TD6 - Sommations

Sommations

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{2} 3n$
2. $\sum_{k=0}^{3} k^2$
3. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i}$
4. $\sum_{x=1}^{3} 1-x$
5. $\sum_{y=0}^{4} 3y-2$

Exercice 2

Soit (a_k) une suite d'entier tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$. Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{6} a_k$
2. $\sum_{k=0}^{n+1} a_k$
3. $\sum_{k=0}^{2n} a_k$
4. $\sum_{k=0}^{n} 1-a_k$
5. $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$
6. $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$

Exercice 3

Écrire, à l'aide du symbole Σ, les sommes suivantes.

1. $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+14^2$
2. $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$
3. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+\cdots+2017\times 2018$
4. $3+7+11+15+\cdots+43+47$
5. $1-2+4-8+16-32+64-128+256-512+1024-2048$
6. $1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1$
7. $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14+15$

Exercice 4

Calculer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton.

1. $(1+2x)^4$
2. $(x-2)^5$
3. $(x+1)^6$
4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$
5. $\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1}$
6. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^n$
7. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$

Exercice 5

1. Montrer que $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. (a) Appliquer la formule du binôme à $(1+x)^n$.

   (b) En utilisant la formule du produit de somme déterminer les entiers c_k tel que $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$.
3. Appliquer la formule du binôme à $(1+x)^{2n}$

4. En déduire une valeur de $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Exercice 6

Quel est le coefficient de x^{17} dans l'expression $(1+x^5+x^7)^{20}$?

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^{5} 2$
2. $\sum_{k=0}^{56} 2n$
3. $\sum_{k=0}^{567} n^2$
4. $\sum_{k=0}^{56} n^2+3n$
5. $\sum_{k=0}^{333} (-1)^k$
6. $\sum_{k=7}^{123} (3k-1)$
7. $\sum_{k=1}^{55} 2^{2k}$
8. $\sum_{k=0}^{11} \frac{1}{3^k}$

Exercice 8

1. Rappeler la valeur de $\sum_{p=0}^{n} p^2$.
2. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{n} (2p)^2$.
3. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{n} (2p+1)^2$.
4. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{2n+1} (-1)^p p^2$.

Exercice 9

Déterminer deux réels a et b tel que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{i=17}^{2017} \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 10

Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{2}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{666} \frac{2}{4n^2-1}$.

Exercice 11

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{i=99}^{999} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 12

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} i+j$
2. $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} ij$
3. $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} (i+j)^2$
4. $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} i+1$
5. $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} \min(i,j)$