal{G})$

Définition 1.1.5

Soient $\mathcal{G}$ un graphe et $P \subset \mathbf{Som}(\mathcal{G})$. On définit $\mathcal{G}'$ le **graphe engendré par** P par

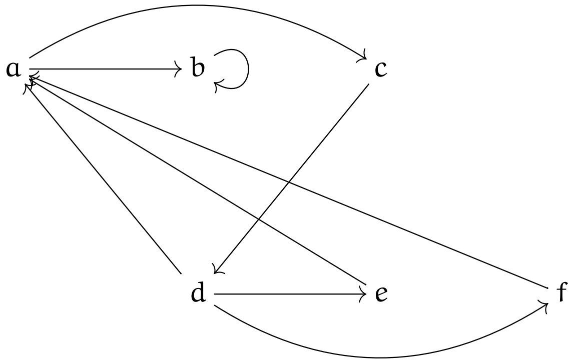
(i) $\mathbf{Som}(\mathcal{G}') = P$,

(ii) **Cas non orienté :** $\mathbf{Ar}(\mathcal{G}') = \left\{\{x, y\} \in \mathbf{Ar}(\mathcal{G}) \middle| (x, y) \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}')^2\right\}$

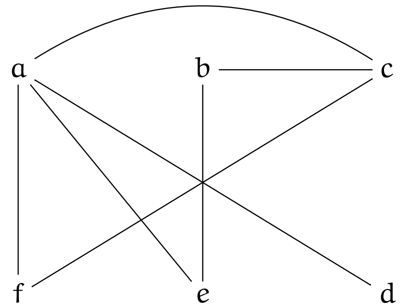
(ii) **Cas orienté :** $\mathbf{Arc}(\mathcal{G}') = \left\{(x, y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}) \middle| (x, y) \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}')^2\right\}$

1.2 Représentation d'un graphe

La manière naïve de représenter un graphe est de noter les sommets dans le plan et de relier deux sommets par un segment ou un arc de cercle lorsque l'arête (ou l'arc) correspondant existe, en précisant par des flèches l'orientation dans le cas d'un graphe orienté. Il s'agit de la **représentation sagittale**.



$\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f\}$
$\mathbf{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, d), (d, a), (d, e),$
$(d, f), (e, a), (f, a)\}$



$\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f\}$
$\mathbf{Ar}(\mathcal{G}) = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$

On peut également représenter un graphe par une matrice booléenne.

Définition 1.2.1

Notons $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ l'algèbre de Boole standard. Son addition et sa multiplication sont données par les tables de calculs suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Le 0, 1, $+$ et $\times$ représentent respectivement le FAUX, VRAI, OU et ET de la logique.

Définition 1.2.2

Soit $\mathcal{G}$ un graphe. Notons $n \in \mathbb{N}_{>0}$ la cardinalité de $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ et notons $\{a_1, \dots, a_n\}$ les sommets.
La **matrice booléenne** ou **matrice d'adjacence** de $\mathcal{G}$ est une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ tel que

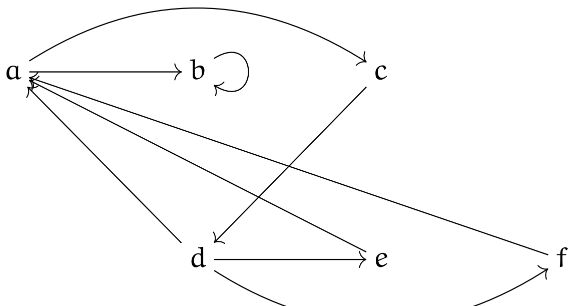
$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{a_i, a_j\} \in \mathbf{Ar}(\mathcal{G}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas non orienté.

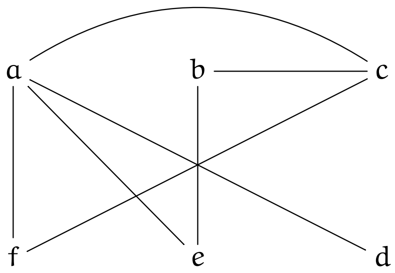
$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas orienté.

Par exemple :



	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	0
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	1	0	0	0	1	1
e	1	0	0	0	0	0
f	1	0	0	0	0	0



	a	b	c	d	e	f
a	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	0	1	0
c	1	1	0	0	0	1
d	1	0	0	0	0	0
e	1	1	0	0	0	0
f	1	0	1	0	0	0

Proposition 1.2.3

La matrice booléenne d'un graphe non orienté est une matrice carré symétrique à diagonale nulle.

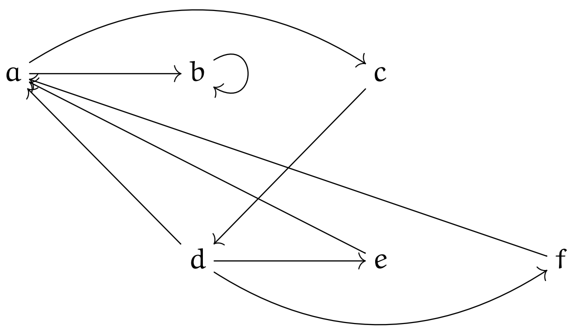
Démonstration. Si $\{a_i, a_j\}$ est une arête alors $\{a_j, a_i\}$ également (l'ordre des éléments dans un ensemble ne compte pas). De plus $\{a_i, a_i\}$ ne peut jamais être une arête (les arêtes sont des ensembles à deux éléments or $\{a_i, a_i\} = \{a_i\}$). □

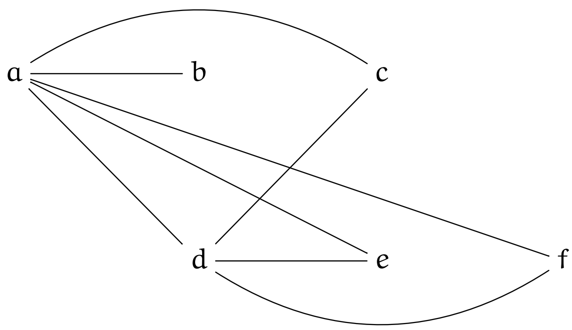
Définition 1.2.4

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté. On note $|\mathcal{G}|$ le graphe non orienté associé à $\mathcal{G}$ et défini par :

$$\mathbf{Som}(|\mathcal{G}|) = \mathbf{Som}(\mathcal{G}), \qquad \mathbf{Ar}(|\mathcal{G}|) = \Big\{\{x, y\} \Big| x \neq y \wedge (x, y) \in \mathrm{Arc}(\mathcal{G})\Big\}$$

Pour "désorienter" un graphe, il suffit d'enlever les boucles et les flèches de sa représentation sagittale.





Pour la représentation matricielle, le procédé est un peu plus compliqué : il faut tout d'abord mettre des 0 sur la diagonale (ce qui correspond à enlever les boucles) et rendre la matrice symétrique.

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	0
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	1	0	0	0	1	1
e	1	0	0	0	0	0
f	1	0	0	0	0	0

$\Longrightarrow$

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	1	0	0	0	1	1
e	1	0	0	0	0	0
f	1	0	0	0	0	0

$\Longrightarrow$

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	1	1	1
b	1	0	0	0	0	0
c	1	0	0	1	0	0
d	1	0	1	0	1	1
e	1	0	0	1	0	0
f	1	0	0	1	0	0

1.3 Exemples standards

Voici quelques exemples de graphes non orientés.

Définition 1.3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $n > 0$, la **clique standard** à n sommets est le graphe $\mathcal{K}_n$ défini par

$$\mathbf{Som}(\mathcal{K}_n) = \{1, \cdots, n\}, \qquad \mathbf{Ar}(\mathcal{K}_n) = \left\{ I \subseteq \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \middle| \sharp(I) = 2 \right\}$$

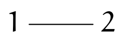
(ii) La **chaîne standard** à n arêtes est le graphe $\mathcal{C}_n$ défini par

$$\mathbf{Som}(\mathcal{C}_n) = \{0, \cdots, n\} \qquad \mathbf{Ar}(\mathcal{C}_n) = \left\{ \{i-1, i\} \middle| i \in \{1, \cdots, n\} \right\}$$

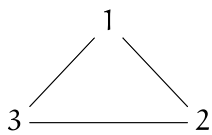
(iii) Si $n > 2$ **le cycle standard** à n sommets est le graphe $\mathcal{Z}_n$ défini par

$$\mathbf{Som}(\mathcal{Z}_n) = \{0, \cdots, n-1\} \qquad \mathbf{Ar}(\mathcal{Z}_n) = \left\{ \{i-1, i\} \middle| i \in \{1, \cdots, n-1\} \right\} \cup \{\{n-1, 0\}\}$$

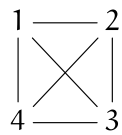
$\mathcal{K}_1$



$\mathcal{K}_2$

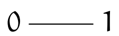


$\mathcal{K}_3$

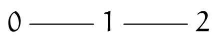


$\mathcal{K}_4$

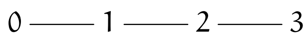
$\mathcal{C}_0$



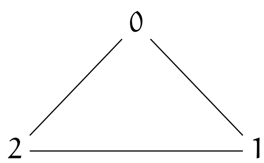
$\mathcal{C}_1$



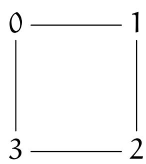
$\mathcal{C}_2$



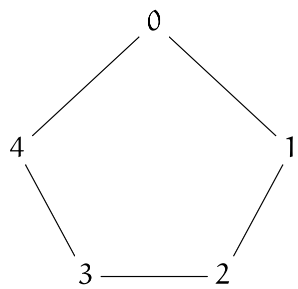
$\mathcal{C}_3$



$\mathcal{Z}_3$



$\mathcal{Z}_4$



$\mathcal{Z}_5$

Ces graphes ont leur analogues dans le cas orienté.

Définition 1.3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $n > 0$, la **clique standard orienté** à n sommets est le graphe, également noté $\mathcal{K}_n$, défini par

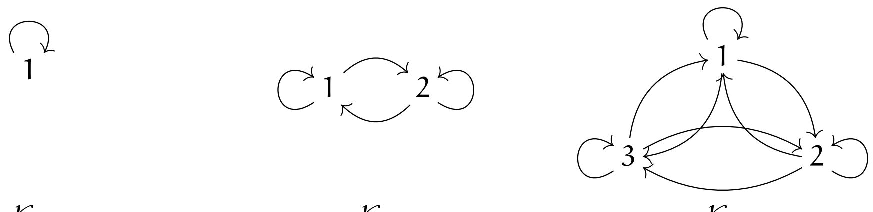
$$\mathbf{Som}(\mathcal{K}_n) = \{1, \cdots, n\}, \qquad \mathbf{Arc}(\mathcal{K}_n) = \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \times \mathbf{Som}(\mathcal{G})$$

(ii) La **chaîne standard orienté** à n arêtes est le graphe, également noté $\mathcal{C}_n$, défini par

$$\mathbf{Som}(\mathcal{C}_n) = \{0, \cdots, n\} \qquad \mathbf{Arc}(\mathcal{C}_n) = \left\{(i-1, i) \middle| i \in \{1, \cdots, n\}\right\}$$

(iii) Si $n > 2$ **le cycle standard orienté** à n sommets est le graphe, également noté $\mathcal{Z}_n$, défini par

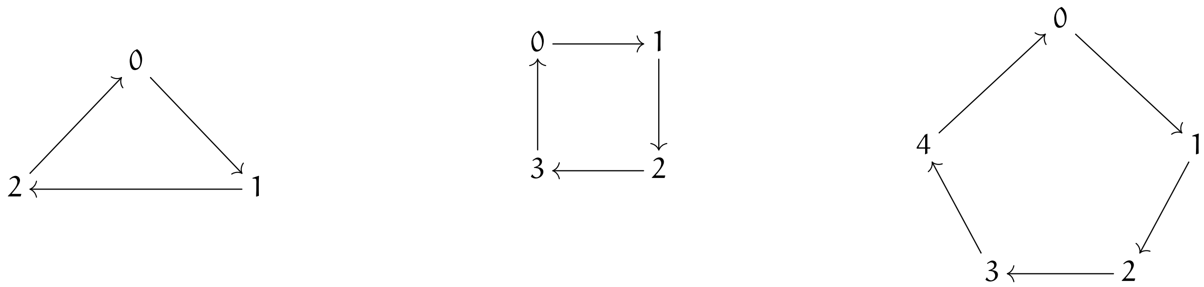
$$\mathbf{Som}(\mathcal{Z}_n) = \{0, \cdots, n-1\} \qquad \mathbf{Arc}(\mathcal{Z}_n) = \left\{(i-1, i) \middle| i \in \{1, \cdots, n-1\}\right\} \cup \{(n-1, 0)\}$$



$\mathcal{K}_1$ $\qquad$ $\mathcal{K}_2$ $\qquad$ $\mathcal{K}_3$ $\qquad$ $\mathcal{K}_4$

$0 \qquad\qquad 0 \longrightarrow 1 \qquad\qquad 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \qquad\qquad 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$

$\mathcal{C}_0$ $\qquad$ $\mathcal{C}_1$ $\qquad$ $\mathcal{C}_2$ $\qquad$ $\mathcal{C}_3$



$\mathcal{Z}_3$ $\qquad$ $\mathcal{Z}_4$ $\qquad$ $\mathcal{Z}_5$

Il existe un type de graphe qui est à la fois orienté et non orienté.

Définition 1.3.3

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Le **stable standard** à n sommets est le graphe $\mathcal{S}_n$ défini par

$$\mathbf{Som}(\mathcal{S}_n) = \{1, \ldots, n\}, \qquad \mathbf{Ar}(\mathcal{S}_n) = \mathbf{Arc}(\mathcal{S}_n) = \varnothing$$

Le stable standard est simplement représenté par ses sommets.

2. Chaines et chemins

2.1 Mots et langage

Définition 2.1.1

On appelle **alphabet** ou **vocabulaire** tout ensemble non vide fini. Les éléments d'un vocabulaire sont appelés **lettres** ou **caractères**.

Par exemple $\Sigma = \{0, 1\}$ défini l'alphabet du langage binaire et 0 et 1 sont les lettres de cet alphabet.

Définition 2.1.2

Soit Σ un alphabet.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. On appelle **mot** de longueur n tout n-uplet $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Sigma^n$. On note plus simplement $a = a_1 \dots a_n$. On note $n = \|a\|$.

(ii) On note ε le mot vide (*i.e.* qui ne contient aucune lettre) ; $\|\varepsilon\| = 0$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Σ^n l'ensemble de tous les mots de longueur n ; en particulier $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$ et $\Sigma^1 = \Sigma$.

(iv) On définit l'**étoile de Kleene** sur Σ, notée Σ^*, comme l'ensemble de tous les mots quelque soit leur longueur.

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$$

Par exemple sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ du langage binaire $\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ et

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, \dots\}$$

Si $\Sigma = \{a\}$ alors $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$.

Définition 2.1.3

Soit Σ un alphabet. Un **langage** sur Σ est une partie de $L(\Sigma)$ de Σ^*. Les éléments de $L(\Sigma)$ sont appelés les **mots du langage**.

Par exemple, toujours avec $\Sigma = \{0, 1\}$, on considère le langage $L(\Sigma)$ formé de tous les mots de Σ^* ne commençant pas par 0 :

$$L(\Sigma) = \{\varepsilon, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \dots\}$$

Concaténation

Étant donné un alphabet Σ on peut effectuer sur les langages les opérations ensemblistes courantes : l'intersection, l'union et la complémentation. On peut également Concaténer les mots.

