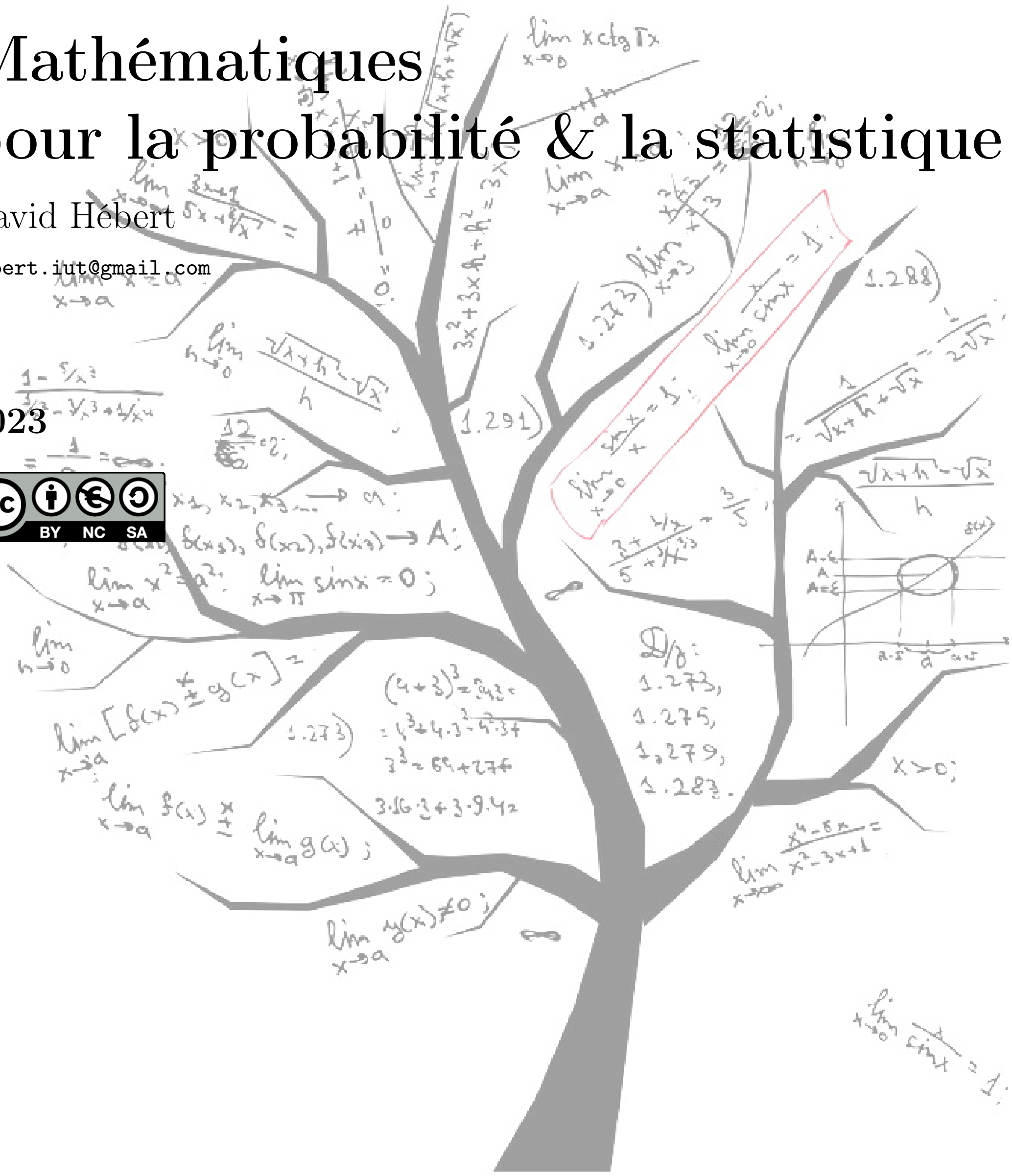
Mathématiques pour la probabilité & la statistique

David Hébert

hebert.iut@gmail.com



2023

Table des matières

1. Logique propositionnelle

Proposition

Suis-je sûr de douter ?

Est-ce vrai ou est-ce faux ? Si je n'en doute pas c'est que je suis certain de douter. Si j'en doute c'est que j'envisage de ne pas douter.

Cette phrase n'est donc ni vraie ni fausse et vraie et fausse en même temps. Une sorte de phrase quantique !

Lorsqu'on va voir un mathématicien, plus précisément un logicien, pour lui demander de rendre des comptes sur ce phénomène, il répond calmement que cette phrase ne rentre pas dans le cadre des phrases étudiables. Lorsque l'on tombe sur ce genre de paradoxe, c'est qu'il y a un problème de cadrage. Alors cadrons un peu tout ça.

Définition

Une **proposition** est un énoncé dont on peut dire sans ambigüité qu'il est vrai ou qu'il est faux.

Ainsi la proposition $p =$"$2+2=4$" est une proposition vraie. De même $q =$"$2+2=5$" est une proposition fausse. Mais $r =$"Suis-je sûr de douter ?" n'est pas une proposition de sorte que la question de la valeur de vérité (vrai ou faux) ne se pose pas. Tout comme $s =$"$x+1>0$". C'est parfois vrai, parfois faux. Cela dépend de x. Il y a donc ambigüité, ce n'est donc pas une proposition.

Maintenant que le cadre est placé nous pouvons enrober de quelques définitions et outils.

Définition

- Une **tautologie** est un énoncé toujours vrai. On le note $\top$ (ou 1 ou $\mathcal{V}$).
- Une **contradiction** est un énoncé toujours faux. On le note $\perp$ (ou 0 ou $\mathcal{F}$).

Connecteurs logique et tables de vérité

Pour travailler avec les propositions et définir des outils de calculs, on utilise des *tables de vérité*. Il s'agit de table décrivant toutes les combinaisons de vérité possible d'une expression propositionnelle.

