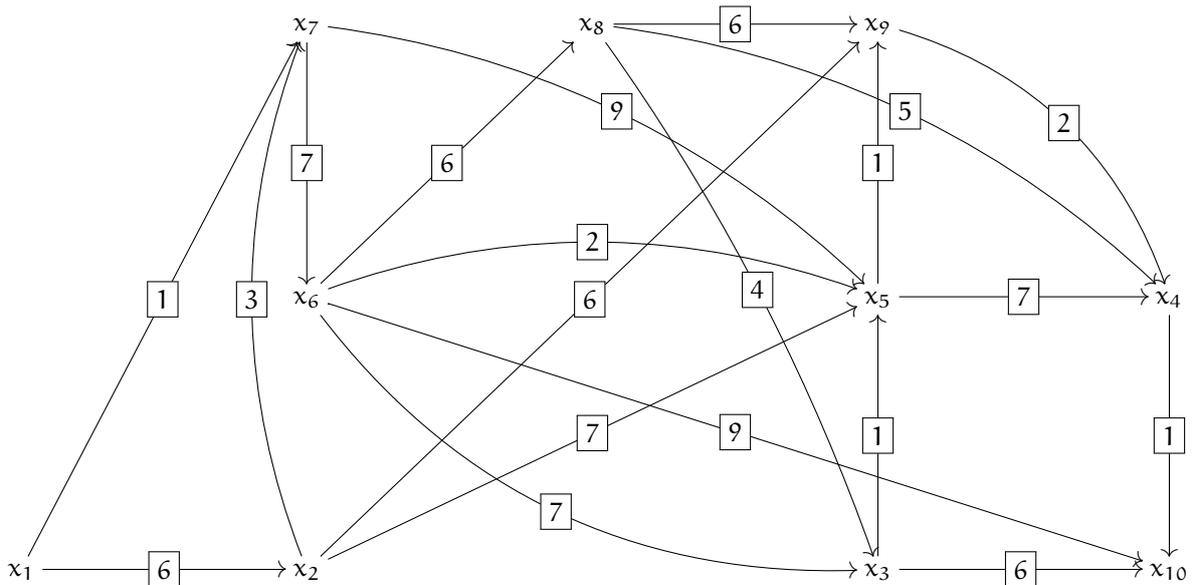


# Contrôle de théorie des graphes

## Randonnée en montagne

Vous faites une randonnée dans les montagnes du Jura. Dans ces étranges montagnes, vous vous perdez malgré vos efforts et prenez gîte dans un pittoresque chalet au pied d'une chaîne de montagne. A l'intérieur de ce chalet accueillant vous trouvez une vieille carte, pratiquement illisible indiquant la position d'autres chalets dans les montagnes ainsi que les sentiers qui les relient. Voici une reproduction de cette carte assimilée à un graphe que l'on appellera  $\mathcal{G}$ .



On a noté  $x_i \xrightarrow{d} x_j$  pour indiquer que le sentier entre le chalet  $i$  et le chalet  $j$  est de  $d$  kilomètres. L'orientation signale que le chalet  $i$  est plus bas, en altitude, que le chalet  $j$ .

### Première partie : calculs et algorithmes.

1. (il n'est pas nécessaire, pour cette question, de placer les 0)

- (a) Donner la matrice booléenne augmentée de la valuation de  $\mathcal{G}$ . 1      (b) En déduire la matrice booléenne augmentée de la valuation du graphe désorienté  $|\mathcal{G}|$ . 1

|          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |  |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|--|
| $x_1$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_1$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_2$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_2$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_3$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_3$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_4$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_4$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_5$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_5$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_6$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_6$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_7$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_7$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_8$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_8$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_9$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_9$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |
| $x_{10}$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          | $x_{10}$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |  |



2. Compléter le tableau suivant donnant les demi degrés intérieur de  $\mathcal{G}$ , les demi degrés extérieur de  $\mathcal{G}$  et les degrés de  $|\mathcal{G}|$ .

