TD2 - Ensembles discrets

Ensembles Discrets

Exercice 1

On considère dans le référentiel $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$, les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d\}$. Déterminer en extension les ensembles suivants.

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $\overline{A}$
4. $\overline{B}$
5. $\mathcal{P}(A)$
6. $\mathcal{P}(\overline{B})$
7. $\mathcal{P}(A \cap B)$
8. $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(A \cap B)\Big)$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, reproduire dans un diagramme de Venn ou un tableau de Caroll les parties correspondantes.

1. A
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$
4. $\overline{A}$
5. $\overline{A \cap B}$
6. $\overline{A} \cap \overline{B}$
7. $\overline{A \cup B}$
8. $\overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice 3

Dans le référentiel $\mathcal{E} = \Big\{\varnothing, a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}\Big\}$ dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. $\varnothing \in \mathcal{E}$
2. $\varnothing \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$
3. $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$
4. $\{a, b\} \in \mathcal{E}$
5. $\{b, c\} \subseteq \mathcal{E}$
6. $c \in \mathcal{E}$
7. $b \in \mathcal{E}$
8. $\{a, b\} \subseteq \mathcal{E}$
9. $\varnothing \subseteq \mathcal{E}$
10. $\{a, \{a\}\} \subseteq \mathcal{E}$
11. $\{a\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$
12. $\{a, c\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes.

1. $A \cap (\overline{A} \cap B)$
2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
4. $A \cup (A \cap B)$
5. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$
6. $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap C \cap \overline{B}$
7. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup B \cup (\overline{B} \cap C)$
8. $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap A$

Exercice 5

Montrer que pour trois ensembles A, B, C d'un référentiel $\mathcal{E}$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Exercice 6

Que dire de deux ensembles A et B d'un référentiel $\mathcal{E}$ vérifiant $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 7

Soient A, B et C trois ensembles d'un référentiel $\mathcal{E}$.

Montrer que si $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A} \subseteq \mathsf{C}$ alors $\mathsf{A} \cap \mathsf{C} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Supposons que $\mathsf{A} \cap \mathsf{C} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Montrer alors que $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A} \subseteq \mathsf{C}$.

Exercice 8

Soient A, B et C trois ensembles d'un référentiel $\mathcal{E}$. Montrer que si $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subseteq \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$ et $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subseteq \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$ alors $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{C}$

Exercice 9

Soient A, B et C trois ensembles d'un référentiel $\mathcal{E}$.

1. Montrer que si $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A} \cap \mathsf{C}$ alors $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{B}} = \mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{C}}$.
2. En déduire que si $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{B}} = \mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{C}}$ alors $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A} \cap \mathsf{C}$.

Exercice 10

Soient A, B, C et D des ensembles d'un référentiel $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $(\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$.
2. Comparer $(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) \cap (\mathsf{C} \times \mathsf{D})$ et $(\mathsf{A} \cap \mathsf{C}) \times (\mathsf{B} \cap \mathsf{D})$.

Exercice 11

On définit l'opération $\mathsf{A} * \mathsf{B}$ comme $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{B}}$.

1. Exprimer $\overline{\mathsf{A}}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ et $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ uniquement à l'aide de l'opération $*$ (et de l'ensemble vide).
2. L'opération $*$ est-elle commutative ?
3. L'opération $*$ est-elle associative ?
4. Résoudre en X les équations ensemblistes suivantes :
   (a) $\mathsf{A} * \mathsf{X} = \mathsf{A}$.
   (b) $\mathsf{A} * \mathsf{X} = \overline{\mathsf{A}}$.

Exercice 12

Fixons un référentiel $\mathcal{E}$. Soient A et B deux partie de $\mathcal{E}$. On pose

$$\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{B}}$$

1. Représenter $\mathsf{A} - \mathsf{B}$ sur un diagramme de Venn ou de Caroll.
2. Montrer que $\mathsf{A} - \mathsf{B} = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) - \mathsf{B}$.
3. Montrer que $(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \cap (\mathsf{C} - \mathsf{D}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{C}) - (\mathsf{B} \cup \mathsf{D})$.