Définition

On définit le connecteur logique **OU** entre deux propositions p et q, noté $p \vee q$, la proposition définie par la table de vérité ci-contre.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Définition

On définit le connecteur logique **ET** entre deux propositions p et q, noté $p \wedge q$, la proposition définie par la table de vérité ci-contre.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Définition

On définit le **NON**, la négation logique d'une proposition p, noté $\neg p$, par la table de vérité ci-contre.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Le parenthésage est important. Dressons la table de vérité de l'expression (bien définie) suivante :

$$E = [p \vee (r \wedge \neg(q \wedge p))] \wedge (\neg r)$$

L'expression $E = p \vee q \wedge r$ n'est pas bien définie. Nous ne savons pas quel connecteur appliquer en premier ni même si cela à une incidence sur le résultat. Cette expression peut soit se comprendre comme $E_1 = p \vee (q \wedge r)$ ou $E_2 = (p \vee q) \wedge r$. Comparons leur table de vérité :

			A	B	C	D		$D \wedge \neg r$
p	q	r	$q \wedge p$	$\neg A$	$r \wedge B$	$p \vee C$	$\neg r$	E
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0

p	q	r	$q \wedge r$	E_1	$p \vee q$	E_2
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Les tables de vérités de E_1 et E_2 sont différentes ce qui laisse à penser que ces expressions le sont aussi. Cela motive la définition suivante.

Définition

Deux propositions p et q sont égales si elles ont les mêmes tables de vérité. Dans ce cas on note $p = q$.

CANDIMATICA©

Passer par les tables de vérité peut s'avérer fastidieux. On observe en effet qu'une expression propositionnelle concernant trois propositions fait apparaitre une table de vérité à 8 lignes. On peut montrer qu'une expression impliquant n propositions donnera une table de vérité de 2^n lignes. C'est à dire que si dix propositions sont impliquées alors la table de vérité aura plus de mille lignes ! Vite, un théorème.

Théorème CANDIMATICA

Commutativité. $p \vee q = q \vee p$ et $p \wedge q = q \wedge p$.

Associativité. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ et $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) etr$.

Neutralité. $p \wedge \top = p$ et $p \vee \bot = p$.

Distributivité. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ et $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Idempotence. $p \vee p = p$ et $p \wedge p = p$.

Morgan. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ et $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

Absorption 1. $p \vee \top = \top$ et $p \wedge \bot = \bot$.

Tiers exclus. $p \vee \neg p = \top$.

Involution. $\neg(\neg p) = p$.

Contradiction. $p \wedge \neg p = \bot$.

Absoption 2. $p \vee (p \wedge q) = p$ et $p \wedge (p \vee q) = p$.

Le mot Candimatica est purement mnémotechnique. Il m'a été suggéré par Mahmoud.

Démonstration. Il s'agit de comparer les tables de vérité. Nous n'allons pas le faire pour tous. Détaillons une des deux égalités de Morgan[1] et une des deux propriétés d'absorption 2.

1. Auguste de Morgan (1806-1871), mathématicien et logicien britannique.

		A		B	C	
p	q	$p \wedge q$	$\neg A$	$\neg p$	$\neg q$	$B \vee C$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

On observe ainsi que $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

		A	
p	q	$p \wedge q$	$p \vee A$
0	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

On observe que $p \vee (p \wedge q) = p$

Il en va de même pour les autres propriétés. □

La propriété de l'associativité permet en entre autre de considérer des connections logique entre plus de deux propositions. Tant que le connecteur est le même la priorité des opérations n'est pas problématique. On se permettra alors d'écrire $p \vee q \vee r$ sous entendu qu'il s'agit de $(p \vee q) \vee r$ et qu'il appartient à chacun de déplacer les parenthèses à sa convenance.

Il est souvent plus facile de passer par ces règles que de revenir aux calculs sur les tables de vérité. Comme l'exemple suivant l'illustre.

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \wedge [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] &= (p \wedge q) \wedge [\neg p \wedge (q \vee \neg q)] \qquad \text{factorisation (distributivité)} \\
&= (p \wedge q) \wedge [\neg p \wedge \top] \qquad \text{tiers exclus} \\
&= (p \wedge q) \wedge \neg p \qquad \text{neutralité} \\
&= (p \wedge \neg p) \wedge q \qquad \text{associativité et commutativité} \\
&= \bot \wedge q \qquad \text{contradiction} \\
&= \bot \qquad \text{absorption 1}
\end{aligned}$$

Implication

Il s'agit à présent de mesurer le *raisonnement*. C'est à dire la mesure que partant d'une proposition p, dont la véracité n'est pas à établir, on arrive à une proposition q. Ce que l'on cherche à mesurer est le raisonnement, la méthode utilisée. Il s'agit de l'implication.

Définition

On définit l'**implication** d'une proposition p vers une proposition q, notée $p \Rightarrow q$, par la table de vérité ci-contre.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Partant d'une proposition p vraie, par un raisonnement logique, c'est à dire sans digression et fausseté, on ne peut arriver qu'à démontrer une proposition vraie. De sorte que $1 \Rightarrow 1$ est vrai et $1 \Rightarrow 0$ est faux. Mais lorsque le point de départ du raisonnement est faux, on peut faire n'importe quoi et arriver à un énoncé qui peut-être vrai comme faux tout en suivant un raisonnement correct ; cela traduit que $0 \Rightarrow 0$ et $0 \Rightarrow 1$ sont tous deux vrais.

L'implication n'est pas vraiment un nouveau connecteur logique. D'une part, il a des propriétés très différentes du OU et du ET, ne serait-ce que la commutativité ($(p \Rightarrow q) \neq (q \Rightarrow p)$) mais d'autre part le théorème suivant permet de s'y ramener.

Théorème

$$(p \Rightarrow q) = \neg p \vee q$$

Démonstration.

p	q	A $\neg p$	$A \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

On observe que la table de $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont identiques. □

Définition

- La **réciproque** de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$.
- La **contraposé** de $p \Rightarrow q$ est $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Proposition 1.0.1

Une implication et sa contraposé ont la même valeur de vérité.

Démonstration. $(\neg q \Rightarrow \neg p) = (\neg(\neg q) \vee \neg p) = (q \vee \neg p) = (\neg p \vee q) = (p \Rightarrow q)$ par involution et commutativité. □

Considérons p="n^2 est impaire" et q="n est impaire". Tout d'abord ce ne sont pas des propositions car elles dépendent toutes les deux d'un paramètre n. Ce n'est pas loin d'être des propositions : dès que l'on donne une valeur à n on peut dire sans ambigüité leur valeur de vérité. Nous verrons très bientôt que nous pouvons nous permettre de telle considération (il s'agit de prédicat). Pour cet exemple, faisons comme s'il s'agissait de bien belle proposition.

Si nous souhaitons démontrer que tout nombre dont le carré est impaire est forcément impaire, il faut logiquement montrer que $p \Rightarrow q$. C'est un théorème difficile de prime abord. Mais le résultat précédent nous indique qu'il suffit de montrer sa contraposé $\neg q \Rightarrow \neg p$ c'est à dire que tout nombre paire a un carré paire ce qui est laissé au lecteur (et ben plus facile).