1

| Sommet                         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $d^{+1}(\bullet, \mathcal{G})$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
| $d^{-1}(\bullet, \mathcal{G})$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
| $d^1(\bullet, \mathcal{G})$    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |

3. Coloration.

- (a) Appliquer l'algorithme de Brelaz à  $|\mathcal{G}|$ .

1.5

|                    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Som                |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>1</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>2</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>3</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>4</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>5</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>6</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>7</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>8</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>9</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>10</sub> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Coul               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

- (b) En déduire la valeur exacte du nombre chromatique de  $|\mathcal{G}|$ .

1

4. Appliquer l'algorithme de Dijkstra à  $|\mathcal{G}|$  partant de  $x_1$ .

1.5

| Som  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| Init |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |

**Interprétation des résultats : l'histoire.** Votre point de départ est le chalet  $x_1$ .

1. Quel est le chalet le plus haut que vous puissiez atteindre? Justifier.

1

2. Inquiété par l'idée d'être perdu au milieu de ces chaînes de montagnes, sentant le vent tourner et les nuages annoncer une terrible tempête nocturne, la chaleur et le confort du lit ont sur vous un effet enivrant et vous bercent paisiblement dans un sommeil léger. Des images commencent à se dissoudre derrière vos paupières. Une quiétude rassurante vous entoure. Quand soudain, comme si le temps avait disparu, vous vous redressez transpirant de terreur, haletant, inquiet sans savoir pourquoi. Une ombre se dessine dans la chambre refroidi par la tempête grondant derrière les murs de ce chalet semblant danser dans les nuages. Une voix inquiétante raisonne dans votre tête sans que les lèvres de ce qui vous semble être une femme encapuchonné ne bougent. *"De quel droit oses-tu te glisser dans mon lit? Manger ma nourriture? Voler mes rêves de quiétudes? Rejoins moi, demain à 10h dans le chalet le plus haut des ces montagnes. Tu le trouveras puisque tu m'as volé ma carte."*. Volatilisée. A peine avez-vous eu le temps de cligner des yeux que cette étrange femme s'était volatilisée. Vous allumez votre téléphone, et malgré l'absence total de réseau vous constatez qu'il est très exactement une heure du matin. La randonnée dans la neige et à travers les sentiers tortueux vous font marcher à une vitesse moyenne de trois kilomètres par heure en monté et cinq kilomètre par heure en descente. A quelle heure devez-vous mettre votre alarme pour arriver pile à l'heure et marcher le moins longtemps possible sachant qu'entre l'heure de votre réveil et le début de votre randonnée dans les montagnes, il vous faut dix minutes? Quels sentiers explorerez-vous? Justifier précisément.

2

3. Vous y êtes arrivés! Elle est là, assise au coin du feu, remuant un chaudron bouillonnant, un rire nasillard glaçant l'air ensorcelé par la tempête de neige qui continue à faire rage. A peine la porte fermée, vous sentez son regard pesant traverser votre âme et malgré les flammes dansantes dans la cheminée vous vous retrouvez hypnotisé par ses yeux brillants comme des soleils verts. D'un ton moqueur elle vous annonce : *"Pour te faire pardonner d'avoir abuser de mon hospitalité tu vas repeindre les portes de tous mes chalets. Retourne dans la montagne avec ces pots de peinture"* en pointant du doigt un coin de son lugubre chalet. Vous constatez, après que votre âme ai récupéré ses esprits, que des dizaines de pots de peinture de dix litres chacun, sont entassés nonchalamment, tous de couleur différente. A peine avez-vous imaginé devoir porter ces pots de peinture dans la montagne qu'elle rajoute : *"si deux chalets reliés par un sentier ont leur porte de la même couleur, je t'arrache les yeux pour les donner à manger à mon nain"*. A peine as-t-elle fini sa phrase, qu'un rire démoniaque raisonne dans la pièce. Combien de pot de peinture devrez-vous prendre au minimum, sachant qu'il ne faut que 20cL pour peindre une porte? Quelles seront les couleurs des portes de chacun des chalets?