Définition 2.1.4

Soient α et β deux mots sur un alphabet Σ tel que $\|\alpha\| = n$ et $\|\beta\| = m$. On définit la **Concaténation** de α de β, noté $\alpha \circ \beta$ ou plus simplement $\alpha\beta$ par la règle :

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n + m, \qquad (\alpha\beta)_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k \leqslant n, \\ \beta_{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

on dit que α est le **facteur gauche** ou le **préfixe** de $\alpha\beta$ et β et le **facteur droit** ou le **suffixe**.

Par exemple, sur l'alphabet binaire $001 \circ 101 = 001101$.

Proposition 2.1.5

Pour tout alphabet Σ, la Concaténation définit une opération interne sur Σ^*

$$\begin{array}{rcl} \circ : \Sigma^* \circ \Sigma^* & \longrightarrow & \Sigma^* \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \circ \beta \end{array}$$

satisfaisant :

(Associativité) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*$, $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

(Élément neutre) $\forall \alpha \in \Sigma^*$, $\alpha \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \alpha = \alpha$.

(Longueur) $\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*$, $\|\alpha \circ \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$.

Démonstration. Vérifions l'associativité, le reste est trivial. Notons $\|\alpha\| = n$, $\|\beta\| = m$ et $\|\gamma\| = p$ et fixons un entier $1 \leqslant k \leqslant n + m + p$. Alors

$$((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)_k = \begin{cases} (\alpha \circ \beta)_k & 1 \leqslant k \leqslant n + m \\ \gamma_{k-(n+m)} & n + m + 1 \leqslant k \leqslant n + m + p \end{cases} = \begin{cases} \alpha_k & 1 \leqslant k \leqslant n \\ \beta_{k-n} & n + 1 \leqslant k \leqslant n + m \\ \gamma_{k-(n+m)} & n + m + 1 \leqslant k \leqslant n + m + p \end{cases}$$

$$(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))_k = \begin{cases} \alpha_k & 1 \leqslant k \leqslant n \\ (\beta \circ \gamma)_{k-n} & n + 1 \leqslant k \leqslant n + m + p \end{cases} = \begin{cases} \alpha_k & 1 \leqslant k \leqslant n \\ \beta_{k-n} & n + 1 \leqslant k \leqslant n + m \\ \gamma_{(k-n)-m} & n + m + 1 \leqslant k \leqslant n + m + p \end{cases}$$

On observe que les deux expressions sont identiques (puisque $k - (n + m) = (k - n) - m$). $\square$

Remarque 2.1.6 : La Concaténation n'est pas commutative à moins que Σ ne soit un singleton.

Définition 2.1.7

Soient α et α' deux mots sur un alphabet Σ. On dira que α' est un **sous-mot** de α s'il existe des mots π et σ tel que $\alpha = \pi\alpha'\sigma$

2.2 Chaines

Définition 2.2.1

Soient $\mathcal{G}$ un graphe non orienté (resp. orienté) et $n \in \mathbb{N}$. Une **chaine** ou un **chemin** de longueur n sur $\mathcal{G}$ est un mot $a = a_0 \ldots a_n$ du langage $\mathbf{Chain}_n(\mathcal{G}) \subset (\mathbf{Som}(\mathcal{G}))^{n+1}$ sur l'alphabet $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ défini par la règle :

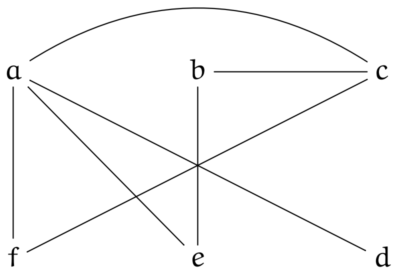
$$\begin{array}{rll} & \forall 0 \leqslant k < n, & \{a_i, a_{i+1}\} \in \mathbf{Ar}(\mathcal{G}) \\ (\text{resp.} & \forall 0 \leqslant k < n, & (a_i, a_{i+1}) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G})) \end{array}$$

La première lettre de la chaine est appelé **l'origine** et la dernière **l'aboutissement**.

On note $\|a\|_{\mathcal{G}} = n$ et $\mathbf{Chain}(\mathcal{G}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Chain}_n(\mathcal{G})$.

Remarque 2.2.2 : Dans la pratique le mot **chaine** est réservé au graphe non orienté. Dans le cas orienté, on parle plus de **chemin**. Dans ce cours, pour simplifier les notations, nous ne ferons pas la distinction.

Remarque 2.2.3 : On prendra garde : malgré le fait qu'une arête est non orienté c'est à dire que $\{a, b\} = \{b, a\}$, il y a une différence entre la chaine ab et la chaine ba, qui sont par définition des éléments du produit cartésien $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) \times \mathbf{Som}(\mathcal{G})$.



Par exemple $acbead$ est une chaine de ce graphe de longueur 5 (et pas 6 ; on compte en fait le nombre d'arête) et $acbeda$ n'est pas une chaine car $\{e, d\}$ n'est pas une arête.

Proposition 2.2.4

Tout sous-mot d'une chaine est une chaine.

Démonstration. Triviale. □

Définition 2.2.5

Une chaine est dite **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

Dans l'exemple précédent, $acbead$ n'est pas une chaine élémentaire puisqu'elle passe deux fois par le somment a.

Proposition 2.2.6

Soit $\mathcal{G}$ un graphe.

(i) Si il existe une chaine entre deux sommets du graphe alors il existe une chaine élémentaire entre ces deux sommets.

(ii) Soit α une chaine élémentaire de $\mathcal{G}$,

$$\|\alpha\|_{\mathcal{G}} \leqslant \sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G})) - 1$$

Démonstration. Le second point est évident : si la longueur de la chaine est strictement supérieur à $\sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G})) - 1$ c'est à dire supérieur ou égale à $\sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G}))$ alors la chaine passe forcement deux fois par le même sommet et ne peut donc pas être élémentaire.

Pour le premier point il suffit d'observer qu'une si une chaine est non élémentaire alors elle passe deux fois par le même sommet et donc elle "boucle". Si on enlève cette boucle on obtient une nouvelle chaine avec la même origine et le même aboutissement mais de longueur strictement inférieur. Si la nouvelle chaine n'est pas élémentaire on recommence le processus. Ces itérations prennent nécessairement fin puisque les longueurs décroissent strictement. □

La concaténation des chaines se réalise comme celle des mots en "fusionnant" aboutissement et origine. Plus précisément :

Définition 2.2.7

Soit $\mathcal{G}$ un graphe. On définit

$$\mathrm{or} : \mathbf{Chain}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \qquad \mathrm{ab} : \mathbf{Chain}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{Som}(\mathcal{G})$$

les fonctions qui associent respectivement l'origine et l'aboutissement d'une chaine.

Par exemple $\mathrm{ab}(abcetgbed) = d$ et $\mathrm{or}(abcetgbed) = a$.

Définition 2.2.8

Soient α et β deux chaines sur un graphe $\mathcal{G}$ de longueur respectives n et m. On dira que α et β sont **concatenables** si $\mathsf{ab}(\alpha) = \mathsf{or}(\beta)$. Dans ce cas on définit la concaténation de α et de β par la règle :

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n+m-1, \qquad (\alpha\beta)_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k < n, \\ \beta_{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prendra garde : l'inégalité est stricte ! Par exemple avec le graphe précédent : $acbe \circ eafc = acbeafc$ (on ne réécrit pas deux fois le sommet e).

Proposition 2.2.9

Soient $\mathcal{G}$ un graphe non orienté, α, β et γ des chaines de $\mathcal{G}$ tel que α soit concaténable à β lui même concaténable à γ. Alors $\alpha\beta$ est concaténable a γ et α est concaténable à $\beta\gamma$. De plus

(Associativité) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(Elément neutre) $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$.

(Longueur) $\|\alpha\beta\|_{\mathcal{G}} = \|\alpha\|_{\mathcal{G}} + \|\beta\|_{\mathcal{G}}$.

Démonstration. Le raisonnement est le même que celui sur les mots. □

Théorème 2.2.10

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}$ un graphe et M sa matrice booléenne.

$$(\exists \alpha \in \mathbf{Chain}_n(\mathcal{G}), \quad \mathsf{or}(\alpha) = a_i \ \wedge \ \mathsf{ab}(\alpha) = a_j) \Longleftrightarrow M^n_{i,j} = 1$$

Autrement dit : il existe une chaine de longueur n entre deux sommets a_i et a_j si et seulement si $M^n_{i,j} = 1$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, le cas initial étant triviale. Supposons que pour un n quelconque fixé la propriété du théorème soit satisfaite et vérifions la au rang $n+1$.

On commence par observer que $M^{n+1} = M \times M^n$, ce produit de matrice se réalisant avec des coefficients dans l'algèbre de Boole $\mathbb{B}$. En particulier, par définition du produit matricielle et par définition des règles de calcul dans $\mathbb{B}$,

$$\begin{aligned} M^{n+1}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} \times M^n_{k,j} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists k_0, \quad M_{i,k_0} \times M^n_{k_0,j} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k_0, \quad M_{i,k_0} = 1 \wedge M^n_{k_0,j} = 1 \end{aligned}$$

Par définition de la matrice booléenne $M_{i,k_0} = 1$ si et seulement si il existe un arc (a_i, a_{k_0}) (ou une arête $\{a_i, a_{k_0}\}$ dans le cas non orienté) et par hypothèse de récurrence $M^n_{k_0,j} = 1$ si et seulement si il existe une chaine de longueur n d'origine a_{k_0} et d'aboutissement a_j. La concaténation permet d'achever cette récurrence. □

2.3 Descendants et ascendants

Définition 2.3.1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et tout $x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})$ on définit

$$\Gamma^{+n}(x, \mathcal{G}) = \left\{ y \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \middle| \exists \alpha \in \mathbf{Chain}_n(\mathcal{G}),\ \mathrm{or}(\alpha) = x \wedge \mathrm{ab}(\alpha) = y \right\}$$

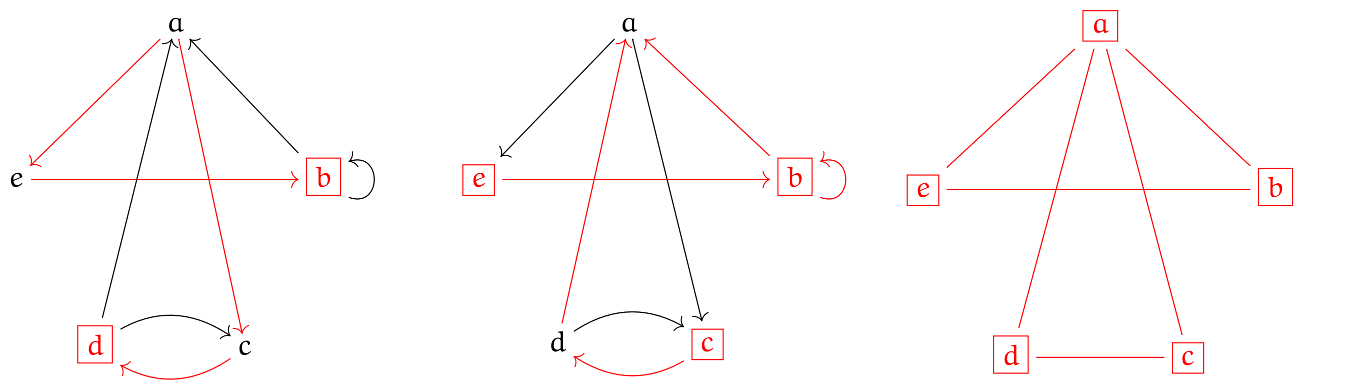
$$\Gamma^{-n}(x, \mathcal{G}) = \left\{ y \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \middle| \exists \alpha \in \mathbf{Chain}_n(\mathcal{G}),\ \mathrm{or}(\alpha) = y \wedge \mathrm{ab}(\alpha) = x \right\}$$

On conviens que $\Gamma^0(x, \mathcal{G}) = \{x\}$.

On pose

$$\Gamma^{+}(x, \mathcal{G}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^{+n}(x, \mathcal{G}), \qquad \Gamma^{-}(x, \mathcal{G}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^{-n}(x, \mathcal{G})$$

Les éléments de $\Gamma^{+n}(x, \mathcal{G})$ correspondent aux sommets du graphe qui sont atteint par des chemins de longueur n d'origine x. Les éléments de $\Gamma^{-n}(x, \mathcal{G})$ correspondent quand à eux aux sommets du graphe qui atteignent x par des chemins de longueur n. Par exemple :



$\Gamma^{+2}(a, \mathcal{G}) = \{b, d\}$ $\qquad$ $\Gamma^{-2}(a, \mathcal{G}) = \{b, c, e\}$ $\qquad$ $\Gamma^{-2}(a, \mathcal{G}) = \Gamma^{+2}(a, \mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e\}$

Définition 2.3.2

Soit x un sommet d'un graphe $\mathcal{G}$.

(i) Les éléments de $\Gamma^{+1}(x, \mathcal{G})$ sont appelés les **successeurs** de x.

(ii) Les éléments de $\Gamma^{-1}(x, \mathcal{G})$ sont appelés les **prédécesseurs** de x.

(iii) Les éléments de $\Gamma^{+}(x, \mathcal{G})$ sont appelés les **descendants** de x.

(iv) Les éléments de $\Gamma^{-}(x, \mathcal{G})$ sont appelés les **ascendants** de x.

Lorsque le graphe est non orienté les notions de prédécesseurs et successeurs coïncident.

Proposition 2.3.3

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}), \qquad \Gamma^{+n}(x, \mathcal{G}) = \Gamma^{-n}(x, \mathcal{G})$$

Démonstration. Triviale. $\square$

Définition 2.3.4

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Les successeurs (et prédécesseurs) sont appelés les **voisins** ou **sommets adjacents** de x.

Proposition 2.3.5

Soient $n \in \mathbb{N}$ et x un sommet d'un graphe $\mathcal{G}$.

$$\Gamma^{\pm(n+1)}(x,\mathcal{G}) = \left\{ y \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \middle| \exists z \in \Gamma^{\pm 1}(x,\mathcal{G}), y \in \Gamma^{\pm n}(z,\mathcal{G}) \right\}$$

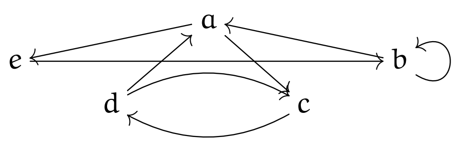
Démonstration. Cela viens du fait que toute chaine de longueur $n+1$ se décompose comme une chaine de longueur 1 concaténée avec une chaine de longueur n. □

De cette proposition on en déduit un algorithme pour déterminer les ensembles $\Gamma^{\pm n}(x,n)$.

§2.3.6 : Algorithme du marquage.