Un tel raisonnement s'appelle un *raisonnement par contraposé*[2].

Proposition

Si $(p \wedge \neg q) = \perp$ alors $(p \Rightarrow q) = \top$.

Démonstration. En effet, si $(p \wedge \neg q) = \perp$ alors en prenant la négation logique des deux cotés de cette égalité on a $\neg(p \wedge \neg q) = \top$. La propriété de Morgan et l'involution donne $\top = \neg p \vee \neg\neg q = \neg p \vee q = p \Rightarrow q$. □

Ce résultat permet de démontrer le *raisonnement par l'absurde*. Lorsque l'on souhaite démontrer que $p \Rightarrow q$ alors on montre que partant de p et $\neg q$ il y a une contradiction, c'est-à-dire $p \wedge \neg q = \perp$.

2. Original...

Equivalence

Pour finir le *si et seulement si*.

Définition

On définit l'**équivalence** entre deux propositions p et q, notée $p \Leftrightarrow q$, par la table de vérité ci-contre.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Théorème

$$(p \Leftrightarrow q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Le précédent résultat sur l'implication permet par ailleurs d'écrire $(p \Leftrightarrow q) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

Démonstration. On laisse le soin au lecteur de comparer les tables de vérité. $\square$

Axiomes

Un ensemble est une boite avec des trucs dedans. Telle est la version simpliste et suffisante d'un ensemble. Suffisante pendant un temps, et les mathématiciens faisaient à peu près n'importe quoi avec. Arriva un jour ou cette notion enfantine devint beaucoup trop problématique et on s'aperçut finalement que pour faire bien on ne pouvait pas faire n'importe quoi. Le célèbre *Paradoxe du barbier* de Bertran RUSSELL en est l'exemple emblématique :

> Dans une ville, un barbier rase (uniquement) tous les hommes qui ne se rasent pas eux-même.
> Qui rase le barbier ?

Pour formaliser la notion d'ensemble (et ainsi esquiver les paradoxes), plusieurs tentatives d'axiomatisation ont été proposées. La plus connue, celle que nous adopteront, est la théorie ZFC pour Zermelo, Frenkel avec l'axiome du Choix.

Définition

Un **ensemble** X est une collection d'**élément**. Un élément x appartenant à X est noté

$$x \in X$$

Les ensembles sont soumis aux axiomes suivants :

Axiome d'extentionnalité. Deux ensembles avec les même éléments sont égaux.

Axiome de l'ensemble vide. Il existe un ensemble sans élément appellé l'**ensemble vide** et généralement noté $\varnothing$.

Axiome de la paire. Si X et Y sont deux ensembles, il existe un ensemble avec ces deux ensembles comme élément. On le note $\{X, Y\}$.

Axiome de la réunion. On vera plus tard.

Axiome de l'ensemble des parties. On vera plus tard.

Axiome de l'infini. Il existe un ensemble X tel que $\varnothing \in X$ et tel que si $x \in X$ alors x et les éléments de x sont des éléments de X.

Schéma d'axiomes de compréhension. On vera plus tard.

Axiome du choix. Étant donné un ensemble X non vide d'ensemble non vide, il existe un ensemble, appelé ensemble de choix, contenant exactement un élément de chaque élément de X.

Plusieurs axiomes sont laissés pour plus tard. Nous les détaillerons dans la suite de ce cours. Mais la majorité de ces axiomes sont très naturels, dans le sens où ils ne sont pas contre nature à la logique classique.

L'axiome du choix est beaucoup plus problématique : dans une version simple il stipule qu'étant donné plein d'ensemble, on peut choisir un élément dans chaque ensemble. Ce qui est formellement facile lorsqu'on dispose d'un nombre fini d'ensemble mais est plus compliqué à imaginer avec une infinité. Cela donne naissance à des "paradoxes" qui n'en sont pas. Comme par exemple le paradoxe de Banach-Tarski qui utilise l'axiome du choix : il existe un moyen de découper une boule en 5 morceaux de tel manière qu'un réassemblement de ces morceaux permette d'obtenir deux boules strictement identique à la première. Ce résultat contre nature n'en reste pas moins un théorème c'est à dire un énoncé démontré par un raisonnement logique, donc indiscutablement vrai. Dans le cœur de la preuve il y a l'axiome du choix qui permet de choisir des éléments dans un ensemble sans forcement maitriser ces choix. Ainsi même si l'énoncé du paradoxe semble faire croire que l'axiome du choix est faux, un œil bienfaisant sur la démonstration permet de comprendre que c'est "mathématiquement" possible mais irréalisable dans la pratique. Cela suffit à certain pour considérer l'axiome du choix et donc la théorie ZFC. D'autre par contre ne vont pas l'admettre et travailler avec la théorie ZF...

Quoiqu'il en soit c'est avec ces axiomes et uniquement eux que l'on construit les ensembles classiques. Partons du commencement avec $\varnothing$, l'ensemble vide (qui ne contient aucun élément). En utilisant l'axiome de la paire, on construit alors l'ensemble $\{\varnothing\}$ qui est donc un ensemble composé d'un élément qui est l'ensemble vide. En utilisant encore l'axiome de la paire on construit l'ensemble $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. En continuant de la sorte jusqu'à l'infini, ce qui est possible d'après l'axiome de l'infini on construit un ensemble

$$\left\{ \underbrace{\varnothing}_{0}, \underbrace{\{\varnothing\}}_{1}, \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}_{2}, \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}_{3}, \ldots \right\}$$

Cet ensemble est communément noté $\mathbb{N}$. Ainsi le nombre 3 manipulé depuis toujours est en fait l'ensemble $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Dans la pratique que nous ferons de la théorie des ensembles nous considérons toujours un **référentiel**, c'est un dire un ensemble de base dont l'existence et la construction sont admises. On le notera dans la pratique $\mathcal{E}$. Toutes les définitions et notations seront relatives à ce référentiel. En particulier tous les ensembles que nous manipulerons seront des sous-ensembles de $\mathcal{E}$.