1.5

4. Vous passez toute votre journée à réaliser cette corvée. Le soleil commence à se coucher et vous retournez la voir, gorgé d'espoir d'une récompense luxueuse. "Tu as bien travaillé" rétorque t-elle rapidement. "Prends ces deux verres de vins" qu'elle pose l'un sur l'autre. Vous savourez ce vin sur vin, en en redemandant vingt en vain, et sentez une douce chaleur vous remplir le cœur. Vous sortez euphorique de son chalet, titubant et trébuchant, dès la porte close, sur un petit quelque chose dissimulé dans la neige. Ce petit quelque chose prend soudain la parole "Hey! Fais gaffe l'ami! Je suis Antoine, aka Dormeur, le seul des sept nains que la sorcière n'a pas bouffée. Je vais te donner un secret : si partant d'ici tu visites tous les sentiers, une et une seule fois, le chalet sur lequel tu arriveras s'ouvrira à toi et tu recevras un trésor incommensurable!". Ni une, ni deux vous vous mettez à étudier la carte et effectivement cela semble être possible. Pourquoi? Dans quel chalet se trouve le trésor et quel chemin devrez-vous emprunter pour y arriver?

2

**Chalet au trésor.** Vous arrivez dans le chalet au trésor, tard dans une nuit lumineuse. La tempête c'est calmée, comme si la nature sentait la lourdeur de l'instant. Vous n'êtes éclairé que par la lumière de la lune curieuse qui vous espionne, comme une complice curieuse. Vous ouvrez la porte, inquiet, une goutte froide de transpiration coule le long de votre dos. Une sensation étrange vous fige le sang. La pièce est vide, austère. Les rayons de lune font vaciller un rideau déchiré cachant une fenêtre cassée. Vos yeux s'accoutument petit à petit à l'obscurité de la pièce. Vous n'osez pas avancer mais vous distinguez un coffre de bois usé mais solidement consolidé par des morceaux de métal épais et rouillés. Vous avancez, à l'affût du moindre grincement, de la moindre ombre furtive. Vous arrivez devant ce coffre, vous luttez avec. Il fini par céder... vous ouvrez, et dans un grincement qui fait raisonner toute la montagne, vous découvrez un petit sac en toile de jute. Vous approchez votre main et soudain, surgit des profondeurs de ce coffre relié à l'enfer, un python s'enroule autour de votre bras et injecte son venin dans votre sang. Votre tête se met à tourner. Des mots insensés sifflent dans vos oreilles ...print...while... len... Mais vous comprenez ce langage, le langage du python. Antoine surgit alors dans votre dos. "Ca va l'ami! Tu es contaminé maintenant! Moi aussi j'ai appris le python quand j'étais en BUT mais je dormais beaucoup en cours. Si tu m'aide à résoudre l'énigme qu'elle m'a donné, je devrais réussir à sauver les autres nains! Qu'est-ce que c'est que ce charabia?" vous tendant avec insistance un petit bout de papier arraché à la poche arrière de son très court pantalon. Vous y lisez les lignes suivantes :

```
1 #Mat est une liste a deux entrées représentant la matrice booléenne d'un graphe
2 #Mat[i][j] est la valeur de la matrice à l'intersection de la ligne i et de la colonne j
3
4 def secret(Mat, a) :
5     n=len(Mat) #Récupère le nombre de sommet du graphe représenté par Mat
6     res={}
7     i=0
8     while(i<n) :
9         res[i]={}
10        if(i<a) : lig=i
11        else : lig=i+1
12        j=0
13        while(j<n) :
14            if(j>=a) : col=j+1
15            else : col=j
16            res[i][j]=Mat[lig][col]
17            j+=1
18        i+=1
19    return res
```

1. Quelle sera la valeur de retour (l'objet mathématique associé à ce concept informatique) de l'appel `secret(Mat, 9)` pour la matrice  $\mathcal{G}$  qui est celle de cette histoire. Proposez un nom plus explicite pour cette fonction?