1. `S = `$\{x\}$
2. `Pour une variable entière i allant de `1` à `n
    `On considère `S_{temp}` tous les`
      `* successeurs (si l'on cherche à déterminer `$\Gamma^{+n}(x,\mathcal{G})$`)`
      `* prédécesseurs (si l'on cherche à déterminer `$\Gamma^{-n}(x,\mathcal{G})$`)`
    `des sommets de S.`
    `S = `S_{temp}`.`
  `Fin pour`
3. $\Gamma^{\pm n}(x,\mathcal{G})$` =S.`

Reprenons l'exemple précédent et déterminons $\Gamma^{-3}(a,\mathcal{G})$ avec l'algorithme. On représente les différents états de la variable S dans un tableau.



	a	b	c	d	e
Γ^0					
Γ^{-1}					
Γ^{-2}					
Γ^{-3}					

La condition initial est $S = a$. On marque à la ligne du Γ^0 le sommet a :

	a	b	c	d	e
Γ^0	×				
Γ^{-1}					
Γ^{-2}					
Γ^{-3}					

Pour la ligne suivante, on va marquer tous les prédécesseurs de a.

	a	b	c	d	e
Γ^0	×				
Γ^{-1}		×		×	
Γ^{-2}					
Γ^{-3}					

Pour la ligne suivante, on va marquer tous les prédécesseurs de b et d.

	a	b	c	d	e
Γ^0	×				
Γ^{-1}		×		×	
Γ^{-2}		×	×		×
Γ^{-3}					

Pour finir on marque les prédécesseurs de b, c et e

	a	b	c	d	e
Γ^0	×				
Γ^{-1}		×		×	
Γ^{-2}		×	×		×
Γ^{-3}	×	×		×	×

Finalement $\Gamma^{-3}(a,\mathcal{G}) = \{a,b,d,e\}$.
Pour déterminer $\Gamma^{\pm}(x,\mathcal{G})$ on améliore l'algorithme précédent.

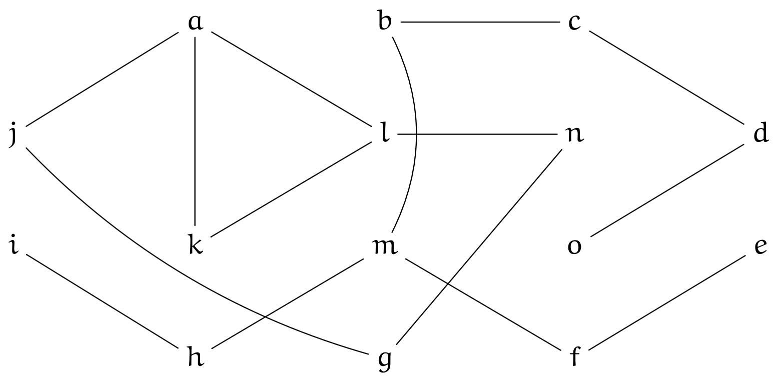
§2.3.7 : Algorithme du marquage +.

1. On marque le sommet x
2. Tant qu'il existe des sommets marqués mais non sélectionnés
    On sélectionne un sommet marqué y et non selectionné.
    On marque tous les
    * successeurs (si l'on cherche à déterminer $\Gamma^{+}(x, \mathcal{G})$)
    * prédécesseurs (si l'on cherche à déterminer $\Gamma^{-}(x, \mathcal{G})$)

    de y.

   Fin tant que
3. $\Gamma^{\pm}(x, \mathcal{G}) =$ les sommets marqués.

Calculons $\Gamma^{+}(a, \mathcal{G})$ pour le graphe non orienté $\mathcal{G}$ suivant



La première étape de l'algorithme reviens à marquer a :

Som($\mathcal{G}$)	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
Marquage	×														

On sélectionne le sommet a et on marque tous les sommets qui lui sont adjacents.

Som($\mathcal{G}$)	$\underline{a}$	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
Marquage	×									×	×	×			

on sélectionne le sommet j et on marque ses sommets adjacents. Et ainsi de proche en proche.

Som($\mathcal{G}$)	$\underline{a}$	b	c	d	e	f	g	h	i	$\underline{j}$	k	l	m	n	o
Marquage	×						×			×	×	×			

Som($\mathcal{G}$)	$\underline{a}$	b	c	d	e	f	$\underline{g}$	h	i	$\underline{j}$	k	l	m	n	o
Marquage	×						×			×	×	×		×	

Som($\mathcal{G}$)	$\underline{a}$	b	c	d	e	f	$\underline{g}$	h	i	$\underline{j}$	$\underline{k}$	l	m	n	o
Marquage	×						×			×	×	×		×	

Som($\mathcal{G}$)	$\underline{a}$	b	c	d	e	f	$\underline{g}$	h	i	$\underline{j}$	$\underline{k}$	$\underline{l}$	m	n	o
Marquage	×						×			×	×	×		×	

Som($\mathcal{G}$)	$\underline{a}$	b	c	d	e	f	$\underline{g}$	h	i	$\underline{j}$	$\underline{k}$	$\underline{l}$	m	$\underline{n}$	o
Marquage	×						×			×	×	×		×	

Le processus s'arrête ici puisque tous les sommets marqués sont sélectionnés ; finalement

$$\Gamma^{+}(a, \mathcal{G}) = \{a, g, j, k, l, n\}$$

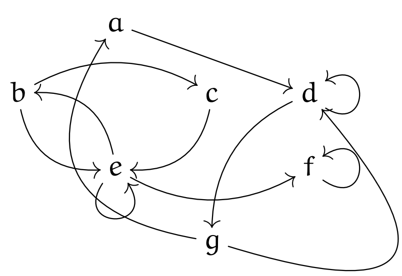
2.4 Connexité

Définition 2.4.1

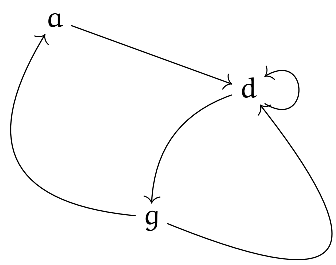
Soit x un sommet d'un graphe $\mathcal{G}$. La **composante connexe** de x est le sous-graphe de $\mathcal{G}$ engendré par $\Gamma^+(x, |\mathcal{G}|) = \Gamma^-(x, |\mathcal{G}|)$. On le note $\mathsf{CC}(x, \mathcal{G})$.

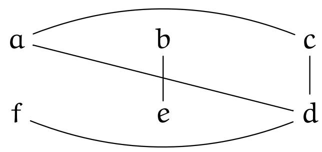
Autrement dis : la composante connexe d'un sommet est le sous-graphe engendré par tous les ascendants ou descendants de ce sommet.

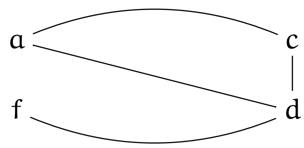
$\mathcal{G}$



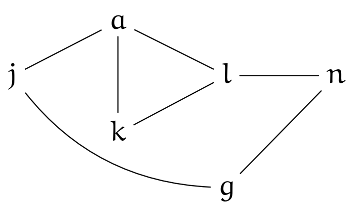
$\mathsf{CC}(d, \mathcal{G})$

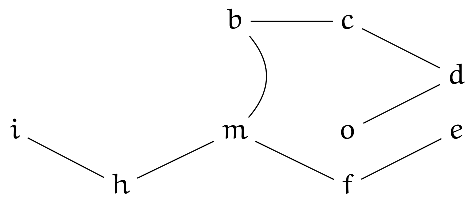






Remarque 2.4.2 : L'algorithme du marquage permet donc de déterminer les composantes connexes d'un graphe. Avec l'exemple développé au paragraphe précédent la composante connexe de a est le sous-graphe engendré par les sommets $\{a, g, j, k, l, n\}$. De la même manière la composante connexe de b est le sous-graphe engendré par les sommets $\{b, c, d, e, f, h, i, m, o\}$





Proposition 2.4.3

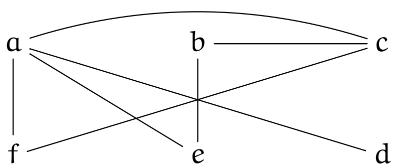
Soient x et y deux sommets d'un graphe $\mathcal{G}$.

$$\mathsf{CC}(x, \mathcal{G}) = \mathsf{CC}(y, \mathcal{G}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\exists \alpha \in \textbf{Chain}(|\mathcal{G}|), \quad \big(\mathsf{or}(\alpha) = x \wedge \mathsf{ab}(\alpha) = y\big)\Big)$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 2.4.4

On dira qu'un graphe est **connexe** s'il ne possède qu'une seul composante connexe.

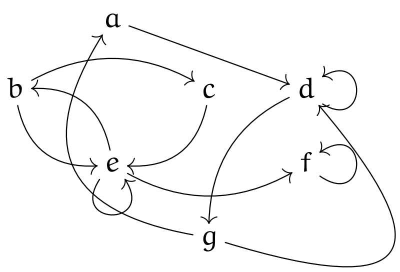


Ce graphe est connexe.

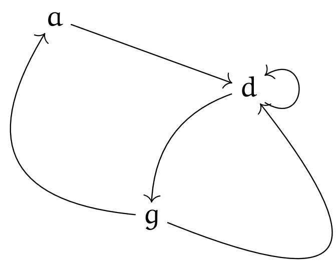
Définition 2.4.5

Soit x un sommet d'un graphe orienté $\mathcal{G}$. La **composante connexe forte** de x est le sous-graphe de $\mathcal{G}$ engendré par $\Gamma^+(x,\mathcal{G}) \cap \Gamma^-(x,\mathcal{G})$. On le note $\mathsf{CCF}(x,\mathcal{G})$.

$\mathcal{G}$



$\mathsf{CCF}(a,\mathcal{G})$



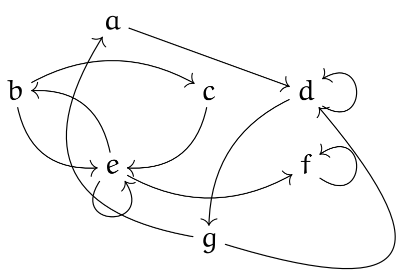
Définition 2.4.6

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté. On définit le **graphe réduit** de $\mathcal{G}$, noté $\mathcal{G}_{\mathrm{red}}$ par :

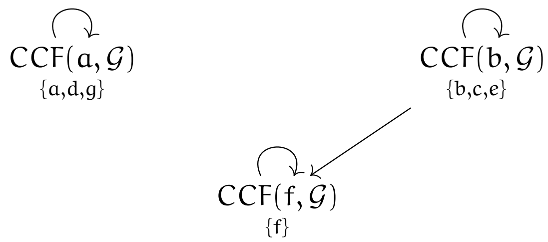
$$\mathbf{Som}(\mathcal{G}_{\mathrm{red}}) = \left\{ \mathsf{CCF}(x,\mathcal{G}) \middle| x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \right\}$$

$$\mathbf{Arc}(\mathcal{G}_{\mathrm{red}}) = \left\{ (I,J) \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}_{\mathrm{red}}) \middle| \mathbf{Arc}(\mathcal{G}) \cap (I \times J) \neq \varnothing \right\}$$

$\mathcal{G}$



$\mathcal{G}_{\mathrm{red}}$



Proposition 2.4.7

Un graphe orienté est connexe si et seulement si son graphe réduit est connexe.

Démonstration. Exercice. □

2.5 Degrés

Définition 2.5.1

Soient $\mathcal{G}$ un graphe et $x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})$. On appelle $d^{+1}(x,\mathcal{G}) = \sharp(\Gamma^{+1}(x,\mathcal{G}))$ le **demi-degré extérieur** de x et $d^{-1}(x,\mathcal{G}) = \sharp(\Gamma^{-1}(x,\mathcal{G}))$ le **demi-degré intérieur** de x.

Lorsque le graphe est non orienté $d^{+1}(x,\mathcal{G}) = d^{-1}(x,\mathcal{G})$ que l'on note simplement $d^1(x,\mathcal{G})$ et que l'on appelle le **degré** de x.

Remarque 2.5.2 : Les demi-degrés représentent les nombres de successeurs et prédécesseurs.

Remarque 2.5.3 : On devine aisément ce que serait les définitions de $d^{+n}(x,\mathcal{G})$, $d^{-n}(x,\mathcal{G})$ et $d^n(x,\mathcal{G})$. Nous ne les utiliserons pas cependant.

Proposition 2.5.4 (Formule des degré)

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté.

$$\sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} d^{+1}(x, \mathcal{G}) = \sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} d^{-1}(x, \mathcal{G}) = \sharp(\mathbf{Arc}(\mathcal{G}))$$

Démonstration. Notons M la matrice booléenne du graphe $\mathcal{G}$, n le nombre de sommet et $\{a_1, \dots, a_n\}$ les sommets.

Le nombre de 1 dans la ligne i indique le nombre de successeurs au sommet a_i et le nombre de 1 dans la colonne j indique le nombre de prédécesseurs au sommet a_j. Autrement $d^{+1}(a_i, \mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}$ et $d^{-1}(a_j, \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}$ où les sommes se réalisent dans $\mathbb{N}$.

On observe de plus que le nombre total de 1 dans la matrice correspond aux nombre d'arc du graphe. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sharp(\mathbf{Arc}(\mathcal{G})) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} d^{+1}(a_i, \mathcal{G}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} M_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} d^{-1}(a_j, \mathcal{G})
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.5 (Formule des degrés)

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté.

$$\sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} d^{1}(x, \mathcal{G}) = 2\sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G}))$$

Démonstration. Soient n le nombre de sommet de $\mathcal{G}$, $\{a_1, \dots, a_n\}$ les sommets de $\mathcal{G}$ et M la matrice booléenne de $\mathcal{G}$. Le nombre de 1 sur la ligne i donne le nombre de sommet adjacent à a_i. Autrement dit $d^1(a_i, \mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}$ où la somme s'effectue dans $\mathbb{N}$ et non dans $\mathbb{B}$. De plus le nombre total de 1 dans la matrice vaut $2\sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G}))$ car si $\{a_i, a_j\}$ est une arête de $\mathcal{G}$ c'est également le cas de $\{a_j, a_i\}$. Alors

$$2\sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G})) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} d^1(a_i, \mathcal{G}).$$

□

Corollaire 2.5.6

Dans un graphe non orienté le nombre de sommet de degré impair est pair.

Démonstration. La somme de tous les degrés d'un graphe non orienté peut se décomposer en la somme des sommets de degré pair plus la somme des sommets de degré impair

$$\sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} d(x, \mathcal{G}) = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \\ d(x,\mathcal{G}) \text{ pair}}} d(x, \mathcal{G}) + \sum_{\substack{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \\ d(x,\mathcal{G}) \text{ impair}}} d(x, \mathcal{G})$$

D'après la proposition précédente cette somme est pair. De plus $\sum_{\substack{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \\ d(x,\mathcal{G}) \text{ pair}}} d(x, \mathcal{G})$ est pair (puisque dans cette somme tous les $d(x, \mathcal{G})$ sont pair) alors nécessairement $\sum_{\substack{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \\ d(x,\mathcal{G}) \text{ impair}}} d(x, \mathcal{G})$ est pair.

Puisque dans cette dernière somme tous les $d(x, \mathcal{G})$ sont impairs ils sont forcement en nombre pair (une somme impair de nombre impair est impair et une somme pair de nombre impair est pair [1]). □

Corollaire 2.5.7

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté connexe,

$$\sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G})) \geqslant \sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G})) - 1$$

Démonstration. Soit $n = \sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G}))$. On va raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{>0}$, le cas initial étant trivial. On observe pour commencer pour tout sommet x de $\mathcal{G}$, $d^1(x, \mathcal{G}) \geqslant 1$ car le graphe est connexe.