Définition

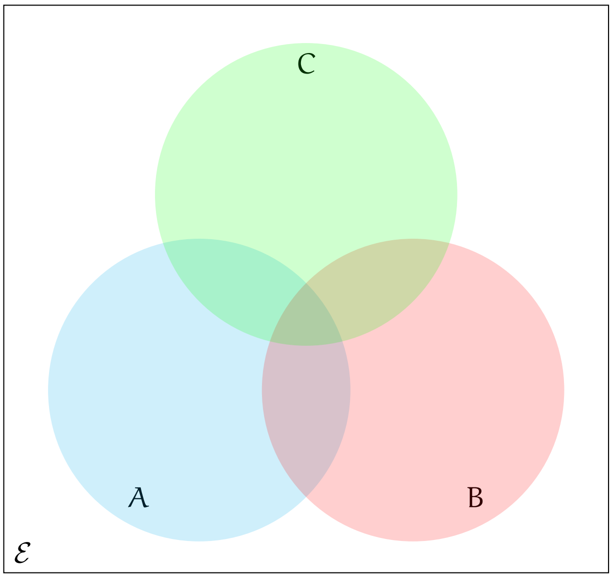
On dira que A est un **sous-ensemble** de B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note

$$A \subseteq B$$

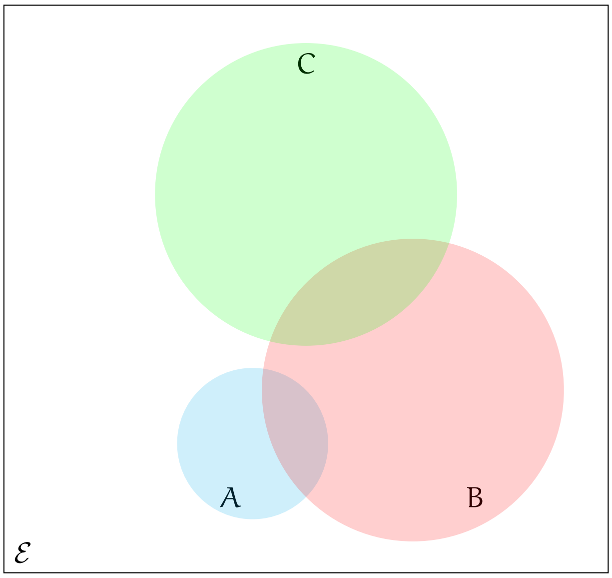
Par exemple $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, lui même un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, lui même un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, lui même un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, lui même un sous-ensemble de $\mathbb{H}$.

Représentation

L'outil de prédilection en théorie des ensembles est le diagramme de Venn [3]. Il consiste à placer les différents ensembles que l'on souhaite combiner comme des *patates* [4]. Il faut cependant faire attention, il faut, en générale, représenter tous les cas de figure possible.



Bon diagramme de Venn



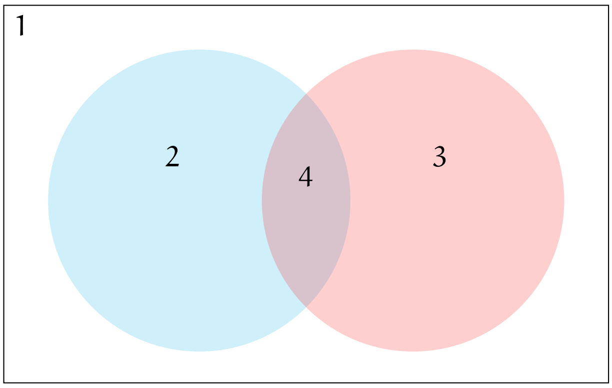
Mauvais diagramme de Venn

Proposition

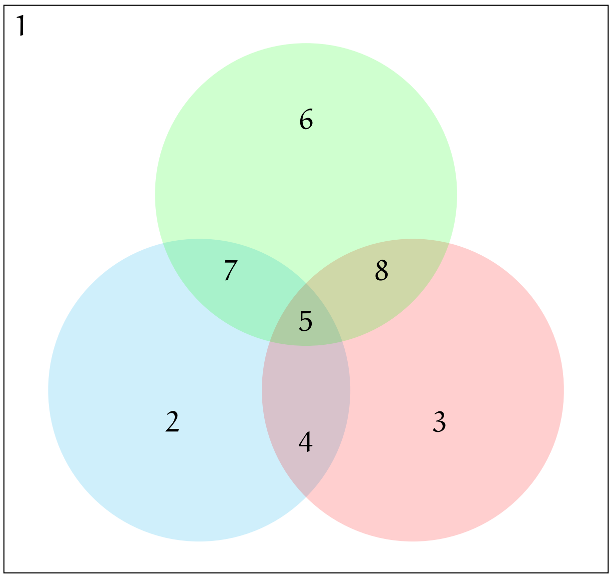
Un diagramme de Venn faisant intervenir n ensembles différents, découpe le référentiel en 2^n zone.

Démonstration. Ce résultat se démontre par récurrence sur n ce qui n'est pas le lieu ici. □

3. John Venn (1834-1923) est un mathématicien britannique.
4. On parle d'ailleurs de patatoïdes.



Deux ensembles partagent $\mathcal{E}$ en 4 zones



Trois ensembles partagent $\mathcal{E}$ en 8 zones

Peut-être que les curieux pourraient s'intéresser à Newroz...

Le calcul avec les diagrammes de Venn, permet assez souvent de représenter des configurations d'ensembles et d'observer des résultats. Il existe deux manières de définir/utiliser les ensembles :

en extension. Dans cette configuration, on décrit l'ensemble par les éléments qui le compose, entre accolade, comme dans l'exemple suivant :

$$A = \{a, 1, \text{"bonjour"}, \pi\}$$

Il y a deux règles a respecter dans ce cas :

1. L'ordre des éléments ne compte pas (c'est en fait l'axiome d'extentionnalité).

$$\{a, 1, \text{"bonjour"}, \pi\} = \{1, a, \text{"bonjour"}, \pi\}$$

2. On ne répète pas le même éléments.

$$\{a, 1, 1, 1, \text{"bonjour"}, \pi\} = \{a, 1, \text{"bonjour"}, \pi\}$$

en compréhension. Cela est une conséquence de l'axiome du schéma d'axiomes en compréhension. On défini un ensemble par la propriété qui le caractérise (qui permet de le *comprendre*).

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x + 1 < 0\right\}$$

Nous donnerons plus de détails sur les ensembles en compréhension dans le chapitre sur les prédicats.

Opérations

Il existe trois opérations élémentaires sur les ensembles. On peut en définir également d'autre mais elles se ramènes souvent à s'interpréter avec ces trois suivantes.