1

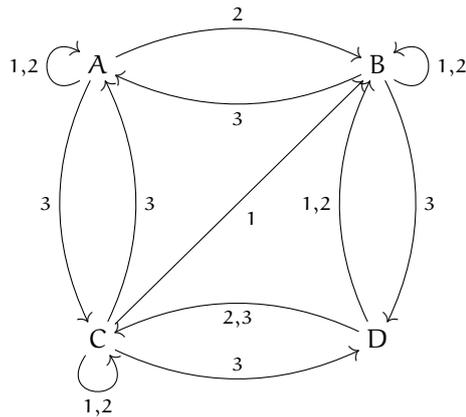
### **Antoine et les sept nains.**

Éclairé par vos lumières le dormeur Antoine, déchiffre une autre énigme à l'aide de votre pouvoir en python. Soudainement, il se fige, regardant dans le vide. Vous sentez l'air s'appesantir. Que se passe-t-il. Il ne dit mot. Vous entendez la porte grincer et vous voyez sur le sol, une ombre menaçante s'approcher. Vous n'entendez que votre propre souffle, chacun des battement de votre cœur fait vibrer toute la pièce. Vous vous retournez, chaque mouvement de votre corps semble durer une éternité, quand enfin vous comprenez que la sorcière vous a rejoints. Elle prend la parole : *"Alors tu veux jouer ? Très bien ! Mais si tu perd, je te dévorerai !"*.

Elle dispose sur le sol sept os. Des osselets humains. Elle fait deux tas. Un tas avec 4 osselets et un autre avec 3. *"Nous allons prendre chacun notre tour un osselet dans un tas ou dans les deux. Celui qui prendra le dernier sera le perdant"*. La partie commence. Faut-il prendre la main et jouer en premier ? Existe-t-il une stratégie non perdante ? Vous justifierez précisément votre raisonnement.

2

1. La sorcière disparaît dans un éclat de lumière aveuglant tel une explosion. Un sifflement sourd vous bourdonne dans les oreilles. Vous avez gagné? Au moins, vous êtes en vie. Antoine, étourdi, bégayant rétorque *"Je sais pas ce qu'il vient de se passer mais regarde, les sept osselets se sont transformés clefs !"*. Vos yeux récupérant de l'éclat de lumière vous distinguez peu à peu que sept géôles sont apparu dans le fond de la pièce. Petit à petit vos sens reviennent et vous entendez les suppliques des sept nains vous implorant de les libérer. Vous vous saisissez des clefs et vous vous apprêtez à libérer les prisonniers. *"ATTENTION"* hurle Antoine. *"Les prisons sont électrifiées"*. Il faut couper le courant. Soudain un vrombissement se fait entendre, vous voyez sortir du coffre un piédestal sur lequel est disposé trois interrupteurs numéroté 1, 2 et 3. Antoine vous explique que ces interrupteurs activent ou désactivent deux disjoncteurs. Initialement les deux disjoncteurs sont activés. Pour couper le courant, il faut qu'ils soient tous deux désactivés. Antoine vous présente l'automate non déterministe qui régit l'action des interrupteurs sur les disjoncteurs. On note A lorsque les deux disjoncteurs sont activés, B lorsque le premier est activé et le second désactivé, C inversement et D lorsque les deux sont désactivés.



- (a) Quels sont les états initiaux et finaux de cet automate. 0.5
- (b) Cet automate est-il complet? 0.5
- (c) Donner la matrice de cet automate. 0.5
- (d) Appliquer l'algorithme de détermination et donner la matrice de l'automate déterministe associé. 2
- (e) Dans quel ordre faut-il actionner les interrupteurs pour libérer les potes d'Antoine? 0.5

**Épilogue.** Les nains ont été libérés... mais qu'a-t-il bien pu se passer ensuite? 0.5