

NOM :  
Prénom :  
Groupe :

## Examen

### Graphes et langages

- *La calculatrice n'est pas autorisée.*
- *Documents et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*



### Exercice 1

10 min

Considérons le graphe  $\mathcal{G}$  suivant

|   | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| b | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| c | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| d | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| e | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| g | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| h | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Déterminer  $\Gamma^{-3}(f, \mathcal{G})$  en appliquant l'algorithme du marquage.

2

| Sommet        | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma^0$    |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^{-1}$ |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^{-2}$ |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^{-3}$ |   |   |   |   |   |   |   |   |

$$\Gamma^{-3}(f, \mathcal{G}) = \{ \quad \quad \quad \}$$

### Exercice 2

20 min

Dans cet exercice, on cherche à déterminer tous les graphes  $\mathcal{G}$  satisfaisants les contraintes suivantes :

| Som( $\mathcal{G}$ )     | a | b | c | d | e | f |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|
| $d^{+1}(x, \mathcal{G})$ | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 4 |
| $d^{-1}(x, \mathcal{G})$ | 0 | 2 | 2 | 4 | 0 | 1 |

1. Indiquer dans la matrice ci-dessous, tous les coefficients déterminés sans faire d'hypothèse supplémentaire :

|   | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a |   |   |   |   |   |   |
| b |   |   |   |   |   |   |
| c |   |   |   |   |   |   |
| d |   |   |   |   |   |   |
| e |   |   |   |   |   |   |
| f |   |   |   |   |   |   |

2. Vérifier qu'il existe exactement un graphe solution satisfaisant  $(c, b) \in \text{Arc}(\mathcal{G})$ . On donnera sa matrice en complétant le graphe ci-dessous.

0.5

|   | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a |   |   |   |   |   |   |
| b |   |   |   |   |   |   |
| c |   |   |   |   |   |   |
| d |   |   |   |   |   |   |
| e |   |   |   |   |   |   |
| f |   |   |   |   |   |   |

3. Vérifier qu'il existe exactement un graphe solution satisfaisant  $(c, b) \notin \text{Arc}(\mathcal{G})$ . On donnera sa matrice en complétant le graphe ci-dessous.

0.5

|   | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a |   |   |   |   |   |   |
| b |   |   |   |   |   |   |
| c |   |   |   |   |   |   |
| d |   |   |   |   |   |   |
| e |   |   |   |   |   |   |
| f |   |   |   |   |   |   |

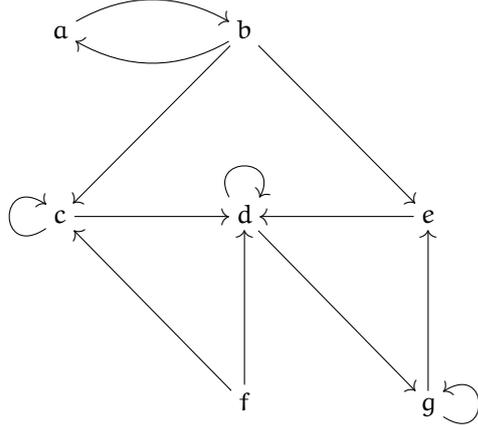
4. Justifier que les deux graphes précédemment déterminés sont les seuls répondants aux contraintes initiales.

0.5

### Exercice 3

30  
min

Considérons le graphe suivant  $\mathcal{G}$  suivant.



1. Appliquer l'algorithme du marquage et déterminer les 4 composantes connexes fortes de  $\mathcal{G}$ .

|            | a | b | c | d | e | f | g |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma^+$ |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^-$ |   |   |   |   |   |   |   |

CCF( ,  $\mathcal{G}$ ) = { }

|            | a | b | c | d | e | f | g |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma^+$ |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^-$ |   |   |   |   |   |   |   |

CCF( ,  $\mathcal{G}$ ) = { }

|            | a | b | c | d | e | f | g |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma^+$ |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^-$ |   |   |   |   |   |   |   |

CCF( ,  $\mathcal{G}$ ) = { }

0.5

|            | a | b | c | d | e | f | g |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma^+$ |   |   |   |   |   |   |   |
| $\Gamma^-$ |   |   |   |   |   |   |   |

CCF( ,  $\mathcal{G}$ ) = { }

0.5

2. Donner une représentation de  $\mathcal{G}_{red}$  le graphe réduit de  $\mathcal{G}$ .

1

### Exercice 4

15  
min

On dispose d'un fil de fer de 120 centimètres. Est-il possible de préparer la carcasse d'un cube de 10 centimètres d'arête sans couper le fil? Si oui, proposer une solution, sinon indiquer le nombre au minimum de coupe à effectuer sur le fil de fer. Justifier très précisément.