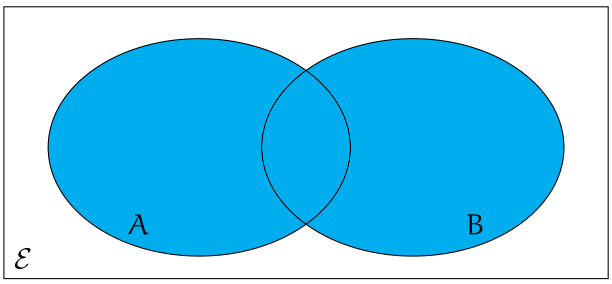
On fixe un référentiel $\mathcal{E}$. C'est entre autre l'axiome de la réunion qui justifie la première définition. Les autres découlent de celle-ci.

Définition

L'**union** de deux ensembles A et B, notée

$$A \cup B$$

est le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des éléments qui appartiennent soit à A soit à B.

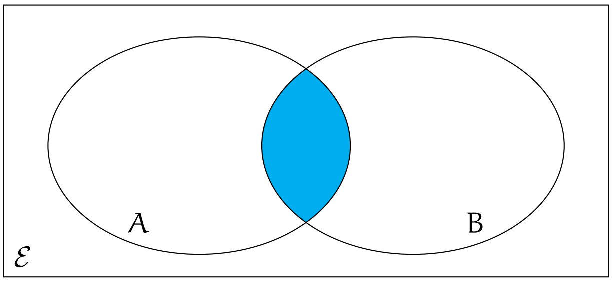


Définition

L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée

$$A \cap B$$

est le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

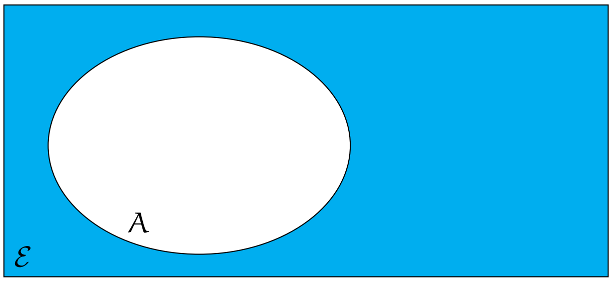


Définition

Le **complémentaire** de A, noté

$$\overline{A}$$

est le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des éléments qui ne sont pas dans A.



Le complémentaire est toujours relatif au référentiel. Il est parfois nécessaire de le préciser. On note alors $\complement_{\mathcal{E}} A$ (nous pourrons nous passer de cette notation).

CANDIMATICA©

Il peut être parfois fastidieux de faire des diagrammes de Venn. Par exemple le diagramme de Venn à 5 ensembles est d'une part assez difficile à construire et d'autre part, un tel diagramme est assez peu élégant. On peut travailler avec les ensembles en s'appuyant sur des résultats bien connus, résumés dans l'acronyme *CANDIMATICA*. On fixe 3 trois ensembles A, B et C d'un même référentiel $\mathcal{E}$.

Théorème CANDIMATICA

Commutativité. $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.

Associativité. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Neutralité. $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap \mathcal{E} = A$.

Distributivité. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Idempotence. $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.

Morgan. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Absorption 1. $A \cup \mathcal{E} = \mathcal{E}$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Tiers exclus. $A \cup \overline{A} = \mathcal{E}$.

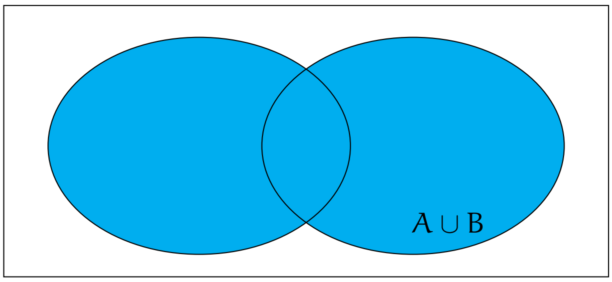
Involution. $\overline{\overline{A}} = A$.

Contradiction. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

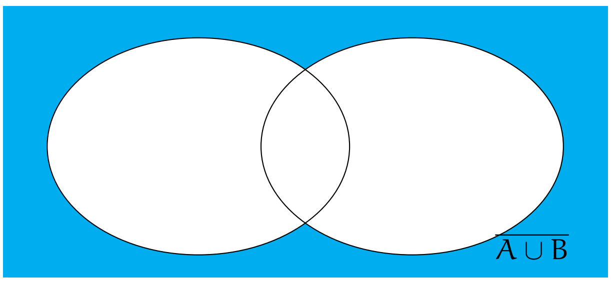
Absoption 2. $A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$.

Démonstration. On peut par exemple comparer les diagrammes de Venn et vérifier qu'ils couvrent les même zones. Vérifions une des propriétés de Morgan.

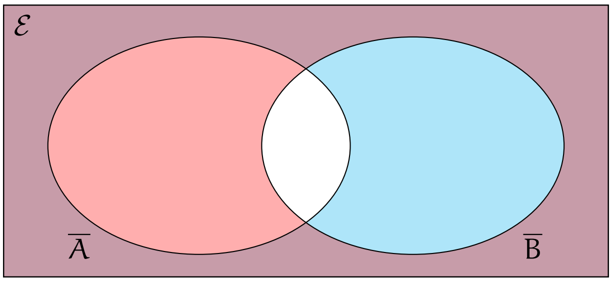
Voici le diagramme de $A \cup B$



Le complémentaire est donc



Colorons $\overline{A}$ (en bleue) et $\overline{B}$ (en rouge).



On observe alors que l'intersection de ces deux ensembles est bien $\overline{A \cup B}$.

$\square$

Ensemble des parties

L'axiome de l'ensemble des parties justifie la définition suivante.

Définition

Pour un ensemble A, on note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq A\}$$

Par exemple si $A = \{a, b\}$ alors

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Si $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ alors

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$$

Cardinalité

Définition

La **cardinalité** d'un ensemble A, noté $\sharp A$ (ou parfois $|A|$ ou $\mathtt{Card}(A)$) est le nombre d'élément de A.

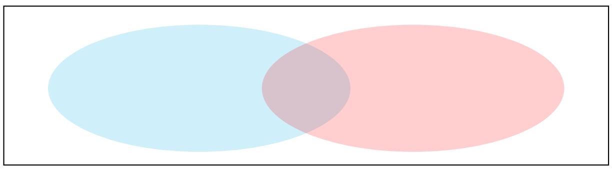
Ainsi, si $A = \{a, b, c\}$ alors $\sharp A = 3$.

Proposition

Soient A et B deux ensembles.

$$\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B - \sharp(A \cap B)$$

Démonstration.