- Soit

$$\exists x_0 \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}),\ d^1(x_0, \mathcal{G}) = 1$$

Dans ce cas on considère le graphe $\mathcal{G}'$ défini comme le sous-graphe de $\mathcal{G}$ engendré par $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) - \{x_0\}$ qui est connexe par construction.

$$\begin{array}{rcl} \sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G})) & = & \sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G}')) + 1 \\ & \geqslant & \sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G}')) - 1 + 1 \\ & \geqslant & \underbrace{\sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G}')) + 1} - 1 \\ & \geqslant & \sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G})) - 1. \end{array}$$

- Soit

$$\neg(\exists x_0 \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}),\ d^1(x_0, \mathcal{G}) = 1) = (\forall x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}),\ d^1(x, \mathcal{G}) > 1) = (\forall x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}),\ d^1(x, \mathcal{G}) \geqslant 2)$$

Dans ce cas, en utilisant la formule des degrés,

$$\begin{array}{rcl} \sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G})) & = & \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} d^1(x, \mathcal{G}) \\ & \geqslant & \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} 2 \\ & \geqslant & \sum_{x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})} 1 \\ & \geqslant & \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \\ & \geqslant & \mathbf{Som}(\mathcal{G}) - 1 \end{array}$$

□

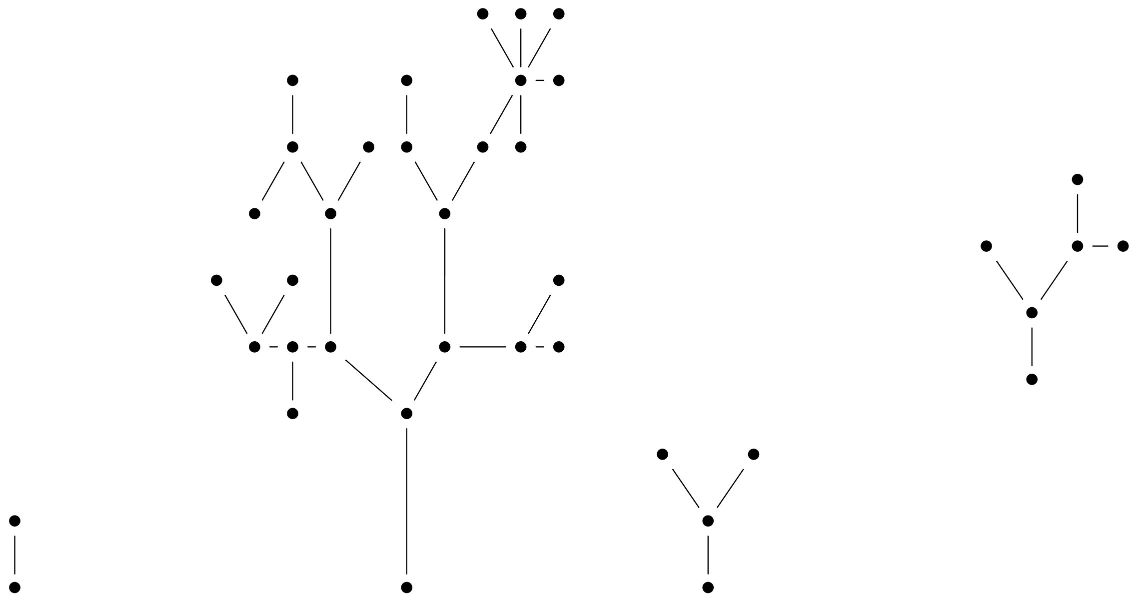
1. Et une somme impair de nombre pair élevé à une puissance pair puis divisée par la moitié d'elle même donne un nombre dont le quart du double vaut 1.

Définition 2.5.8

(i) On dira qu'un graphe non orienté connexe $\mathcal{G}$ est un **arbre** si $\sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbf{Som}(\mathcal{G})) - 1$.

(ii) Un graphe non orienté sera une **forêt** si chacune de ses composantes connexes est un arbre.

Voici une forêt.



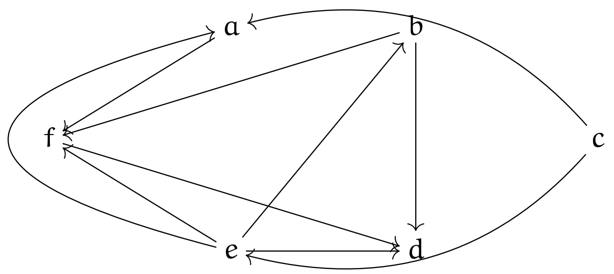
Définition 2.5.9

Soit $\mathcal{G}$ un graphe.

(i) On dira que $\mathcal{G}$ **possède un circuit** s'il existe $\alpha \in \mathbf{Chain}(\mathcal{G})$ tel que $\|\alpha\| > 0$ et $\mathrm{or}(\alpha) = \mathrm{ab}(\alpha)$.

(ii) Dans le cas contraire on dira que le graphe est **sans circuit**.

Un circuit correspond à une chaine "qui boucle".



Ce graphe est sans circuit.

Définition 2.5.10

Une chaine **eulérienne** d'un graphe $\mathcal{G}$ est une chaine qui passe une et une seule fois par toutes les arêtes (ou arc) de $\mathcal{G}$.
Un circuit **eulérien** d'un graphe est une chaine eulérienne qui est un circuit.

Théorème 2.5.11

Un graphe connexe admet un circuit eulérien si et seulement si :

Cas non orienté : pour tous les sommets x de $\mathcal{G}$, $d^1(x, \mathcal{G})$ est paire.

Cas orienté : pour tout les sommets x de $\mathcal{G}$, $d^{+1}(x, \mathcal{G}) = d^{-1}(x, \mathcal{G})$.

Corollaire 2.5.12

Soient a et b deux sommets d'un graphe connexe $\mathcal{G}$. Il existe une chaine eulérienne entre a et b si et seulement

Cas non orienté : $d^1(a, \mathcal{G})$ et $d^1(b, \mathcal{G})$ sont impaires et les degrés de tous les autres sommets sont paires.

Cas orienté : $d^{+1}(a, \mathcal{G}) = d^{-1}(a, \mathcal{G}) + 1$, $d^{+1}(b, \mathcal{G}) = d^{-1}(b, \mathcal{G}) - 1$ et pour tout $x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) - \{a, b\}$, $d^{+1}(x, \mathcal{G}) = d^{-1}(x, \mathcal{G})$.

3.1 Coloriage de graphes

Définition 3.1.1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Le **nombre chromatique** de $\mathcal{G}$, noté $X(\mathcal{G})$, est le plus petit nombre de couleur différentes nécessaire pour colorier les sommets de $\mathcal{G}$ de telle sorte qu'une même couleur ne soit pas attribuée à deux sommets adjacents.

Proposition 3.1.2

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ des graphes non orientés et $n \in \mathbb{N}_{>0}$

(i) Si $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ alors $X(\mathcal{G}') \leqslant X(\mathcal{G})$.

(ii) $X(\mathcal{K}_n) = n$.

(iii) $X(\mathcal{C}_n) = 2$.

(iv) $X(\mathcal{Z}_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$

(v) $X(\mathcal{S}_n) = 1$.

Démonstration. Exercice. □

L'**algorithme de Brélaz ou** `DSATUR` permet de colorier un graphe et de donner une bonne borne supérieur du nombre chromatique.

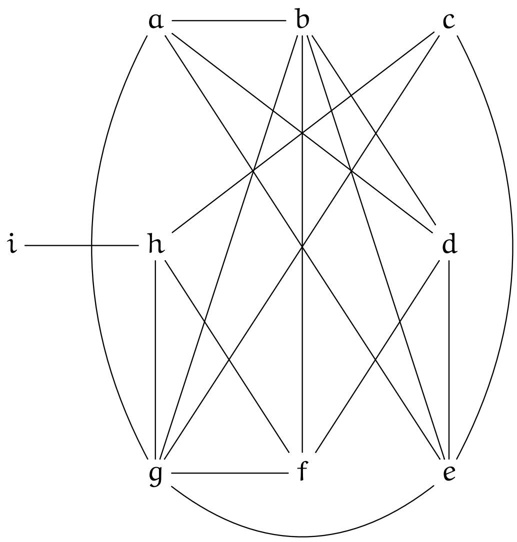
On considère que les couleurs sont numérotées : 1, 2, 3, 4, ... Voici les étapes de l'algorithme.

§3.1.3 : Algorithme de Brélaz

```
1. Initialisation

      Pour chaque sommet x
         DSAT[x] = degré de x
      Fin pour

2. Itérations

      Tant que il existe des sommets non coloriés
         Pour chaque sommet x non colorié
            Si aucun voisin de x n'est colorié
               DSAT(x) = degré de x = nombre de voisin de x.
            sinon
               DSAT(x) = nombre de sommet adjacent de x qui sont coloriés.
            Fin si
         Fin pour

         On choisit un sommet x non colorié tel que DSAT(x) soit le plus grand.
         Si il y a conflit, on choisit le sommet qui a en plus le degré maximal.

         On colorie le sommet avec la plus petite couleur possible.

      Fin tant que
```

Détaillons un exemple

Considérons le graphe suivant



On commence par calculer les degrés de chaque sommet

Som$(\mathcal{G})$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$d^1(x,\mathcal{G})$	4	5	3	4	5	4	6	4	1

On va ensuite compléter le tableau suivant où l'on a ordonner les sommets par degré croissant.

Som$(\mathcal{G})$	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$									
DSAT$(x)_3$									
DSAT$(x)_4$									
DSAT$(x)_5$									
DSAT$(x)_6$									
DSAT$(x)_7$									
DSAT$(x)_8$									
DSAT$(x)_9$									
COULEUR									

Il y a autant de ligne que le sommet. La ligne DSAT$(x)_1$ correspond aux degrés puisqu'aucun sommet n'est colorié.

On choisi donc toujours le sommet non colorié avec le plus grand DSAT et le plus à gauche (en cas d'égalité). Le premier sommet à être colorié est g. On lui attribue la plus petite couleur possible et on recalcule DSAT(x) (dans la ligne DSAT$(x)_2$) pour chaque sommet x non colorié.

Som$(\mathcal{G})$	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	■	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	■								
DSAT$(x)_4$	■								
DSAT$(x)_5$	■								
DSAT$(x)_6$	■								
DSAT$(x)_7$	■								
DSAT$(x)_8$	■								
DSAT$(x)_9$	■								
COULEUR	1								

Le DSAT maximal est celui du sommet d. On le colorie avec la couleur 1 également puisque cela est possible. On complète le tableau

Som$(\mathcal{G})$	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	■	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	■	2	2	2	■	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	■				■				
DSAT$(x)_5$	■				■				
DSAT$(x)_6$	■				■				
DSAT$(x)_7$	■				■				
DSAT$(x)_8$	■				■				
DSAT$(x)_9$	■				■				
COULEUR	1				1				

A l'étape suivante il y a conflit : deux sommets ont un DSAT maximal. On choisi alors celui qui est le plus à gauche dans le tableau. Il s'agit donc du sommet b. Ce sommet étant adjacent aux sommets g et d coloriés avec la couleur 1, on le colorie avec la couleur 2.

Som$(\mathcal{G})$	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	■	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	■	2	2	2	■	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	■	■	3	3	■	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	■	■			■				
DSAT$(x)_6$	■	■			■				
DSAT$(x)_7$	■	■			■				
DSAT$(x)_8$	■	■			■				
DSAT$(x)_9$	■	■			■				
COULEUR	1	2			1				

Viens ensuite le sommet e qui est adjacent à g et à b ; il faut donc le colorier avec la couleur 3

Som($\mathcal{G}$)	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	🟥	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	🟥	2	2	2	🟥	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	🟥	🟦	3	3	🟥	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	🟥	🟦	🟩	4	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_6$	🟥	🟦	🟩		🟥				
DSAT$(x)_7$	🟥	🟦	🟩		🟥				
DSAT$(x)_8$	🟥	🟦	🟩		🟥				
DSAT$(x)_9$	🟥	🟦	🟩		🟥				
COULEUR	1	2	3		1				

Viens ensuite le sommet a qui a g, b et e comme sommet adjacents ; on le colorie avec la couleur 4.

Som($\mathcal{G}$)	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	🟥	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	🟥	2	2	2	🟥	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	🟥	🟦	3	3	🟥	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	🟥	🟦	🟩	4	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_6$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_7$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥				
DSAT$(x)_8$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥				
DSAT$(x)_9$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥				
COULEUR	1	2	3	4	1				

Le sommet f est adjacent à g et à b mais pas à e ; on le colorie donc avec la couleur 3.

Som($\mathcal{G}$)	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	🟥	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	🟥	2	2	2	🟥	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	🟥	🟦	3	3	🟥	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	🟥	🟦	🟩	4	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_6$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_7$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	2	2	1
DSAT$(x)_8$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩			
DSAT$(x)_9$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩			
COULEUR	1	2	3	4	1	3			

Le sommet h est adjacent à g mais pas à b ; on le colorie avec la couleur 2.

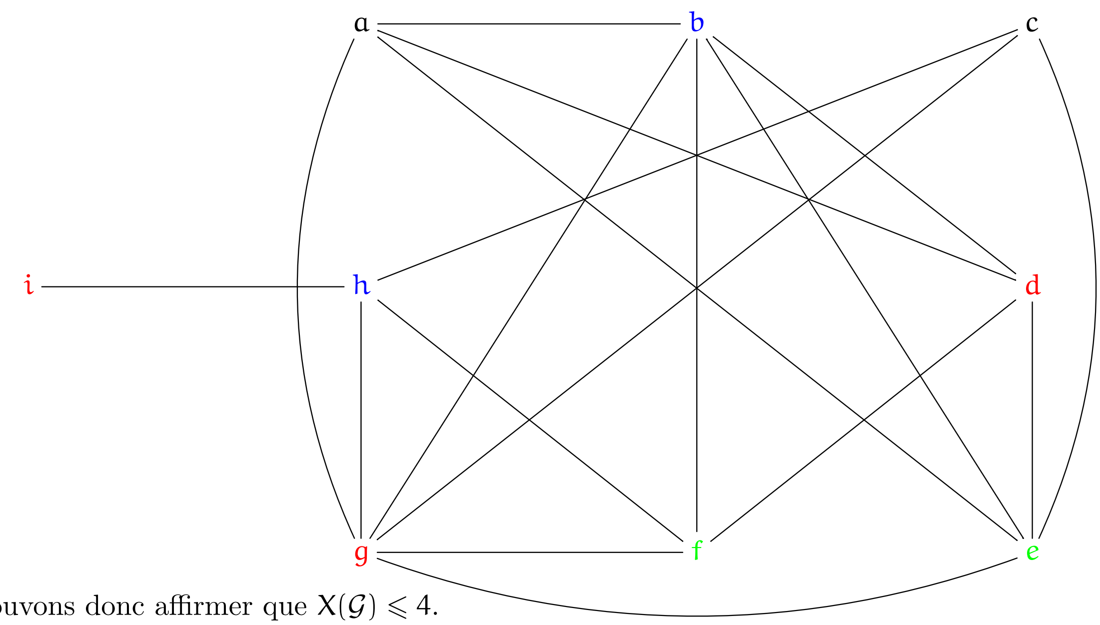
Som($\mathcal{G}$)	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	🟥	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	🟥	2	2	2	🟥	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	🟥	🟦	3	3	🟥	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	🟥	🟦	🟩	4	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_6$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_7$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	2	2	1
DSAT$(x)_8$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	🟦	3	1
DSAT$(x)_9$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	🟦		
COULEUR	1	2	3	4	1	3	2		

Puisque le sommet c est adjacent aux sommet g, h et e on le colorie avec la couleur 4.

