NOM :
PRENOM :
GROUPE :

Juin 2016

Examen
Graphes et langages

Au Chicken Spot

Les troisième et quatrième parties peuvent être traitées indépendamment du reste.

Lorsqu'Adrien, Ahmed, Akinyemi, Alexandre, Aminn, Antoine, Assan, Aubin et Ayoub se rendent au Chicken Spot, ils ne peuvent pas s'empêcher de se taper dessus ce qui exaspère le gérant. Mais les bénéfices rapportés par ces clients rend ce dernier enclin à tolérer ces incivilités. Cependant pour montrer son exaspération le gérant convient avec Ahmed et ses amis que toute bagarre sera pénalisée par une petite augmentation du tarif de leur menu ; ce que tout le monde a accepté.

Ils ne sont pas tous enclins à se battre entre eux et l'issue des combats est en général connue d'avance. De plus le gérant n'applique pas une augmentation identique en fonction des combats (certains sont plus spectaculaires que d'autres).

On modélise alors la situation à l'aide d'un graphe orienté valué $(\mathcal{G}, \lambda)$. Les sommets sont les 9 individus symbolisés par la seconde lettre de leur prénom. Les arcs représentent les combats. Un arc (x, y) signifie que x et y se sont battus et que y a gagné le combat. La valuation λ représente le montant en euros que va faire payer le gérant en plus sur leur note.

	h	u	n	k	m	d	s	y	l
h	0	0	0	0	4	2	1	0	0
u	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	0	7	0	0	0	0	0	0	0
k	0	0	0	0	3	0	4	0	0
m	0	5	0	0	0	4	0	0	0
d	0	3	0	0	0	0	0	0	0
s	0	5	2	0	0	0	0	0	0
y	2	0	0	5	0	0	0	0	2
l	0	0	3	0	6	0	4	0	0

- Chacun paye son repas et Ahmed paye en plus toutes les augmentations de la note engendrées par les combats.
- On dira que x et y sont de *vrais potes* s'il n'existe pas de chemin de $\mathcal{G}$ de longueur strictement positive entre x et y (ATTENTION : on parle de chemin de $\mathcal{G}$, l'orientation compte).
- Un ensemble $X \subset \mathbf{Som}(\mathcal{G})$ est un groupe de vrais potes si pour tout x et y de X, x et y sont des vrai potes.

	h	u	n	k	m	d	s	y	l
h	0	0	0	0	4	2	1	2	0
u	0	0	7	0	5	3	5	0	0
n	0	7	0	0	0	0	2	0	3
k	0	0	0	0	3	0	4	5	0
m	4	5	0	3	0	4	0	0	6
d	2	3	0	0	4	0	0	0	0
s	1	5	2	4	0	0	0	0	4
y	2	0	0	5	0	0	0	0	2
l	0	0	3	0	6	0	4	2	0

Il y a de plus un cas spécial. Lorsqu'Ahmed boit du *Red Bull* il devient impossible de déterminer l'issue des combats à l'avance (que ces combats concernent Ahmed ou non). Les affinités restent les mêmes et le gérant fait payer les combats de la même manière.

On note $(|\mathcal{G}|, \mu)$ le graphe désorienté de $\mathcal{G}$ muni de la valution suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathbf{Ar}(|\mathcal{G}|) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \{x, y\} & \longmapsto & max(\lambda((x, y)), \lambda((y, x))) \end{array}$$

Le graphe $(|\mathcal{G}|, \mu)$ correspond donc au modèle du cas où Ahmed a bu du *Red Bull*.

Première partie : Algorithmes.

1. Appliquer l'algorithme de filtration par les sources de $(\mathcal{G}, \lambda)$ (dans ce cas la valuation n'a aucune importance, seules les arcs comptent). 1

Som$(\mathcal{G})$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
Num									
Pred									

$\mathrm{src}_1(\mathcal{G}) = \left\{ \qquad \right\}$

Som$(\mathcal{G})$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
Num									
Pred									

$\mathrm{src}_2(\mathcal{G}) = \left\{ \qquad \right\}$

Som$(\mathcal{G})$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
Num									
Pred									

$\mathrm{src}_3(\mathcal{G}) = \left\{ \qquad \right\}$

Som$(\mathcal{G})$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
Num									
Pred									

$\mathrm{src}_4(\mathcal{G}) = \left\{ \qquad \right\}$

Som$(\mathcal{G})$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
Num									
Pred									

$\mathrm{src}_5(\mathcal{G}) = \left\{ \qquad \right\}$

2. Donner une représentation sagittale en couches de $(\mathcal{G}, \lambda)$ (on n'omettra pas la valuation). 0.5

3. En déduire une représentation sagittale de $(|\mathcal{G}|, \mu)$ (on n'omettra pas la valuation). 0.5

4. Compléter le tableau des demi-degrés de $\mathcal{G}$. 0.5

Sommet	h	u	n	k	m	d	s	y	l
$d^{+1}(\bullet, \mathcal{G})$									
$d^{-1}(\bullet, \mathcal{G})$									

5. Compléter le tableau des degrés de $|\mathcal{G}|$. 0.5

Sommet	h	u	n	k	m	d	s	y	l
$d^{1}(\bullet, \|\mathcal{G}\|)$									

6. Appliquer l'algorithme de Brelaz à $(|\mathcal{G}|, \mu)$ (dans ce cas la valuation n'a aucune importance, seules les arêtes comptent).