3

**Exercice 5**

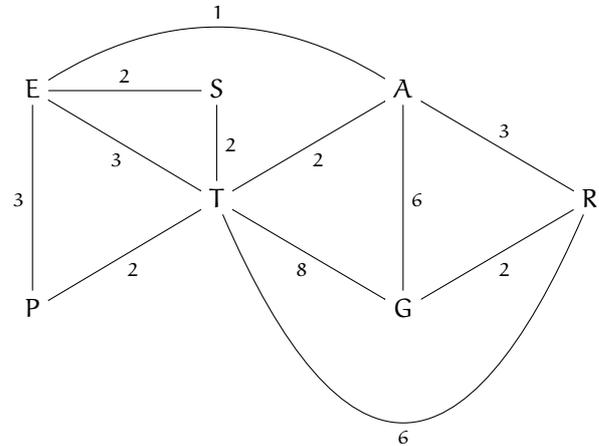
**Le gant de l'infini**

Dans l'univers Marvel, les *gemmes de l'infini* sont des artefacts qui existaient avant l'univers. Ces gemmes confèrent à leur porteur des pouvoirs extraordinaires. On en dénombre 7 :

- E la gemme de l'espace permet de se téléporter.
- S la gemme de l'esprit permet de lire dans les pensées des autres.
- A la gemme de l'âme accorde la capacité de voler et manipuler des âmes.
- R la gemme de la réalité permet de matérialiser ses pensées.
- T la gemme du temps permet de voyager dans le temps.
- P la gemme du pouvoir offre invincibilité et force surhumaine.
- G la gemme de l'égo qui protège du pouvoir des autres gemmes.

Le peuple des inhumains a développé un gant, appelé *gant de l'infini* permettant d'activer et de combiner le pouvoir des gemmes. Toutes les gemmes

ne peuvent pas se combiner mais les combinaison accroissent le pouvoir du gant. Le graphe  $\mathcal{G}$  ci-dessous schématise le gant. Chaque sommet représente une gemme, une arête une combinaison possible et la valeur l'augmentation du pouvoir du gant.



**Première Partie.** Résultats préliminaires.

1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra **partant du sommet G.**

2

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet        | E | S | A | R | T | P | G |
| $d_{min}$     |   |   |   |   |   |   |   |
| Sommet proche |   |   |   |   |   |   |   |

2. Donner la liste des chemins les plus courts partant de G pour atteindre tous les autres sommet du graphe.

1

3. Remplissez le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet.

1

|                             |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet                      | E | S | A | R | T | P | G |
| $d^1(\bullet, \mathcal{G})$ |   |   |   |   |   |   |   |

4. Appliquer l'algorithme de Brélaz.

2

|                   |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|
| Sommet            |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>1</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>2</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>3</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>4</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>5</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>6</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>7</sub> |  |  |  |  |  |  |  |
| Couleur           |  |  |  |  |  |  |  |

5. Donner la valeur exacte du nombre chromatique de  $\mathcal{G}$ . Justifier.

1

**Seconde partie.** Applications.

1. Avant d'être placé sur le gant les gemmes sont conditionnés dans des réceptacles d'énergie. Il existe différents réceptacles : le 1, le 2, le 3 etc. La contrainte est que deux gemmes qui se combinent ne peuvent pas avoir le même type de réceptacle. Combien de réceptacles différents au minimum seront utilisés? Justifier et proposer une configuration.

1

2. Le peuple des Inhumains a déterminé que pour utiliser le gant il faut au moins activer la gemme de l'égo et la gemme de l'esprit. Quelle est la puissance minimale d'utilisation du gant? Justifier.

0.5

3. Le titan fou Thanos souhaite utiliser le gant à sa pleine puissance pour dominer l'univers. Il est possible d'activer plusieurs fois une gemme mais pas de combiner deux gemmes plusieurs fois.



(a) Existe-t-il un circuit eulérien dans le graphe  $\mathcal{G}$ . Justifier.

0.5

(b) Existe-t-il une chaîne eulérienne dans le graphe  $\mathcal{G}$ . Justifier.

0.5

(c) Expliquer dans quel ordre Thanos va activer les gemmes pour exploiter le pouvoir du gant à son maximum.

0.5