TD3 - Ensembles en compréhension, prédicats et quantificateurs

Ensembles en compréhension

Exercice 1

Soient les intervalles de $\mathbb{R}$: $A =]-2;1]$, $B =]-1;1[$ et $C = [2;4]$.

1. Représenter A, B et C sur la droite des nombres réels.
2. Expliciter $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B$ et $A \cap (B \cup C)$.
3. Décrire chacun des ensemble précédents en compréhension.

Exercice 2

Donner les ensembles suivants en compréhension, puis en extension ou intervalle de $\mathbb{R}$

1. Entiers relatifs dont le carré est inférieur à 30.
2. Réels dont le carré est strictement positif.
3. Solutions réelles de l'équation $(2x+1)(x-3) = 0$.
4. Solutions réelles du système $\begin{cases} x + 3y &= 7 \\ 4x - y &= 2 \end{cases}$

Exercice 3

On considère le prédicat à deux variables : $p(x,y) = (x + y = 5)$.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, exprimer sa classe en compréhension et la représenter.
2. Dans $\mathbb{N}^2$, exprimer sa classe en extension et la représenter.

Exercice 4

Donner les ensembles en compréhension suivants en extensions ou avec des intervalles de $\mathbb{R}$.

1. $= \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x^2 = 5\right\}$
2. $= \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| x^2 < 5\right\}$
3. $= \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| x^2 \leqslant 16\right\}$
4. $= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 \geqslant 16\right\}$
5. $= \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| (x \geqslant -2) \wedge (x < 3)\right\}$
6. $= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| (x \geqslant -2) \wedge (x < 3)\right\}$
7. $= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x(x+5) = 14\right\}$
8. $= \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x(2x+3) = 14\right\}$

Prédicats

Exercice 5

On considère le prédicat $p(x) = ((x^2-4)(x^2-3) = 0)$.

1. Quelle est la classe de p dans $\mathbb{N}$?
2. Quelle est la classe de p dans $\mathbb{Z}$?
3. Quelle est la classe de p dans $\mathbb{R}$?

Exercice 6

Donner la classe des prédicats suivants dans $\mathbb{R}$.

1. $5 < x < 7$
2. $-2 \leqslant x < 3$
3. $(x < 4) \wedge (x \geqslant \sqrt{2})$
4. $(x \in \mathbb{N}) \wedge (1 < x \leqslant \sqrt{2})$
5. $(x \in \varnothing) \Rightarrow (x > 2)$
6. $(x \in \varnothing) \wedge (x > 2)$
7. $(x > 2) \Rightarrow (x \in \varnothing)$
8. $(x \in \mathbb{N}) \vee (x < \sqrt{2})$
9. $(x \in \mathbb{Z}) \vee (x \geqslant 0)$
10. $(x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2)$
11. $(x \geqslant x) \Leftrightarrow (x = x)$
12. $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (2x^2 - 5x - 3 = 0)$

Exercice 7

Soients $p(x) = (x > 4)$ et $q(x) = (x < 5)$. Donner la classe des prédicats suivants dans $\mathbb{R}$.

1. $p(x)$
2. $q(x)$
3. $\neg q(x)$
4. $p(x) \vee q(x)$
5. $p(x) \wedge q(x)$
6. $p(x) \Rightarrow q(x)$
7. $q(x) \Rightarrow p(x)$
8. $q(x) \Rightarrow \neg p(x)$
9. $q(x) \Leftrightarrow \neg p(x)$
10. $\neg p(x) \Rightarrow q(x)$
11. $(x \in \varnothing) \Rightarrow p(x)$
12. $\neg q(x) \Rightarrow (x \in \varnothing)$

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les ensembles suivants :

- $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2 \leqslant x \leqslant 3\right\}$
- $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2 \leqslant y \leqslant 3\right\}$
- $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (1 \leqslant x \leqslant 4) \wedge (1 \leqslant y \leqslant 4)\right\}$

1. Déterminer C.
2. Déterminer $A \cap B$.
3. Déterminer $C \cap \overline{A \cap B}$.

Quantificateur

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}$, trouver la classe des prédicats suivants.

1. $p(x) = ((x < 4) \Rightarrow (x \leqslant 5))$
2. $q(x) = ((x > 5) \Rightarrow (x < 2))$
3. $r(x) = (x^2 \leqslant 4x)$

En déduire les valeurs de vérité des propositions suivantes.

1. $p(6)$
2. $q(2)$
3. $p(6) \Leftrightarrow q(2)$
4. $p(5) \wedge q(1)$
5. $r(1)$
6. $\forall x \; p(x)$
7. $\exists x \; p(x)$
8. $\forall x \; r(x)$
9. $\exists x \; q(x)$

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}$, trouver la classe des prédicats suivants.

1. $p(x) = (x > 1)$
2. $q(x) = (x > 2)$

En déduire les valeurs de vérité des propositions suivantes.

1. $\forall x, \; (p(x) \Rightarrow q(x))$
2. $\forall x, \; (q(x) \Rightarrow p(x))$
3. $\exists x, \; (p(x) \Rightarrow q(x))$
4. $\exists x, \; (q(x) \Rightarrow p(x))$
5. $(\forall x, \; p(x)) \Rightarrow (\forall x, \; q(x))$
6. $(\forall x, \; p(x)) \Rightarrow (\exists x, \; q(x))$
7. $(\exists x, \; p(x)) \Rightarrow (\forall x, \; q(x))$
8. $(\exists x, \; p(x)) \Rightarrow (\exists x, \; q(x))$

Exercice 11

Le paradoxe du buveur.