Som($\mathcal{G}$)	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	🟥	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	🟥	2	2	2	🟥	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	🟥	🟦	3	3	🟥	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	🟥	🟦	🟩	4	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_6$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_7$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	2	2	1
DSAT$(x)_8$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	🟦	3	1
DSAT$(x)_9$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	🟦	⬛	1
COULEUR	1	2	3	4	1	3	2	4	

Et pour finir la couleur 1 convient au dernier sommet non colorié : i.

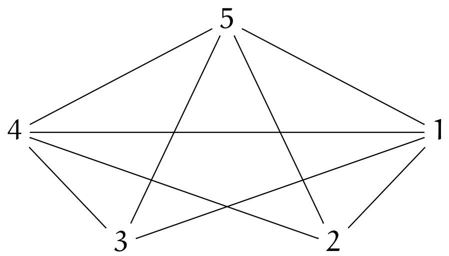
Som($\mathcal{G}$)	g	b	e	a	d	f	h	c	i
DSAT$(x)_1$	6	5	5	4	4	4	4	3	1
DSAT$(x)_2$	🟥	1	1	1	4	1	1	1	1
DSAT$(x)_3$	🟥	2	2	2	🟥	2	1	1	1
DSAT$(x)_4$	🟥	🟦	3	3	🟥	3	1	1	1
DSAT$(x)_5$	🟥	🟦	🟩	4	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_6$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	3	1	2	1
DSAT$(x)_7$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	2	2	1
DSAT$(x)_8$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	🟦	3	1
DSAT$(x)_9$	🟥	🟦	🟩	⬛	🟥	🟩	🟦	⬛	1
COULEUR	1	2	3	4	1	3	2	4	1



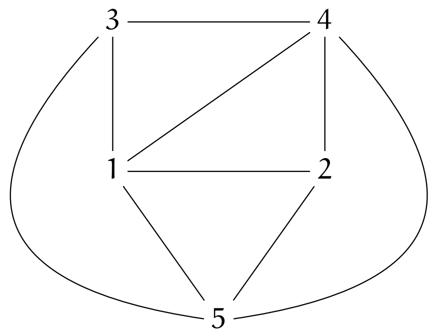
Nous pouvons donc affirmer que $\chi(\mathcal{G}) \leqslant 4$.
En fait $\chi(\mathcal{G}) = 4$. En effet $\mathcal{K}_4 \subset \mathcal{G}$ donc $4 = \chi(\mathcal{K}_4) \leqslant \chi(\mathcal{G}) \leqslant 4$ et ces inégalités sont des égalités.

Définition 3.1.4

On appelle **graphe planaire** tout graphe non orienté pouvant être dessiné sur un plan de telle sorte que les sommets soient des points distincts, et que les arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités (les arêtes pouvant être représentées par des courbes).



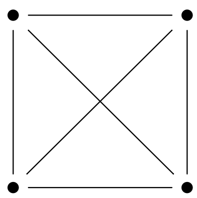
Ce graphe est planaire ; en effet en réarrangeant ses sommets et en traçant les arêtes astucieusement il est équivalant au graphe de droite.

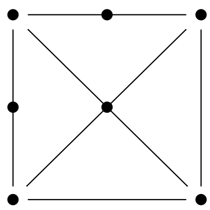


Définition 3.1.5

On dira que deux graphes non orienté sont **homéomorphes** si l'on peut passer de l'un à l'autre en divisant des arêtes à l'aide de sommet supplémentaire.

Par exemple les deux graphes suivants sont homéomorphes :

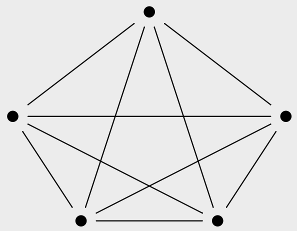




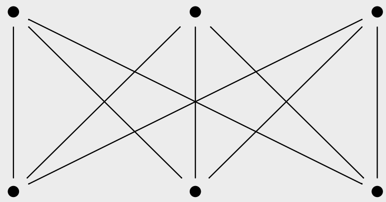
Le théorème suivant permet de repérer si un graphe est planaire.

Théorème 3.1.6 (Kuratowski)

Un graphe non orienté est non planaire si et seulement s'il possède un sous-graphe homéomorphe à



$\mathcal{K}_5$



$\mathcal{K}_{3,3}$

Il existe une caractérisation plus faible des graphes planaires.

Proposition 3.1.7

Pour tout graphe planaire $\mathcal{G}$ connexe possédant plus de 3 sommets,

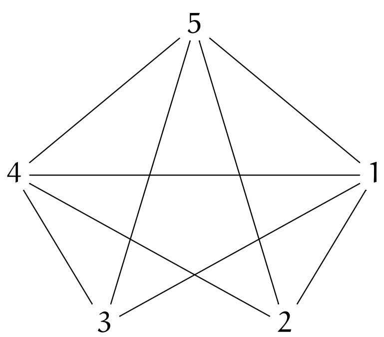
$$\mathbf{Ar}(\mathcal{G}) \leqslant 3\mathbf{Som}(\mathcal{G}) - 6$$

Voici un algorithme permettant, assez souvent, de planarifier [2] un graphe.

§3.1.8 : Algorithme de planarification.

```
n = le nombre d'intersection entre les arêtes de G.
Tant que n>0
   Pour chaque sommet x de G
      di(x) = le nombre d'intersection que compte les arêtes issues de x.
   Fin pour
   x  = le sommet tel que di(x) est maximal.
   x' = l'isobarycentre des voisins de x.
   G' = le graphe G ou l'on a déplacer le sommet x en x'.
   n' = le nombre d'intersection entre les arêtes de G'.
   Si x=x'
      Fin de l'algorithme
   Fin si
   Si n' < n
      Remplacer G par G' et n par n'
   Fin si
Fin tant que
```

Par exemple :

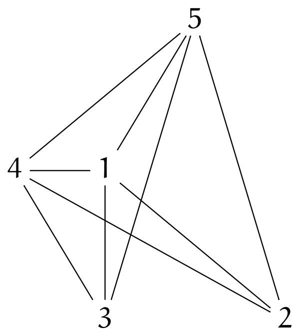


Nombre d'intersection entre arêtes : 5.

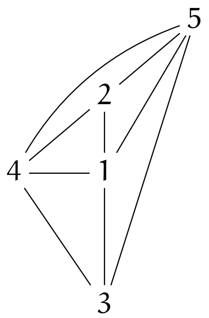
Sommet	1	2	3	4	5
di	4	4	4	4	4

On sélectionne le sommet 1 qui admet 2, 3, 4 et 5 comme voisin. On place donc le sommet 1 au milieu du quadrilatère 2345.

2. Toi aussi ! Invente des mots !



Nombre d'intersection entre arêtes : 3.



Sommet	1	2	3	4	5
di	2	3	3	2	2

En arquant l'arête $\{2;4\}$ les degrés d'intersections seraient respectivement 1, 1, 1, 0, 1. Dans ce cas il ne faut pas sélectionner le sommet 1 qui a déjà été sélectionné à l'itération précédente.

On sélectionne le sommet 2 qui admet 1, 4 et 5 comme voisin. On place donc le sommet 2 au milieu du triangle 145.

Nombre d'intersection entre arêtes : 0.

Sommet	1	2	3	4	5
di	0	0	0	0	0

Fin.

Théorème 3.1.9 (Théorème des 4 couleurs)

Pour tout graphe planaire $\mathcal{G}$,

$$\chi(\mathcal{G}) \leqslant 4$$

Le théorème des 4 couleurs fut d'abord conjecturer en 1852 par Francis Guthrie intéressé par la coloration de la carte d'Angleterre : il est possible, en n'utilisant que quatre couleurs différentes, de colorier n'importe quelle carte découpée en régions, de sorte que deux régions adjacentes, c'est-à-dire ayant toute une frontière (et non simplement un point) en commun reçoivent toujours deux couleurs distinctes.

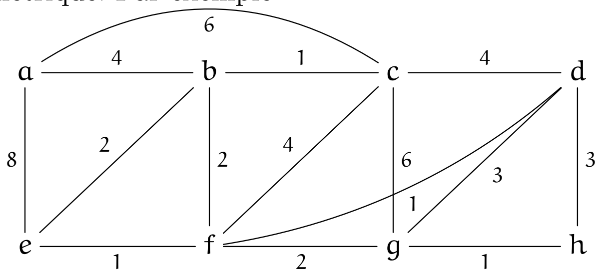
Presque 30 ans plus tard une preuve est publié mais on se rendra compte 10 après qu'elle est fausse et qu'elle prouve plutôt un *théorème des 5 couleurs*. Il faudra attendre 1976 et l'avènement de l'ère informatique pour qu'une preuve sérieuse soit publié par deux Américains, Kenneth Appel et Wolfgang Haken. Leur preuve consiste à diviser le problème des 4 couleurs en 1478 problèmes que l'on peut résoudre par ordinateur (et 1200 heures de calcul). A l'époque leur démonstration partageait la communauté scientifique : quel crédit accorder à une preuve réalisée par ordinateur ?

Aujourd'hui il n'existe toujours aucune preuve de ce théorème n'utilisant pas l'outil informatique.

3.2 Solution de Dijkstra

> **Définition 3.2.1**
>
> Soit $\mathcal{G}$ un graphe. Une **métrique** ou une **valuation** sur $\mathcal{G}$ est une application
>
> $$\lambda : \mathbf{Ar}(\mathcal{G}) \longrightarrow]0;+\infty[$$
>
> On dira que le couple $(\mathcal{G},\lambda)$ est un **graphe métrique** ou **graphe valué** (orienté ou non orienté).

Dans la pratique on représente un graphe métrique en indiquant sur chaque arête la valeur de la métrique. Par exemple



Étant donné un graphe métrique, **la solution de Dijkstra** permet de déterminer la chaine la plus courte (au sens de la métrique) reliant un sommet fixé à tous les autres sommets du graphe.

§3.2.2 : Solution de Dijkstra (partant d'un sommet x).

```
 1. Initialisation
        d_min(x)=0;
        sommet_proche(x)={};
        Pour tous les sommets y différent de x
           d_min(y)=+∞;
           sommet_proche(y)={};
        Fin pour
2.
        Tant qu'il existe des sommets non marqués
           On marque un sommet y non marqué tel que d_min(y)
           soit le plus petit possible.
           Pour tout sommet z non marqué et successeur/voisin à y
              Si d_min(z) > d_min(y)+λ({y,z})
                 d_min(z) = d_min(y)+λ({y,z});
                 sommet_proche(z) = y;
              Fin si
           Fin pour
        Fin tant que
```

Faisons tourner cet algorithme sur le graphe métrique précédent. On présente les variables de l'algorithme dans un tableau que l'on complète au fur et à mesure.

	a	b	c	d	e	f	g	h
Init								

Initialisons les variables en convenant de laisser les cases vides lorsqu'elles valent $+\infty$:

	a	b	c	d	e	f	g	h
Init	0							

Les valeurs de chaque ligne représente le `d_min`.

L'algorithme nous indique qu'il faut choisir celui qui à le plus petit à chaque étape (`ie` à chaque ligne). On encadre le sommet sélectionné, ici $\mathtt{a}$, ce qui permet d'identifier son `sommet_proche`. Le sommet ayant été sélectionné, on supprime (raye) les cases de la colonne $\mathtt{a}$.

	a	b	c	d	e	f	g	h
Init	$\boxed{0}$							
a	X							
	X							
	X							
	X							
	X							
	X							
	X							

On complète la nouvelle ligne concernant le sommet sélectionné, c'est à dire $\mathtt{a}$. Ses sommets adjacents sont $\mathtt{b}$, $\mathtt{c}$ et $\mathtt{e}$.

- Puisque `d_min(b) > d_min(a)`+$\lambda(\{a,b\})$ ($+\infty > 0+4$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{b}$.
- Puisque `d_min(c) > d_min(a)`+$\lambda(\{a,c\})$ ($+\infty > 0+6$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{c}$.
- Puisque `d_min(e) > d_min(a)`+$\lambda(\{a,e\})$ ($+\infty > 0+8$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{e}$.

	a	b	c	d	e	f	g	h
Init	$\boxed{0}$							
a	X	4	6		8			
	X							
	X							
	X							
	X							
	X							
	X							

Le sommet au `d_min` minimal non sélectionné est $\mathtt{b}$. La nouvelle ligne sera donc $\mathtt{b}$, on raye la valeur dans la colonne du sommet $\mathtt{b}$ et on remplis la nouvelle ligne. Ses sommets adjacents non sélectionnés sont $\mathtt{c}$, $\mathtt{e}$ et $\mathtt{f}$.

- Puisque `d_min(f) > d_min(b)`+$\lambda(\{b,f\})$ ($+\infty > 4+2$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{f}$.
- Puisque `d_min(e) > d_min(b)`+$\lambda(\{b,e\})$ ($8 > 4+2$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{e}$.
- Puisque `d_min(c) > d_min(b)`+$\lambda(\{b,c\})$ ($6 > 4+1$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{c}$.

	a	b	c	d	e	f	g	h
Init	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	5		6	6		
	X	X						
	X	X						
	X	X						
	X	X						
	X	X						

Le sommet au `d_min` minimal non sélectionné est $\mathtt{c}$. Ses sommets adjacents non sélectionnés sont $\mathtt{d}$, $\mathtt{f}$ et $\mathtt{g}$.

- Puisque `d_min(d) > d_min(c)`+$\lambda(\{c,d\})$ ($+\infty > 5+4$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{d}$.
- Puisque `d_min(f)` $\leqslant$ `d_min(c)`+$\lambda(\{c,f\})$ ($6 \leqslant 5+4$) on ne modifie pas la colonne du sommet $\mathtt{f}$.
- Puisque `d_min(g) > d_min(c)`+$\lambda(\{c,g\})$ ($+\infty > 5+6$) on modifie la colonne du sommet $\mathtt{g}$.

	a	b	c	d	e	f	g	h
Init	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{5}$		6	6		
c	X	X	X	9	6	6	11	
	X	X	X					
	X	X	X					
	X	X	X					
	X	X	X					

Le sommet au `d_min` minimal non sélectionné est $\mathtt{e}$ (on aurait pu choisir $\mathtt{f}$; un tel choix ne change en rien le résultat final). Son sommet adjacent non sélectionné est $\mathtt{f}$.

- Puisque `d_min(f)` $\leqslant$ `d_min(e)`+$\lambda(\{e,f\})$ ($6 \leqslant 6+1$) on ne modifie pas la colonne du sommet $\mathtt{f}$.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{5}$		$\boxed{6}$	6		
c	X	X	X	9	6	6	11	
e	X	X	X	9	X	6	11	
	X	X	X		X			
	X	X	X		X			
	X	X	X		X			

Nous avons sélectionné le sommet e mais encadré son `d_min` dans la ligne du sommet b. Il faut en effet choisir la première occurrence de son `d_min` dans la colonne car l'encadrement permet aussi de garder en mémoire la valeur de `sommet_proche`

Le sommet au `d_min` minimal non sélectionné est f. Ses sommets adjacents non sélectionnés sont d et g.