Si on compte $\sharp A + \sharp B$ les éléments de $A \cap B$ on été compté deux fois (une fois dans A et une fois dans B) de sorte que $\sharp A + \sharp B - \sharp(A \cap B)$ compte le nombre d'élément de $A \cup B$.

$\square$

Proposition

Soit A un ensemble.

$$\sharp\mathcal{P}(A) = 2^{\sharp A}$$

Démonstration. Il s'agit de raisonner par récurrence sur $\sharp A$. $\square$

Prédicats

L'énoncé "$x+1 < 0$" n'est pas une proposition, parce qu'il y a ambiguïté sur la valeur de vérité. Cependant lorsque l'on remplace x par n'importe quel nombre réel cela deviens une proposition. Cela motive la définition de prédicat.

Définition

Un **prédicat** sur un ensemble $\mathcal{E}$ est un énoncé $p(x)$ dépendant d'un paramètre x, de sorte qu'en remplaçant x par n'importe quelle valeurs $a \in \mathcal{E}$, $p(a)$ est une proposition

Ainsi $p(x) =$ "$x + 1 < 0$" est un prédicat sur $\mathbb{R}$ de sorte que $p(1)$ est faux, comme $p(0)$ ou $p(-1)$ mais $p(-\pi)$ est vrai.

Définition

Soit p un prédicat sur un ensemble $\mathcal{E}$. La **classe** de p sur $\mathcal{E}$, noté $\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p)$ est l'ensemble des valeurs de $\mathcal{E}$ tel que le prédicat soit vrai.

$$\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) = \left\{x \in \mathcal{E} \middle| p(x) = \top\right\}$$

Avec notre exemple de $p(x) =$ "$x + 1 < 0$", on observe que $\mathtt{Cl}_{\mathbb{R}}(p) =]-\infty; -1[$:

$$]-\infty; -1[= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| "x + 1 < 0" = \top\right\}$$

Dans la pratique on ne note pas $\top$, il est sous-entendu qu'il n'y a que la valeur de vérité vraie qui nous intéresse, de sorte que l'on préfère la notation

$$]-\infty; -1[= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x + 1 < 0\right\}$$

Une telle notation rentre dans le cadre du schéma d'axiome en compréhension de la théorie des ensembles. Ce schéma d'axiome dis en qu'une telle considération et possible et bien construite.

Pont entre proposition et ensemble

D'un coté nous avons la théorie des propositions avec sa batterie de propriétés (candimatica) et de l'autre la théorie des ensembles avec aussi ses propriété (candimatica). Les prédicats se trouvent à l'intersection de ces deux théories et le théorème suivant en forme en quelque sorte le pont

Théorème

Soient p et q deux prédicats définis sur un ensemble $\mathcal{E}$.

1. $\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p \vee q) = \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) \cup \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(q)$
2. $\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p \wedge q) = \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) \cap \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(q)$
3. $\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(\neg p) = \overline{\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p)}$
4. $\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p \Rightarrow q) = \overline{\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p)} \cup \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(q)$
5. $\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p \Leftrightarrow q) = \left(\overline{\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p)} \cup \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(q)\right) \cap \left(\overline{\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(q)} \cup \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p)\right)$

Démonstration. C'est une conséquence triviale des définitions et constructions □

Prenons pas exemple $p(x) =$ "$x > 0$" et $q(x) =$ "$x \leqslant 1$". D'après ce théorème :

$$\begin{aligned}
\mathtt{Cl}_{\mathbb{R}}(p \Rightarrow q) &= \overline{\mathtt{Cl}_{\mathbb{R}}(x > 0)} \cup \mathtt{Cl}_{\mathbb{R}}(x \leqslant 1) \\
&= \overline{]0;+\infty[} \cup]-\infty;1] \\
&=]-\infty;0] \cup]-\infty;1] \\
&=]-\infty;0]
\end{aligned}$$

Cela signifie que pour tout les $x \in]-\infty;0]$ le prédicat "$x > 0$" $\Rightarrow$ "$w \leqslant 1$" est vrai. En particulier, si $x = -12$ (la première proposition de cette implication est fausse, donc l'implication est vrai).

Quantificateurs

Il existe un outil permettant de transformer les prédicats en propositions. Il s'agit des quantificateurs. Comme leur nom l'indique, ils vont *quantifier* les prédicats. Il s'agit donc de savoir si cette quantification est vraie ou fausse ; on a donc une proposition. Il existe deux quantificateurs : l'universel et l'existentiel.

Définition

Soit p un prédicat sur un ensemble $\mathcal{E}$. Le **quantificateur universel**, noté $\forall$ (prononcer *quelque soit* ou *pour tout*), transforme un prédicat $p(x)$ en proposition $\forall x, p(x)$. De plus

$$(\forall x, p(x)) = \top \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) = \mathcal{E}$$

Ainsi la proposition $\forall x, p(x)$ est vrai si et seulement si la classe de p est le référentiel d'étude. Dans la pratique, le référentiel est sous-entendu, on ne le précise pas. Il peut arriver qu'il soit nécessaire de le préciser, on note alors $\forall x \in \mathcal{E},\ p(x)$. Considérons le prédicat $p(x) =$ "$x \geqslant 0$". La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x)$ est fausse tandis que $\forall x \in \mathbb{N},\ p(x)$ est vraie.

Définition

Soit p un prédicat sur un ensemble $\mathcal{E}$. Le **quantificateur existentiel**, noté $\exists$ (prononcer *il existe*), transforme un prédicat $p(x)$ en proposition $\exists x, p(x)$. De plus

$$(\exists x, p(x)) = \top \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) \neq \varnothing$$

Comme précédemment, si cela est nécessaire, on précise le référentiel d'étude.
Par exemple $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est une proposition fausse tandis que $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 < 0$ est vraie.
Le théorème suivant connecte ces deux quantificateurs et va justifier le *raisonnement par contre-exemple*.

Théorème

$$\neg(\forall x, p(x)) = (\exists x, \neg p(x)) \qquad\qquad \neg(\exists x, p(x)) = (\forall x, \neg p(x))$$

Démonstration.

Le second énoncé est la négation du premier (utilisé avec de l'involution). Démontrons alors le premier.