Som$(\|\mathcal{G}\|)$									
`DSAT`$_1$									
`DSAT`$_2$									
`DSAT`$_3$									
`DSAT`$_4$									
`DSAT`$_5$									
`DSAT`$_6$									
`DSAT`$_7$									
`DSAT`$_8$									
`DSAT`$_9$									
`Couleur`									

7. Déterminer la valeur exacte du nombre chromatique de $(|\mathcal{G}|, \mu)$. 1

8. Appliquer l'algorithme de Prim à $(|\mathcal{G}|, \mu)$ en **partant de** m.

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

Som$(\|\mathcal{G}\|)$	h	u	n	k	m	d	s	y	l
d_{min}									
S_p									

9. Par dessus la représentation sagittale de $(|\mathcal{G}|, \mu)$ donnée à la question 3, dessiner un arbre couvrant de poids minimal (on utilisera une couleur différente pour les arêtes concernées). 1

Seconde partie : Analyse des résultats. Chacune des réponses doit être justifiée. Une réponse juste mais non justifiée sera considérée comme fausse. Les réponses se déduisent en général de l'analyse des résultats précédents.

1. On suppose dans cette question qu'Ahmed a bu du *Red Bull*.
   (a) Chaque personne se battant contre Ahmed se battra également contre une autre personne du groupe. Dans ce cas combien Ahmed payera-t-il en plus au minimum ? 1

(b) En plus d'Ahmed, tous les autres ont bu du *Red Bull*. C'est arrivé une fois et le gérant a du fermer son restaurant pendant 3 jours pour tout nettoyer. Ayant anticipé cette apocalypse, il décide d'installer les 9 sur des tables différentes pour qu'aucune bagarre n'éclate. Combien de table au minimum le gérant va-t-il monopoliser ? Indiquez qui sera à chaque table.

2. On suppose dans cette question qu'Ahmed n'a pas bu du *Red Bull*.

   (a) Quelles sont les personnes susceptibles de se battre avec le plus d'autres ? Pour chacune d'elles, indiquer le nombre maximum de fois qu'elle gagne et le nombre de fois maximum qu'elle perd.

   (b) Combien y a-t-il de groupes de vrais potes minimum différents ? Donner la liste de chaque groupe.

Troisième partie : Payer la facture. Au moment de payer le prix de leur bagarre, Ahmed propose à Antoine un jeu avec les 8 frites qui restent dans son assiette. Il fait deux paquets : un composé de 5 frites que nous allons appeler P_1 et l'autre, P_2, composé de 3 frites. A tour de rôle ils mangent une frite dans un tas ou une frite dans chaque tas. Le gagnant (celui qui ne paiera pas la facture) est celui qui mange la dernière frite.

1. Donner la représentation sagittale du graphe associé à ce JCIP2. Les sommets seront de la forme (x, y) où x (resp. y) est un nombre entier représentant le nombre de frites restantes dans le paquet P_1 (resp. P_2). Deux sommets étant reliés si l'on peut passer de l'un à l'autre en un coup.

2. Déterminer le noyau de ce graphe. 1

3. Établir une stratégie non perdante. Si Ahmed ne veut pas payer la facture, doit-il commencer ou laisser Antoine commencer ? 1

Quatrième partie : L'automate. Le restaurateur s'est équipé d'une machine dans lequel les clients introduisent leur monnaie et qui fait l'appoint automatiquement. La machine prend uniquement des pièces de 1€ 2€ et des billets de 5€.
Cependant la dernière mise à jour a modifié le comportement de la machine identifiée à un automate non déterministe $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, 5\}$ dont la représentation matricielle est la suivante :

	1	2	5
$\rightarrow$ A	A, B	A, B	A
B	C	C	
C $\rightarrow$			

1. Quels sont les états initiaux et finaux ? 0.5

2. Donner une représentation sagittale de $\mathcal{A}$. 0.5

3. Appliquer l'algorithme de détermination et donner la représentation sagittale de $\mathcal{A}_{\mathtt{det}}$. 1.5

4. L'automate $\mathcal{A}_{\mathtt{det}}$ est-il complet ? 0.5

5. Quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}$? 1