- Puisque `d_min(d) > d_min(f)+`$\lambda(\{f, d\})$ ($9 \leqslant 6+1$) on modifie la colonne du sommet d.
- Puisque `d_min(g) > d_min(f)+`$\lambda(\{f, g\})$ ($11 \leqslant 6+2$) on modifie la colonne du sommet g.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{5}$		$\boxed{6}$	$\boxed{6}$		
c	X	X	X	9	6	6	11	
e	X	X	X	9	X	6	11	
f	X	X	X	7	X	X	8	
	X	X	X		X	X		
	X	X	X		X	X		

Le sommet au `d_min` minimal non sélectionné est d. Ses sommets adjacents non marqués sont g et h.

- Puisque `d_min(h) > d_min(d)+`$\lambda(\{d, h\})$ ($+\infty > 7+3$) on modifie la colonne du sommet h.
- Puisque `d_min(g)` $\leqslant$ `d_min(d)+`$\lambda(\{d, g\})$ ($8 \leqslant 7+3$) on ne modifie pas la colonne du sommet g.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{5}$		$\boxed{6}$	$\boxed{6}$		
c	X	X	X	9	6	6	11	
e	X	X	X	9	X	6	11	
f	X	X	X	$\boxed{7}$	X	X	8	
d	X	X	X	X	X	X	8	10
	X	X	X	X	X	X		

Le sommet au `d_min` minimal non sélectionné est g. On le marque. Son sommet adjacent non marqué est h.

- Puisque `d_min(h) > d_min(g)+`$\lambda(\{g, h\})$ ($10 > 8+1$) on modifie la colonne du sommet h.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{5}$		$\boxed{6}$	$\boxed{6}$		
c	X	X	X	9	6	6	11	
e	X	X	X	9	X	6	11	
f	X	X	X	$\boxed{7}$	X	X	$\boxed{8}$	
d	X	X	X	X	X	X	8	10
g	X	X	X	X	X	X	X	9

Le dernier sommet non marqué est h qui n'a pas de sommet adjacent.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{5}$		$\boxed{6}$	$\boxed{6}$		
c	X	X	X	9	6	6	11	
e	X	X	X	9	X	6	11	
f	X	X	X	$\boxed{7}$	X	X	$\boxed{8}$	
d	X	X	X	X	X	X	8	10
g	X	X	X	X	X	X	X	$\boxed{9}$

Interprétation : le chemin le plus court au sens de la métrique du graphe entre $\mathtt{a}$ et $\mathtt{h}$ (par exemple) est de longueur 9. Il s'agit de la valeur encadrée dans la colonne $\mathtt{h}$. Le sommet le plus proche pour arriver à $\mathtt{h}$ est le sommet $\mathtt{g}$ (ligne de la valeur encadrée dans la colonne du $\mathtt{h}$). Pur atteindre le sommet $\mathtt{g}$, la distance minimal est de 8 en passant par $\mathtt{f}$, pour $\mathtt{f}$ il faut passer par $\mathtt{b}$ et $\mathtt{b}$ c'est par $\mathtt{a}$. Ainsi le chemin le plus court entre $\mathtt{a}$ est $\mathtt{h}$ est $\mathtt{abfgh}$.

De même pour les autres sommets. Les plus courtes chaines sont donc

$$\mathtt{a}, \quad \mathtt{ab}, \quad \mathtt{abc}, \quad \mathtt{abfd}, \quad \mathtt{abe}, \quad \mathtt{abfg}, \quad \mathtt{abfgh}$$

3.3 Arbres couvrant de poids minimum

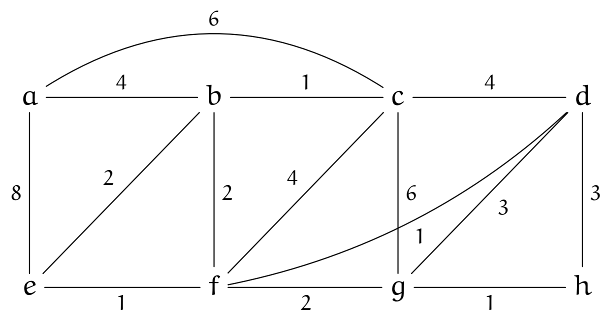
Définition 3.3.1

Soit $(\mathcal{G}, \lambda)$ un graphe métrique non orienté.

- Un **arbre couvrant** de $\mathcal{G}$ est un sous graphe $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G}'$ soit un arbre et $\mathbf{Som}(\mathcal{G}') = \mathbf{Som}(\mathcal{G})$.
- Soit $\mathcal{G}'$ un arbre couvrant de $\mathcal{G}$. Le **poids** de $\mathcal{G}'$ est la somme des valuations de ses arêtes. On le note $P(\mathcal{G}')$.

$$P(\mathcal{G}') = \sum_{\{x,y\} \in \mathbf{Ar}(\mathcal{G}')} \lambda(\{x, y\})$$

Considérons 8 villes dont certaines sont reliées entre elles par de petites routes de terre



où la métrique représente la distance en kilomètre qui sépare les villes.

Le gouvernement souhaite construire des routes entre ces villes en goudronnant les chemins de terre. Ce projet est soumis à deux contraintes :

— Chaque ville doit avoir au moins une route goudronnée.

— Minimiser le prix de construction sachant qu'un kilomètre de goudronnage coute 10000€.

Le premier point sera satisfait, si on parvient à trouver un arbre couvrant. Pour satisfaire le second point il faudra que cet arbre soit de poids minimum.

Algorithme de Kruskal

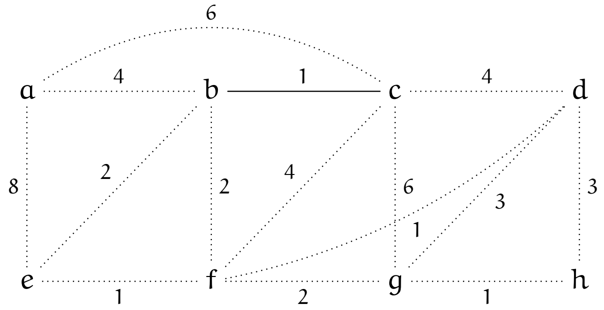
Cet algorithme permet de déterminer un arbre couvrant en parcourant le graphe par ses arêtes.

§3.3.2 : Algorithme de Kruskal (on ne décrit les graphes que par leur arêtes).

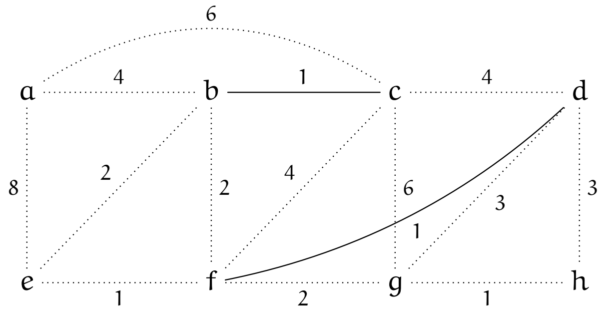
```
A = l'ensemble des arêtes de G
F = ∅
Tant que A ≠ ∅
      a = élément de A tel que λ(a) soit minimal.
      A = A − {a}.
      Si F ∪ {a} est sans circuit
         F = F ∪ {a}
      Fin si
Fin tant que
Solution = F.
```

Appliquons cette méthode avec le graphe de l'exemple.

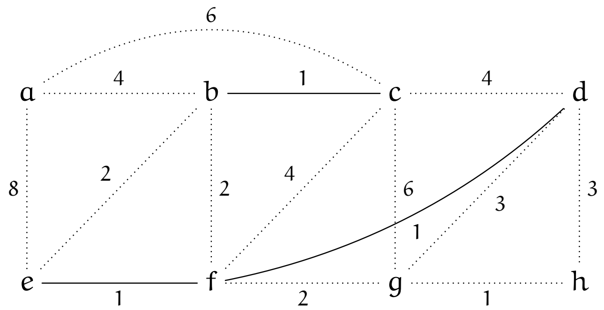
- Arête $\{b, c\}$



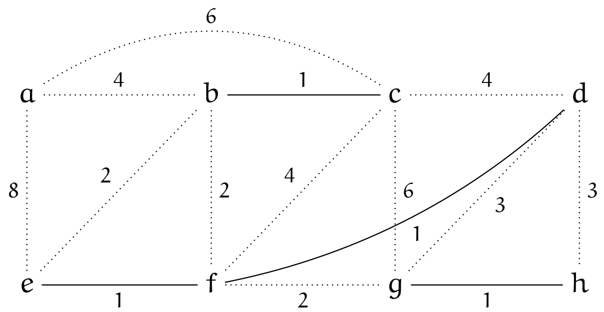
- Arête $\{d, f\}$



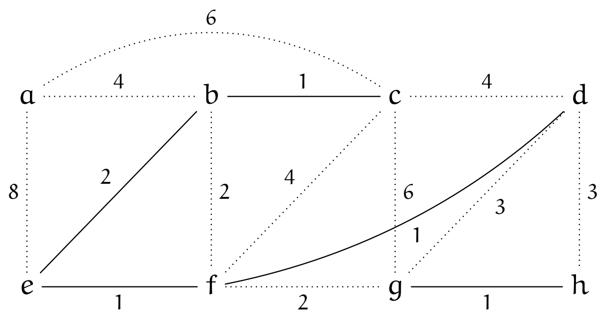
- Arête $\{e, f\}$



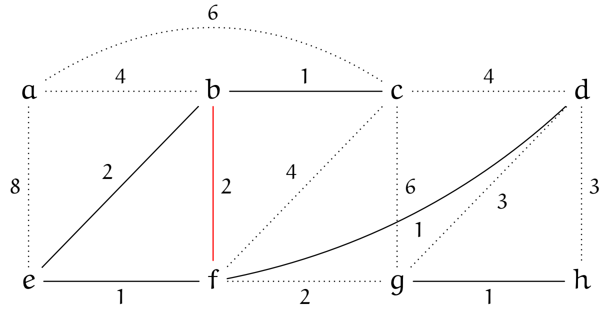
- Arête $\{g, h\}$



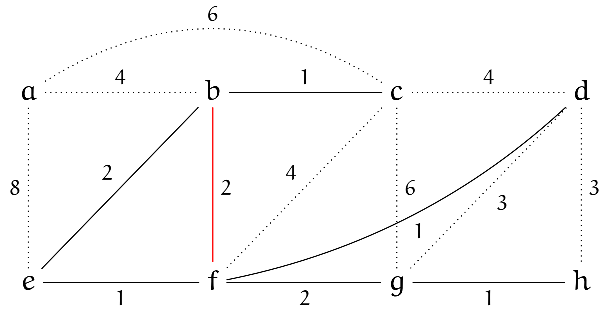
- Arête $\{b, e\}$



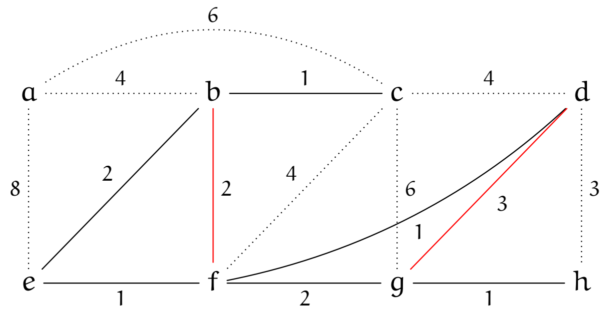
- Arête $\{b, f\}$. Fait apparaitre un circuit.



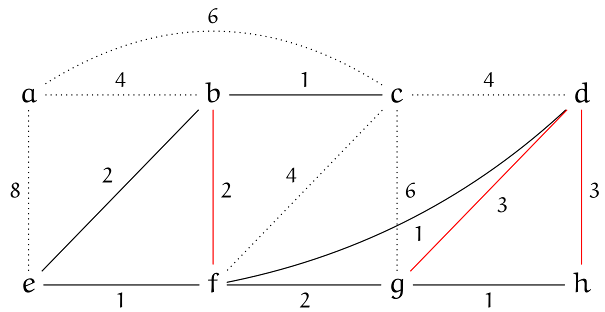
- Arête $\{f, g\}$.



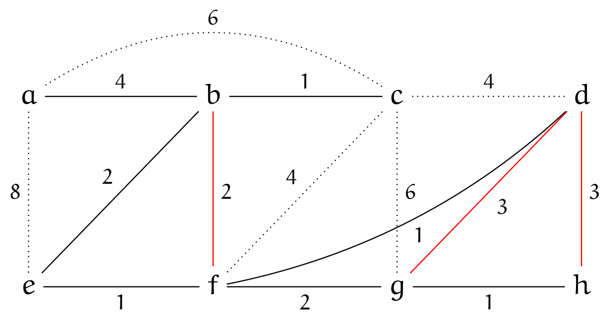
- Arête $\{d, g\}$. Fait apparaitre un circuit.



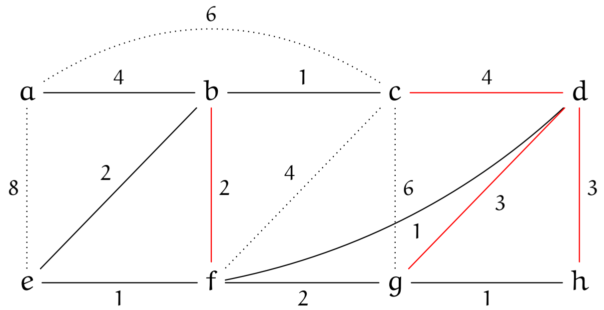
- Arête $\{d, h\}$. Fait apparaitre un circuit.



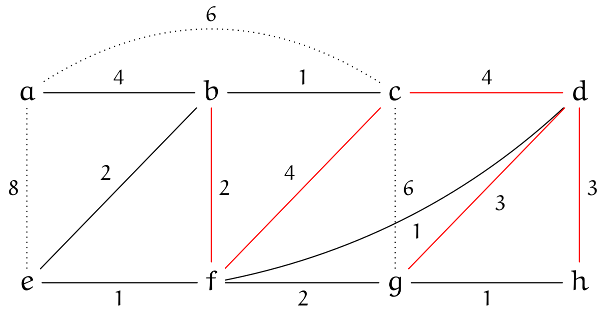
- Arête $\{a, b\}$.



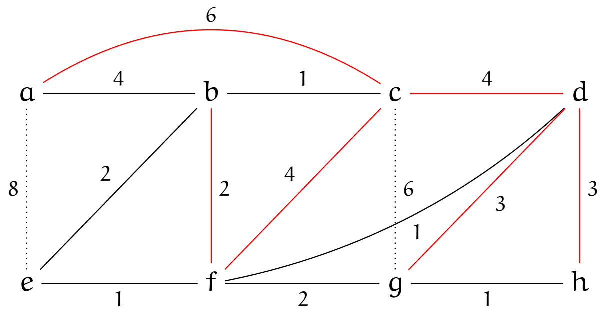
- Arête $\{c, d\}$. Fait apparaitre un circuit.



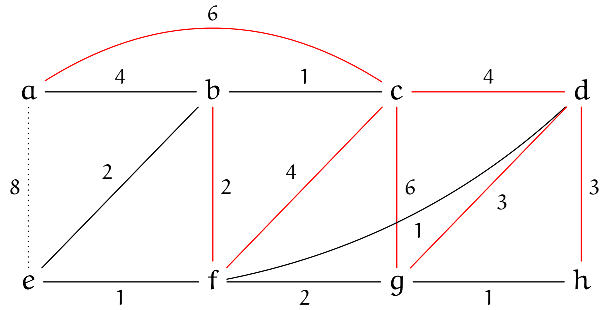
- Arête $\{c, f\}$. Fait apparaitre un circuit.