Exercice 13

Fixons un référentiel $\mathcal{E}$. Soient A et B deux partie de $\mathcal{E}$. On définie la **différence symétrique** de A et B, notée $\mathsf{A}\Delta\mathsf{B}$, comme la partie de E formé des éléments de $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ qui n'appartiennent pas à $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

1. (a) Représenter la situation sur un diagramme de Venn ou de Caroll.
   (b) Donner une expression de $\mathsf{A}\Delta\mathsf{B}$ à l'aide des opérations ensembliste usuelle ($\cup$, $\cap$ et $\overline{\bullet}$).
2. Dans cette question, on pose $\mathsf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathsf{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $\mathsf{C} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
   (a) Calculer $\mathsf{A}\Delta\mathsf{B}$, $\mathsf{A}\Delta\mathsf{C}$ et $\mathsf{B}\Delta\mathsf{C}$.
   (b) Comparer $(\mathsf{A} \cap \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B}\Delta\mathsf{C})$ et $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})\Delta\mathsf{C}$.
3. Simplifier $\overline{\mathsf{A}\Delta\mathsf{B}}$.
4. Calculer $\mathsf{A}\Delta\varnothing$, $\mathsf{A}\Delta\mathcal{E}$ et $\mathsf{A}\Delta\mathsf{A}$.
5. Montrer que $\mathsf{A}\Delta\mathsf{B} = \overline{\mathsf{A}}\Delta\overline{\mathsf{B}}$.

6. L'opération Δ est-elle commutative ?
7. L'opération Δ est-elle associative ?

Cardinalité

Exercice 14

On considère dans le référentiel $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$, les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d\}$. Donner le cardinal des ensembles suivants.

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $\overline{A}$
4. $\overline{B}$
5. $\mathcal{P}(A)$
6. $\mathcal{P}(\overline{B})$
7. $\mathcal{P}(A \cap B)$
8. $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(A \cap B)\Big)$

Exercice 15

Donner le cardinal de chacun des ensembles suivants.

1. $A = \Big\{a, b, (a, b)\Big\}$
2. $B = \Big\{(1, 2), 7, 9, \varnothing\Big\}$
3. $C = \Big\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}\Big\}$
4. $D = \Big\{\varnothing, (a, b), \{a, b\}, a, b, \{\varnothing\}\Big\}$
5. $E = \Big\{b, c\Big\}$
6. $F = \Big\{\{b, c\}\Big\}$
7. $G = \varnothing$
8. $H = \Big\{\varnothing\Big\}$

Exercice 16

Soient A, B, C et D quatre ensemble d'un référentiel $\mathcal{E}$.

1. Donner une relation simple entre $\#(A \cup B)$ et $\#A$, $\#B$ et $\#(A \cap B)$.
2. Donner une relation simple entre $\#(A \cup B \cup C)$ et $\#A$, $\#B$, $\#C$, $\#(A \cap B)$, $\#(A \cap C)$, $\#(B \cap C)$ et $\#(A \cap B \cap C)$.
3. Sur le même schéma, exprimer $\#(A \cup B \cup C \cup D)$.

Exercice 17

Dans une école comprenant 1100 élèves, 950 sont inscrits a cours d'espagnol, 520 au cours de russe et 250 au cours d'italien.

On précise que 400 élèves font de l'espagnol et du russe, 150 font de l'espagnol et de l'italien et 130 font du russe et de l'italien.

Tous les élèves font au moins une langue.

Combien d'élèves ne pratique qu'une seule langue ?

Exercice 18

En Papouasie, il y a des *papous* et des *pas-papous*. Parmi les *papous* il y a des *papas papous* et des *papous pas papa*. Mais il y a aussi des *papas pas papous* et des *pas papous pas papas*.

De plus, il y a des *papous pas papas à poux* et des *papas pas papous à poux*. Mais il n'y a pas de *papas papous à poux* ni de *pas papous pas papas à poux*.

Sachant qu'il y a 240 000 poux (en moyenne 10 par tête), et qu'il y a 2 fois plus de *pas papous à poux* que de *papous à poux*, déterminer le nombre de *papous pas papas à poux* et en déduire le nombre de *papas pas papous à poux*.