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x, p(x)) &= \neg(\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) = \mathcal{E}) \\
&= (\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p) \neq \mathcal{E}) \\
&= \left(\overline{\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(p)} \neq \varnothing\right) \\
&= (\mathtt{Cl}_{\mathcal{E}}(\neg p) \neq \varnothing) \\
&= (\exists x, \neg p(x))
\end{aligned}$$

$\square$

Ainsi lorsque l'on veut montrer que $\forall x, p(x)$ est faux, il suffit de montrer qu'il existe un x tel que $p(x)$ soit faux (c'est à dire $\exists x, \neg p(x)$).

4. Généralités sur les suites

Considérons les nombres suivants :

$$0 \ 1 \ 3 \ 7 \ 15 \ 31 \ 63 \ \cdots$$

Pour passer d'un terme à l'autre on double le chiffre et on ajoute 1. Précisément si x est un nombre alors le nombre suivant est $2x+1$.

Les *suites* ont pour but de formaliser et d'étudier ce type de comportement.

Définition

Une **suite numérique réelle** est la donnée d'un ensemble de nombre réel indexé par le les entiers. Si u est une suite on note u_n son n-ième terme.

Lorsque l'on définie une suite on peut le faire de deux manières.

Suite explicite. Une telle définition signifie que l'on peut déterminer u_n en fonction de n. Par exemple la suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n + n$. Dans une telle définition, il suffit de remplacer, comme pour une fonction, le n par 64 pour calculer le 64-ième terme de la suite : $u_{64} = (-1)^{64} + 64 = 65$.

Suite récurrente. Une telle définition signifie que pour déterminer le 64-ième terme de la suite, il faut passer par la détermination d'un ou plusieurs terme précédents. Par exemple la suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3u_{n-1} - 1$. Dans une telle définition il est nécessaire de préciser un point de départ de la récursion en indiquant par exemple une valeur de u_0. Par exemple $u_0 = 1$. Alors dans ce cas $u_1 = 3u_0 - 1 = 3.1 - 1 = 2$, $u_2 = 3u_1 - 1 = 3.2 - 1 = 5$ etc. Pour déterminer u_{64} il est donc nécessaire de passer par le calcul de u_{63}.

Dans l'exemple de l'introduction on peut dire que la suite de nombre est une suite numérique réel définie par $u_0 = 0$ et $u_n = 2u_{n-1} + 1$.

L'un des objectifs de l'étude de suite est de passer de définition récurrente à définition explicite. Par exemple, la suite de Fibonacci est définie de manière récurrente par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (on fait la somme des deux derniers terme pour obtenir le suivant). Grâce à l'étude des suites on peut démontrer (avec un peu d'effort) que la définition explicite de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Dans cette partie nous allons nous donner quelques éléments d'études des suites.

Variations

Définition

1. On dira qu'une suite u est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On dira qu'une suite u est *strictement croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
3. On dira qu'une suite u est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
4. On dira qu'une suite u est *strictement décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

Dans la pratique on dispose de deux méthodes pour étudier les variations d'une suite.

Première méthode. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si cette différence est positive alors la suite est croissante, si elle est négative elle est décroissante. Prenons par exemple la suite $u_n = n^2 + 1$ alors $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ mais puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $2n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite u est strictement croissante.

Deuxième méthode. Cette méthode ne s'applique que lorsque la suite est strictement positive (quelque soit le n, $u_n > 0$). En effet, si u_n ne s'annule pas, on peut diviser. Dans ce cas on étudie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare avec 1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante. Regardons par exemple la suite $u_n = 2^n$ alors $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$ et la suite est strictement croissante.

Qu'en est-il des variations de la suite de l'introduction : $u_0 = 0$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$? Il est évident que la suite u_n est toujours positive, de plus $u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1 \geqslant 0 + 1 > 0$. Donc la suite u est strictement croissante.

Limites

La limite d'une suite est toujours a limite en $+\infty$. Lorsque la suite est définit de manière explicite, on raisonne comme pour les fonctions.

Par exemple si la suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Dans la pratique, puisque le calcul des suites n'est qu'en $+\infty$ on note simplement $\lim u_n$ au lieu de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Proposition

Soient u, v et w trois suites numérique.

1. (Théorème des gendarmes) Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ pour tout n assez grand et si $\lim v_n = l = \lim w_n$ alors $\lim u_n = l$.
2. Si $v_n \leqslant u_n$ pour tout n assez grand et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.
3. Si $u_n \leqslant w_n$ pour tout n assez grand et si $\lim w_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

On peut reformuler ces propriétés à l'aide de quantificateur. Tout d'abord *pour* n *assez grand* se traduit par :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N$$

La proposition suivante s'écrit alors formellement de la manière suivante.

1.
$$\left.\begin{array}{ll} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N & v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ & \lim v_n = l \\ & \lim w_n = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = l$$

2.
$$\left.\begin{array}{ll} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N & v_n \leqslant u_n \\ & \lim v_n = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = +\infty$$

3.
$$\left.\begin{array}{ll} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N & u_n \leqslant w_n \\ & \lim w_n = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = -\infty$$

Considérons par exemple la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ de manière explicite par $u_n = (-1)^n + n$. Le "problème" de cette suite est que $(-1)^n$ n'admet pas de limite (car pour n paire $(-1)^n = +1$ et sur les impaires $(-1)^n = -1$). Cependant on a toujours $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. En ajoutant n à ces inégalités on trouve $-1+n \leqslant (-1)^n+n \leqslant 1+n$ soit en reformulant $n-1 \leqslant u_n \leqslant n+1$ et $n+1$ comme $n-1$ tendent trivialement vers $+\infty$. Il en va donc de même pour u_n et ce bien que $(-1)^n$ n'admette pas de limite.

Voici un résultat permettant non pas de calculer une limite mais de garantir son existence.

Proposition

1. Soit u une suite croissante tel que u_n soit majoré pour tout n assez grand (c'est à dire que $u_n < M$ pour un certain M ne dépendant pas de n). Alors u admet une limite.
2. Soit u une suite décroissante tel que u_n soit minoré pour tout n assez grand (c'est à dire que $u_n > M$ pour un certain M ne dépendant pas de n). Alors u admet une limite.

Par exemple, on peut rapidement montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ est décroissante et minoré trivialement par 0. Donc u admet une limite. On montre que $\lim u_n = 1$.

5. Récurrence

Avec les outils de logique propositionnelle que nous avons développé nous pouvons énoncer la récurrence comme suit :

Théorème Principe de récurrence

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\ p(n)\Big) \iff \Big((p(0)) \land (\forall n \in \mathbb{N}\ \ (p(n) \Rightarrow p(n+1)))\Big)$$

Nous passerons la démonstration de ce principe qui s'enfonce profondément dans la théorie des ensembles.