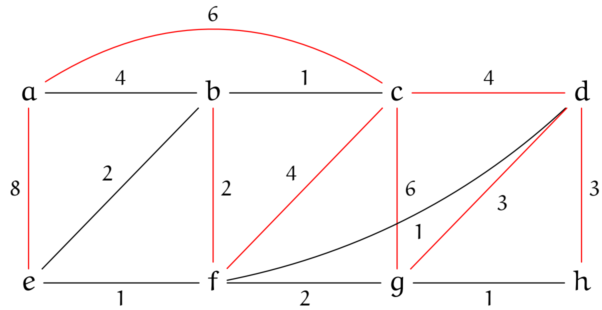
- Arête $\{a, c\}$. Fait apparaitre un circuit.



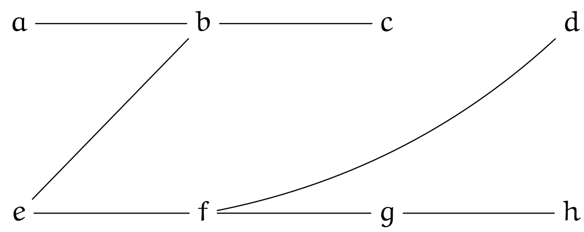
- Arête $\{c, g\}$. Fait apparaitre un circuit.



- Arête $\{a, e\}$. Fait apparaitre un circuit.



- **Conclusion**



Algorithme de Prim

Le problème de l'algorithme de Kruskal est d'observer un cycle. Une alternative : l'algorithme de Prim

§3.3.3 : On choisi un sommet x.

```
 1. Initialisation
        d_min(x)=0;
        sommet_proche(x)={};
        Pour tous les sommets y différent de x
           d_min(y)=+∞; sommet_proche(y)={};
        Fin pour
2.
        Tant qu'il existe des sommets non marqués
           On marque un sommet y non marqué tel que d_min(y)
           soit le plus petit possible.
           Pour tout sommet z non marqué et successeur/voisin à y
              Si d_min(z) > λ({y,z})
                 d_min(z) = λ({y,z}); sommet_proche(z) = y;
              Fin si
           Fin pour
        Fin tant que
```

Cet algorithme est très proche de celui de Djikstra. Historiquement, il fut trouvé dans les années 30 par Vojtěch Jarník, un mathématicien tchèque puis redécouvert et publié par Prim et Dijkstra en 1959. Il est parfois appelé algorithme DJP.

A noter qu'il suffit de partir de n'importe quelle sommet. L'arbre ne sera peut-être pas le même mais le poids sera minimal.

Faisons tourner cet algorithme sur le même graphe. On utilise le même tableau que celui de Dijkstra.

Initialisons les variables :

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	0							

Le sommet au `d_min` minimal est a. On le marque. Ses sommets adjacents sont b, c et e.

- Puisque `d_min(b) >` $\lambda(\{a,b\})$ soit $+\infty > 4$ on modifie la colonne du sommet b.
- Puisque `d_min(c) >` $\lambda(\{a,c\})$ soit $+\infty > 6$ on modifie la colonne du sommet c.
- Puisque `d_min(e) >` $\lambda(\{a,e\})$ soit $+\infty > 8$ on modifie la colonne du sommet e.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	4	6		8			
	X							
	X							
	X							
	X							
	X							
	X							

Le sommet au `d_min` minimal non marqué est b. On le marque. Ses sommets adjacents non marqués sont c, e et f.

- Puisque `d_min(f) >` $\lambda(\{b,f\})$ soit $+\infty > 2$ on modifie la colonne du sommet f.
- Puisque `d_min(e) >` $\lambda(\{b,e\})$ soit $8 > 2$ on modifie la colonne du sommet e.
- Puisque `d_min(c) >` $\lambda(\{b,c\})$ soit $6 > 1$ on modifie la colonne du sommet c.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	1		2	2		
	X	X						
	X	X						
	X	X						
	X	X						
	X	X						

Le sommet au `d_min` minimal non marqué est c. On le marque. Ses sommets adjacents non marqués sont d, f et g.

- Puisque `d_min(d) >` $\lambda(\{c,d\})$ soit $+\infty > 4$ on modifie la colonne du sommet d.
- Puisque `d_min(f)` $\leqslant \lambda(\{c,f\})$ soit $2 \leqslant 4$ on ne modifie pas la colonne du sommet f.
- Puisque `d_min(g) >` $\lambda(\{c,g\})$ soit $+\infty > 6$ on modifie la colonne du sommet g.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{1}$		2	2		
c	X	X	X	4	2	2	6	
	X	X	X					
	X	X	X					
	X	X	X					
	X	X	X					

Le sommet au `d_min` minimal non marqué est e. Le seul sommet adjacent non marqué est f.

- Puisque `d_min(f) >` $\lambda(\{e,f\})$ soit $2 > 1$ on modifie la colonne du sommet f.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{1}$		$\boxed{2}$	2		
c	X	X	X	4	2	2	6	
e	X	X	X	4	X	1	6	
	X	X	X		X			
	X	X	X		X			
	X	X	X		X			

Le sommet au `d_min` minimal non marqué est f. Les sommets adjacents non marqués sont d et g.

- Puisque `d_min(d) >` $\lambda(\{f, d\})$ soit $4 > 1$ on modifie la colonne du sommet f.
- Puisque `d_min(g) >` $\lambda(\{f, g\})$ soit $6 > 2$ on modifie la colonne du sommet g.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{1}$		$\boxed{2}$	2		
c	X	X	X	4	2	2	6	
e	X	X	X	4	X	$\boxed{1}$	6	
f	X	X	X	1	X	X	2	
	X	X	X		X	X		
	X	X	X		X	X		

Le sommet au `d_min` minimal non marqué est d. Les sommets adjacents non marqués sont g et h.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{1}$		$\boxed{2}$	2		
c	X	X	X	4	2	2	6	
e	X	X	X	4	X	$\boxed{1}$	6	
f	X	X	X	$\boxed{1}$	X	X	$\boxed{2}$	
d	X	X	X	X	X	X	2	3
g	X	X	X	X	X	X	X	$\boxed{1}$

- Puisque `d_min(g)` $\leqslant \lambda(\{d, g\})$ soit $2 \leqslant 3$ on ne modifie pas la colonne du sommet g.
- Puisque `d_min(h) >` $\lambda(\{d, h\})$ soit $+\infty > 3$ on modifie la colonne du sommet h.

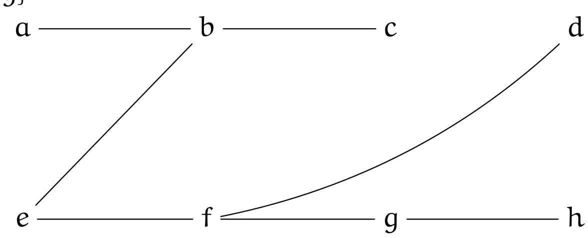
	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{1}$		$\boxed{2}$	2		
c	X	X	X	4	2	2	6	
e	X	X	X	4	X	$\boxed{1}$	6	
f	X	X	X	$\boxed{1}$	X	X	2	
d	X	X	X	X	X	X	2	3
	X	X	X	X	X	X		

Le sommet au `d_min` minimal non marqué est g. Le seul sommet adjacent non marqué est h

- Puisque `d_min(h) >` $\lambda(\{g, h\})$ soit $3 > 1$ on modifie la colonne du sommet h.

	a	b	c	d	e	f	g	h
`Init`	$\boxed{0}$							
a	X	$\boxed{4}$	6		8			
b	X	X	$\boxed{1}$		$\boxed{2}$	2		
c	X	X	X	4	2	2	6	
e	X	X	X	4	X	$\boxed{1}$	6	
f	X	X	X	$\boxed{1}$	X	X	$\boxed{2}$	
d	X	X	X	X	X	X	2	3
g	X	X	X	X	X	X	X	1

Pour finir il suffit de lire les arêtes a mettre en avant pour déterminer l'arbre couvrant. Pour b c'est l'arête $\{b, a\}$. Pour c c'est l'arête $\{c, b\}$. Pour d c'est l'arête $\{d, f\}$. Pour e c'est l'arête $\{e, b\}$. Pour f c'est l'arête $\{f, e\}$. Pour g c'est l'arête $\{g, f\}$. Pour h c'est l'arête $\{h, g\}$.



3.4 Bonne numérotation des graphes orientés

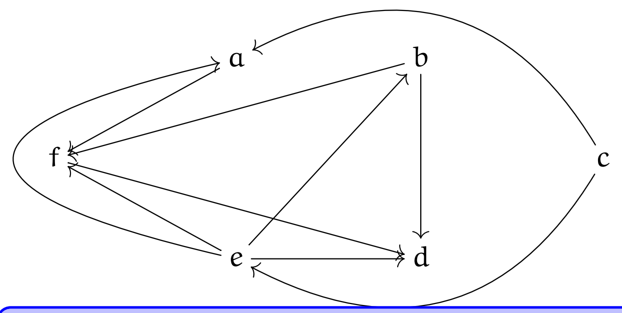
Définition 3.4.1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté. Une **bonne numérotation** sur $\mathcal{G}$ est une application $N : \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}), \quad N(x) < N(y)$$

Remarque 3.4.2 : En particulier, il n'existe pas de bonne numérotation sur des graphes ayant des arc de la forme (x, x).

Considérons par exemple le graphe suivant



Une bonne numérotation est par exemple :

$$\begin{array}{rcl} N : \mathbf{Som}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a & \longmapsto & 3 \\ b & \longmapsto & 4 \\ c & \longmapsto & 1 \\ d & \longmapsto & 6 \\ e & \longmapsto & 2 \\ f & \longmapsto & 5 \end{array}$$

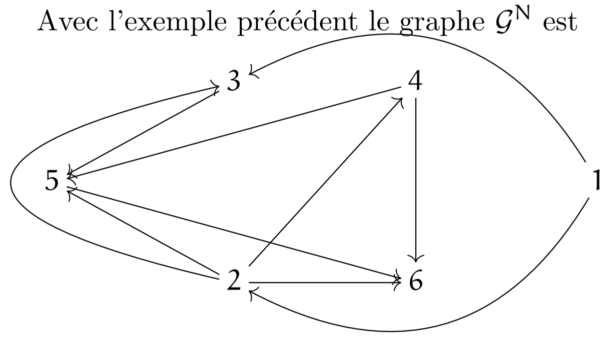
Définition 3.4.3

Soient $\mathcal{G}$ un graphe orienté et N une bonne numérotation sur $\mathcal{G}$. On définit le graphe orienté $\mathcal{G}^N$ par

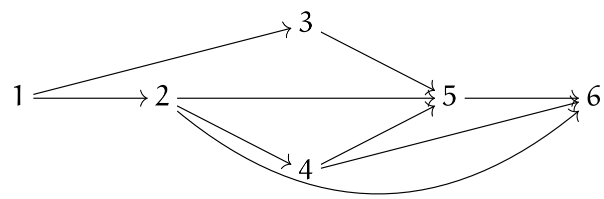
$$\mathbf{Som}(\mathcal{G}^N) = \left\{ N(x) \middle| x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) \right\}$$

$$\mathbf{Arc}(\mathcal{G}^N) = \left\{ (N(x), N(y)) \middle| (x, y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}) \right\}$$

Avec l'exemple précédent le graphe $\mathcal{G}^N$ est



En réordonnant le graphe en écrivant les sommets par ordre croissant suivant la lecture on obtient :



Proposition 3.4.4

Soient $\mathcal{G}$ un graphe orienté et N une bonne numérotation. La matrice booléenne de $\mathcal{G}^N$ est une matrice triangulaire supérieure stricte.

Démonstration. Le coefficient $M_{i,j}$ de la matrice booléenne du graphe $\mathcal{G}^N$ vaut 1 s'il existe un arc entre les sommets i et j. Mais par définition de bonne numérotation $(N(x) < N(y))$ ces coefficients sont nuls lorsque $i \geqslant j$. □

Remarque 3.4.5 : En informatique, lorsque l'on est amené à manipuler des graphes, on utilise leur représentation matricielle. Plus le graphe possède de sommet, plus la matrice est grande et donc plus les boucles nécessaire pour parcourir le graphe sont longues ; de l'ordre de n^2. Avec un bonne numérotation, le résultat précédent stipule que, puisque la matrice est triangulaire supérieur, il n'est pas nécessaire de la parcourir en entier mais simplement de se cantonner à la partie supérieure, réduisant ainsi le nombre d'opération ; de l'ordre de $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 3.4.6

Un graphe orienté est sans circuit si et seulement s'il existe une bonne numérotation.

En lieu et place de la preuve de ce théorème, nous allons détailler un algorithme permettant d'une part, de déterminer si le graphe possède ou non un circuit et d'autre part, lorsqu'il n'en possédera aucun, donnera la bonne numérotation. Il s'agit de l'**algorithme de filtration** (la preuve de ce théorème se résume à montrer que l'algorithme de filtration propose bien une bonne numérotation).

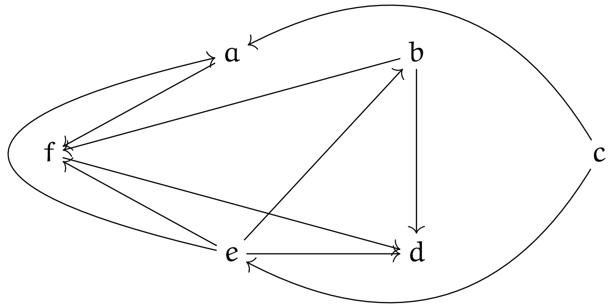
Définition 3.4.7

Soit x un sommet d'un graphe orienté $\mathcal{G}$.

(i) On dira que x est un puits si $\Gamma^{+1}(x, \mathcal{G}) = \varnothing$.

(ii) On dira que x est une source si $\Gamma^{-1}(x, \mathcal{G}) = \varnothing$.

Autrement : un puits est un sommet sans successeur et une source est un sommet sans prédécesseur.



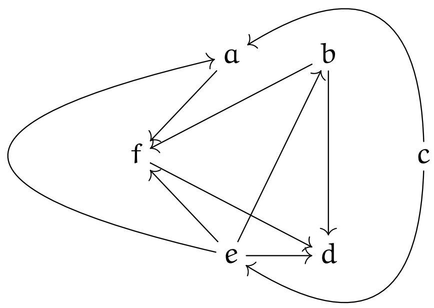
Dans ce graphe le sommet c est une source et le sommet d est un puits.

Remarque 3.4.8 : L'algorithme de filtration possède deux versions : l'algorithme de filtration par les sources et l'algorithme de filtration par les puits. Nous présentons celui par les sources qui est plus "naturel".