Dans un bar, il existe une personne tel que si cette personne boit alors tout le monde dans le bar boit.

En notant P l'ensemble des personnes du bar et $B(x)$ le prédicats "*la personne* x *boit*", énoncer le pardoxe du buveur à l'aide de quantificateur. Démontrer que la proposition obtenue est vraie.

Exercice 12

Exprimer à l'aide de quantificateur les énoncés suivants.

1. L'ensemble A est inclus dans l'ensemble B.
2. L'ensemble A est strictement inclus dans l'ensemble B.
3. L'équation $3x^2 + 2x + 1 = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
4. L'entier x est impair.
5. L'entier n est de la forme $2u + v$.
6. L'équation $x^2 = 5$ admet des solutions dans $\mathbb{N}$.
7. Tout entier naturel a pour carré la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls.
8. Certains entiers naturels ont pour carré la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls.

Exercice 13

Soit f la fonction définie de $\{1,2\} \times \{1,2,4\}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(x,y) = y^x$. Donner la valeur de vérité des propositions suivantes, écrire leur négation, et dans le cas d'une implication, écrire leur réciproque et leur contraposé.

1. $\forall x,\ \forall y,\ (x+y=4) \Rightarrow f(x,y) = 4$
2. $\exists x,\ \exists y,\ (x+y=3) \wedge f(x,y) = 2$
3. $\forall x,\ \forall y,\ (xy=4) \Rightarrow f(x,y) = 4$
4. $\forall x,\ \forall y,\ f(x,y) = 1 \Rightarrow x = y$
5. $\exists x,\ \exists y,\ \ f(x,y) = 8$
6. $\forall x,\ \forall y,\ (x=2) \Rightarrow f(x,y)$ est paire

Exercice 14

Soit f la fonction définie de $\{1,2,4\} \times \{1,4,8\}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(x,y) = x+2y$. Donner la valeur de vérité des propositions suivantes.

1. $\forall x,\ \forall y,\ f(x,y)$ est paire
2. $\forall x,\ \exists y,\ f(x,y)$ est impaire
3. $\exists x,\ \forall y,\ f(x,y)$ est paire
4. $\exists x,\ \exists y,\ f(x,y)$ est impaire
5. $\forall x,\ \forall y,\ \Big(x+y \text{ est paire } \Rightarrow f(x,y) \text{ est paire}\Big)$
6. $\forall x,\ \exists y,\ \Big(x+y=6 \Rightarrow f(x,y) \text{ est paire}\Big)$
7. $\exists x,\ \forall y,\ \Big(x+y \text{ est paire } \Rightarrow f(x,y) \text{ est paire}\Big)$
8. $\exists x,\ \exists y,\ \Big(x+y=6 \Rightarrow f(x,y) \text{ est paire}\Big)$
9. $\exists x,\ \Big(x \text{ est paire } \Rightarrow (\forall y,\ f(x,y) \text{ est paire})\Big)$
10. $\exists x,\ \Big(x \text{ est paire } \Rightarrow (\exists y,\ f(x,y) \text{ est paire})\Big)$
11. $\forall x,\ \Big(x \text{ est paire } \Rightarrow (\forall y,\ f(x,y) \text{ est impaire})\Big)$
12. $\forall x,\ \Big(x \text{ est paire } \Rightarrow (\exists y,\ f(x,y) \text{ est paire})\Big)$

Exercice 15

Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Exprimer les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs.

1. La fonction f s'annule sur I.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas constante sur I.
4. La fonction f présente un minimum sur I.

5. La fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur I.

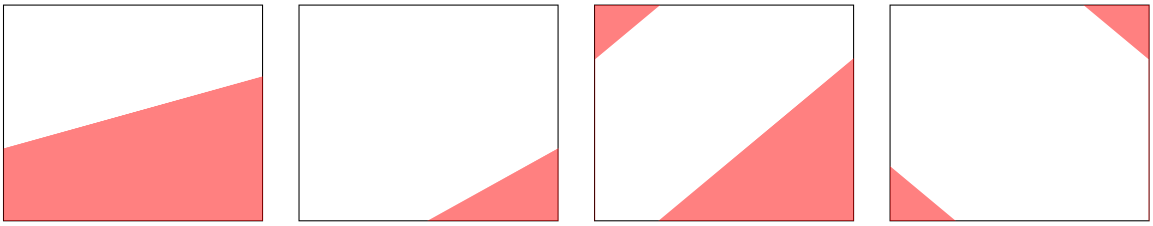
Exercice 16

Donner la valeur de vérité des proposition suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ (x+y=6) \Rightarrow ((x=1) \wedge (y=5))$

Exercice 17

Dans chacun des quatre carrés de coté 1, on a dessiné des polygones A.



Donner pour chacun des carrés la valeur de vérité des propositions suivantes.

1. $\forall x,\ \exists y,\ (x,y) \in A$
2. $\forall y,\ \exists x,\ (x,y) \in A$
3. $\exists x,\ \forall y,\ (x,y) \in A$
4. $\exists y,\ \forall y,\ (x,y) \in A$