§3.4.9 : Algorithme de filtration par les sources.

```
1. Initialisation
      n = 1 (l'indice de la numérotation)
      Pour chaque sommet x du graphe
         Pred[x] = les prédécesseurs de x.
      Fin pour
      S = les sources = les sommets x tel que Pred[x] soit vide.
2. Itérations
   Tant que S est non vide
      Numéroter les éléments de S en incrémentant n.
      Supprimer les éléments de S dans le tableau Pred.
      S = les sommets x non numéroté tel que Pred[x] soit vide.
   Fin tant que
3. Conclusion
   Si Pred est complètement vide
      Le graphe est sans circuit.
      La numérotation effectuée est une bonne numérotation.
   Sinon
      Le graphe possède au moins un circuit.
   Fin si
```

Faisons tourner cet algorithme sur l'exemple



On représente les différentes variables du programme dans un tableau :

x	a	b	c	d	e	f
Num						
Pred						

Première étape . L'initialisation.

x	a	b	c	d	e	f
Num						
Pred	c e	e		b e f	c	a b c

On repère les colonnes vide : ici il n'y a que c. On numérote donc c à 1 et on supprime toutes les occurrences de c dans la case Pred.

x	a	b	c	d	e	f
Num			1			
Pred	e	e		b e f		a b

On repère ensuite les cases vides non numérotées : il n'y a que e. On le numérote à 2 et on supprime les occurrences de e.

x	a	b	c	d	e	f
Num			1		2	
Pred				b f		a b

On repère les cases vides non numérotées : il y a a et b que l'on numérote 3 et 4 (ou 4 et 3 cela n'a pas d'importance). On supprime a et b du tableau

x	a	b	c	d	e	f
Num	3	4	1		2	
Pred				f		

Le f est la seul case vide non numéroté d'où

x	a	b	c	d	e	f
Num	3	4	1		2	5
Pred						

Finalement

x	a	b	c	d	e	f
Num	3	4	1	6	2	5
Pred						

et le graphe est donc sans circuit.

3.5 Théorie des jeux combinatoires à information parfaite à deux joueurs

Définition 3.5.1

Un jeu combinatoire à information parfaite à deux joueurs (JCIP2) est un jeu :

— à stratégie sans aléa,

— sans information caché,

— à deux joueurs jouant à tour de rôle.

1. Le jeu de fléchette n'est pas un JCIP2 car il fait intervenir une partie de hasard.
2. Le poker entre deux joueurs n'est pas un JCIP2 car les cartes des joueurs sont cachées.
3. Pierre papier ciseaux lézard Spock entre deux joueurs n'est pas un JCIP2 car les joueurs ne jouent pas à tour de rôle.
4. Le jeu du puissance 4 est un JCIP2.
5. Le jeu du morpion est un JCIP2.
6. Le jeu de dame est un JCIP2.
7. Le jeu d'échec est un JCIP2.
8. Le jeu d'othelo (reversi) est un JCIP2.

Définition 3.5.2

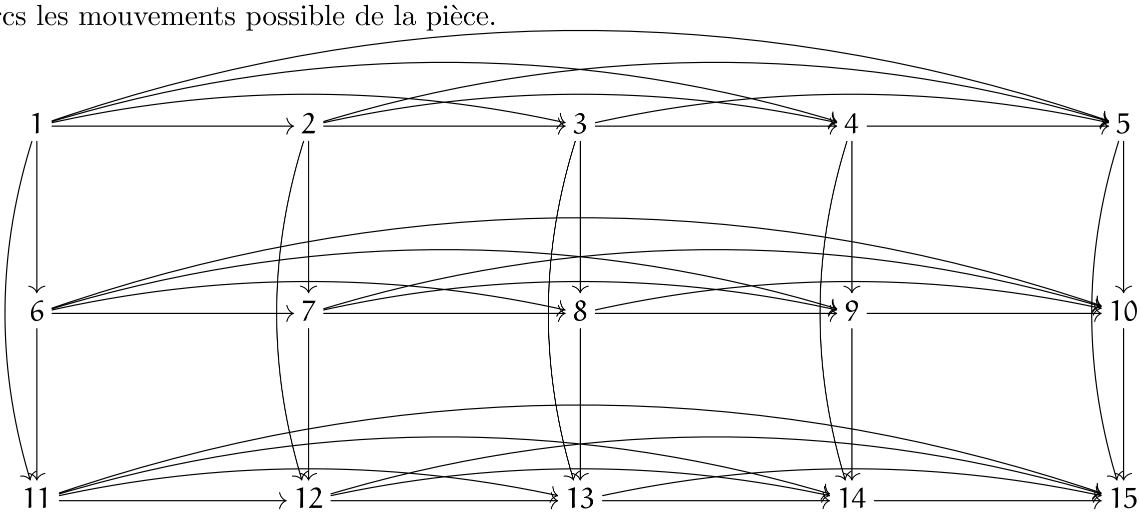
A tout JCIP2, on associe un graphe orienté J défini par :

$$\mathbf{Som}(J) = \{\text{États possible du jeu}\}$$

$$\mathbf{Arc}(J) = \{\text{Si on peut passé d'un état à un autre en un coup}\}$$

Considérons par exemple un damier de 3×5 cases et une tour[3] placée en haut à gauche. Le but du jeu est de placer la tour en bas à droite. Deux joueurs déplace la pièce, à tour de rôle, en respectant la règle "On ne peut déplacer la pièce que vers le bas ou vers la droite".

Il s'agit bien d'un JCIP2, dont les sommets du graphe représentent la position de la tour sur le damier et les arcs les mouvements possible de la pièce.



On voit que si un joueur est en 9 alors il va nécessairement perdre. Ainsi pour gagner il suffit de faire en sorte que le joueur adverse se place en 9. Existe-t-il d'autre position offrant une stratégie gagnante ?

Définition 3.5.3

Le **noyau** d'un graphe orienté $\mathcal{G}$ est un sous ensemble de $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ tel que :

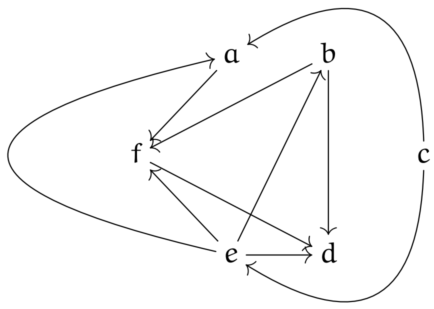
1. Les sommets de N sont deux à deux non adjacents :

$$\forall (x, y) \in N^2, \qquad (x, y) \notin \mathbf{Arc}(\mathcal{G})$$

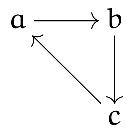
3. la pièce aux échecs

2. Tout sommet qui n'est pas dans N a un prédécesseur dans N :

$$\forall x \in \mathsf{Som}(\mathcal{G}) - N,\ \exists y \in N, \qquad (x, y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G})$$



On peut vérifier que $\{a, d\}$ est un noyau.



Ce graphe ne possède pas de noyau.

Lorsque le graphe n'as pas de circuit, on peut donner un noyau. C'est l'algorithme de dénoyautage.

Proposition 3.5.4

Tout graphe orienté sans circuit possède un noyau

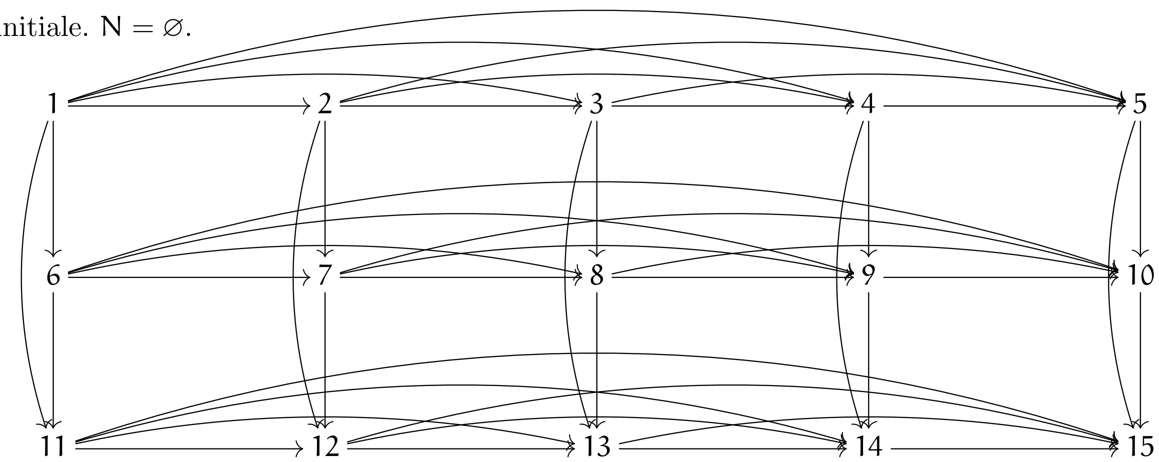
La preuve de ce résultat résulte de l'algorithme suivant.

§3.5.5 : Algorithme de dénoyautage.

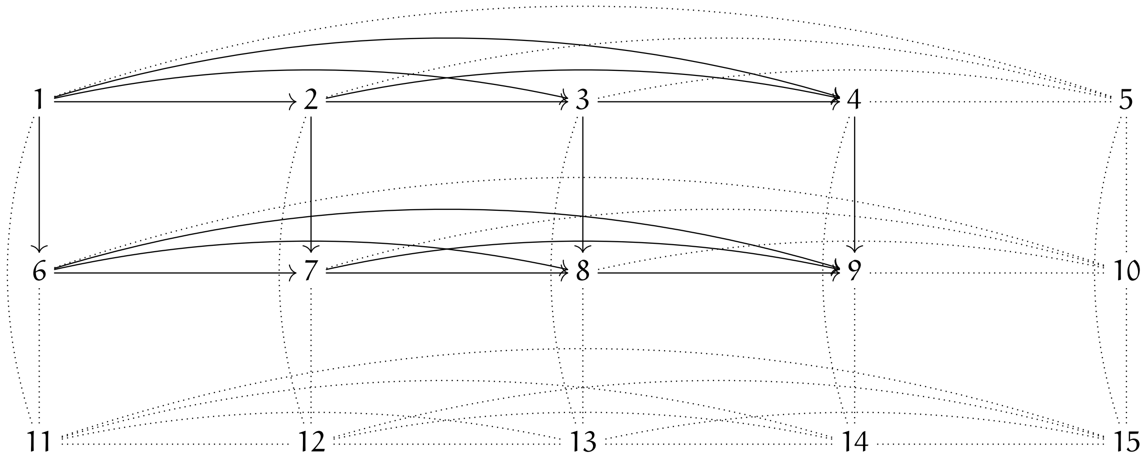
```
N = ∅
Tant que Som(G) ≠ ∅
      N = N ∪ {Puits de G}
      Supprimer de G les éléments de N et leur prédécesseurs.
Fin tant que
```

Faisons tourner cet algorithme sur notre exemple du jeu de la tour.

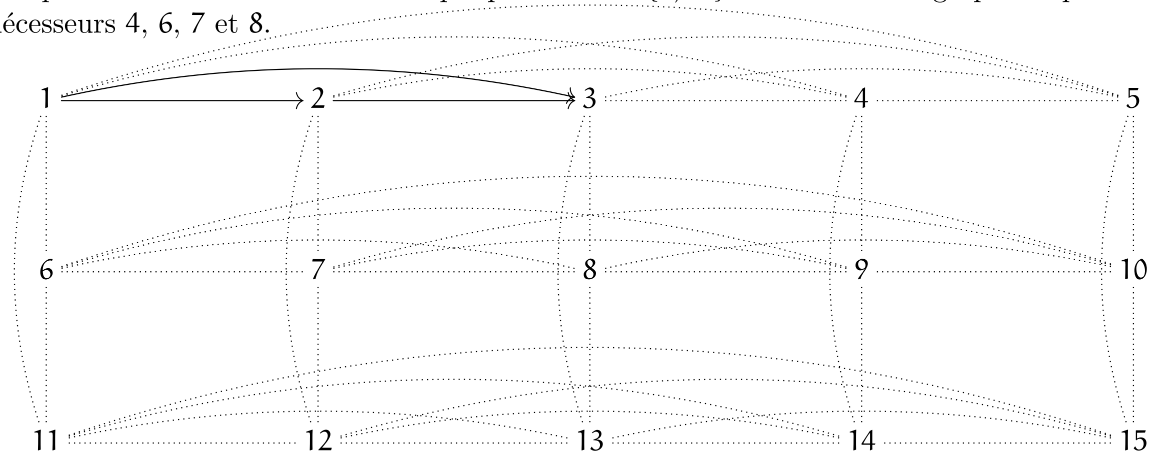
- Étape initiale. $N = \varnothing$.



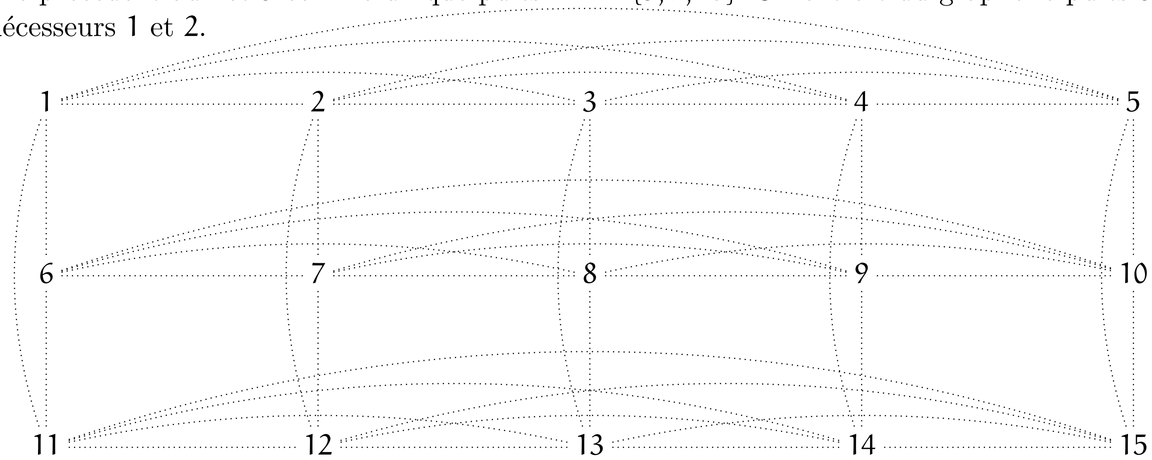
- Le graphe précédent admet 15 comme unique puits : $N = \{15\}$. On extrait du graphe le puits 15 et ses prédécesseurs 5, 10, 11, 12, 13 et 14.



- Le graphe précédent admet 9 comme unique puits : $N = \{9, 15\}$. On extrait du graphe le puits 9 et ses prédécesseurs 4, 6, 7 et 8.



- Le graphe précédent admet 3 comme unique puits : $N = \{3, 9, 15\}$. On extrait du graphe le puits 3 et ses prédécesseurs 1 et 2.



- Le graphe est vide. Un noyau est donc $N = \{3, 9, 15\}$

  L'existence du noyau garantie une stratégie non-perdante.

Proposition 3.5.6

Soit N un noyau d'un graphe d'un JCIP2. Un joueur dont la position au début de son tour n'est pas dans N a une stratégie non-perdante.

Démonstration. Le joueur joue et se place sur un sommet élément de N, ce qui est possible d'après la définition de noyau. Si ce sommet est un puits, le joueur à gagné. Sinon, toujours d'après la définition de noyau, l'adversaire ne pourra se placer que sur un sommet qui n'est pas dans N et le joueur recommence sa stratégie. $\square$

Reprenons le jeu de la tour. Le premier joueur (celui qui va gagner) se place en 3. L'autre joueur ne peut se placer qu'en 4, 5, 8 ou 13. S'il c'est placé en 5 ou en 13 le premier joueur place la tour en 15 et gagne. S'il c'est placé en 4 ou 8, le premier joueur se place en 9. Le second joueur ne peut alors que se placer en 10 ou 14 ce qui fait gagner le premier joueur !