L'idée de ce principe est que pour montrer qu'un prédicat $p(n)$ est vraie alors il suffit de montrer que $p(0)$ est vraie et que que la propriété de l'induction est vérifié, c'est à dire que **si** $p(n)$ est vraie **alors** $p(n+1)$ est aussi vraie... C'est étrange de supposer que ce l'on cherche à montrer $(p(n))$ est vraie mais c'est qu'est le principe de la récurrence.

Détaillons sur la somme de Gauss.

Dans cette exemple le prédicat $p(n)$ est

$$p(n) = \left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Nous voulons démontrer que ce prédicat est vraie pour tout n.

Pour ce faire nous allons vérifier que $p(0)$ est vraie d'une part et que d'autre par $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ (indépendamment de n).

Initialisation. Nous voulons donc vérifier que $p(0)$ est un prédicat vraie, c'est à dire que

$$p(0) = \left(0 = \frac{0(0+1)}{2}\right)$$

D'un coté $0 = 0$ (oui oui) et d'autre par $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$ et nous observons bien que $0 = 0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$ ce qui veut dire que la proposition $p(0)$ (qui demande si l'égalité est juste ou non) est vraie.

Hérédité. C'est la partie difficile du raisonnement par récurrence. On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque $p(n)$ est vraie (sans chercher à donner une valeur à n). Partant de cette vérité, on cherche à vérifier que $p(n+1)$ est vraie.

L'erreur à ne pas commettre est de dire *ben je remplace le* n *par un* $n+1$ *et voila*[5]. L'idée est **en utilisant** l'hypothèse que $p(n)$ est vraie (on parle de l'hypothèse de récurrence) on arrive à montrer que $p(n+1)$. Dans notre exemple qu'est-ce que $p(n+1)$?

$$p(n+1) = \left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)$$

Soit en faisant une petite addition

$$p(n+1) = \left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

L'idée est de montrer que ce prédicat, précisément cette égalité, est bien vraie **sachant qu'à tout moment du raisonnement on peut utiliser l'hypothèse de récurrence** $(p(n))$ (en fait, si on utilise pas l'hypothèse de récurrence, ce n'est pas un raisonnement par récurrence. C'est d'ailleurs une aide dans le raisonnement : pour avoir une bonne idée, il faut que je m'arrange pour utiliser l'hypothèse de récurrence).

Et là... il faut une idée ! Voici de quoi s'en sortir (dans ce cas ; si nous changeons de prédicat p, l'idée à avoir est différente) : on veut calculer $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1)$. On observe que la somme de tous les nombres entiers jusqu'à $n+1$, il faut faire la somme jusqu'à n puis ajouter $n+1$. De manière savante :

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \big(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n\big) + (n+1)$$

5. Ça serait trop facile pour être mathématiques hein !

Ici nous utilisons l'hypothèse de récurrence $p(n)$ pour ce même n. Cette somme est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned}
0+1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1) &= \big(0+1+2+\cdots+(n-1)+n\big)+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure.

Conclusion de la récurrence. En conclusion, nous avons démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0+1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

6. Suites arithmétiques

Définition

On dira qu'une suite u est **arithmétique** si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

où r est un nombre réel ne dépendant pas de n. On l'appelle la **raison** de la suite.

Remarque : En d'autre terme, une suite sera dite *arithmétique* si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un réel appelé *raison*.

Dans ce cas particulier de suite, on peut passer de la forme récurrente à la forme explicite assez rapidement.

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration. On raisonne par récurrence le cas initial étant trivial.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Montrons que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= u_0 + nr + r \\ &= u_0 + (n+1)r \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire

Soit u une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

Si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

Si $r = 0$ alors la suite est constante et tend donc vers sa valeur constante (n'importe lequel de ses termes).

7. Suites géométriques

Définition

On dira qu'une suite est **géométrique** si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

où q est un nombre réel ne dépendant pas de n. On l'appelle la **raison** de la suite.

Remarque : En d'autre terme, une suite sera dite *géométrique* si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un réel appelé *raison*

Dans ce cas particulier de suite, on peut passer de la forme récurrente à la forme explicite assez rapidement.

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n$$

Démonstration. On raisonne par récurrence le cas initial étant trivial.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$. Montrons que $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= qu_n \\ &= qu_0q^n \\ &= u_0q^{n+1} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire

Soit u une suite géométrique de raison q.

Si $q > 1$ alors la suite est strictement monotone et tend vers ∞ ; le signe étant déterminé par le signe de u_0.

Si $q = 1$ alors la suite est constante et tend donc vers sa valeur constante (n'importe lequel de ses termes).

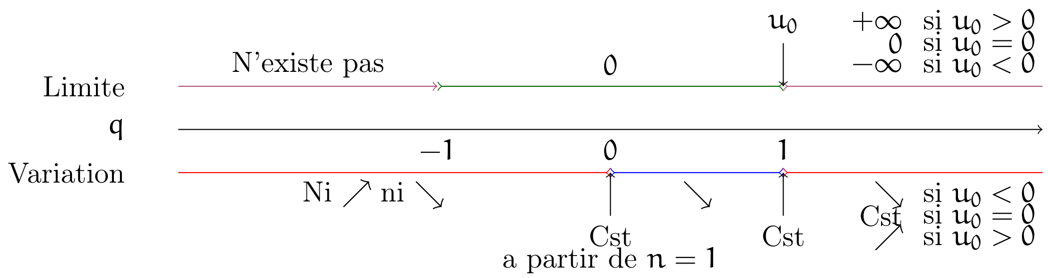
Si $0 < q < 1$ alors la suite est strictement décroissante et tend vers 0.

Si $q = 0$ alors pour tout $n > 0$, $u_n = 0$ qui est aussi la valeur de sa limite.

Si $-1 < q < 0$ alors la suite n'est ni croissante ni décroissante mais tend vers 0.

Si $q \leqslant -1$ alors la suite n'est ni croissante, ni décroissante et n'admet pas de limite.

Remarque : Pour résumer :



*Cst : Constante

8. Sommations finies

Définition

Soit u une suite et $a \leqslant b$ deux nombres entiers. On note

$$\sum_{i=a}^{b} u_i$$

la **sommation** de tous les termes la suite u.

Par exemple $\sum\limits_{i=10}^{15} 2^i = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15}$.

Remarque : La variable de sommation est dite *muette* : elle n'intervient pas dans le résultat de la sommation mais dans sa formulation. Ainsi $\sum\limits_{i=a}^{b} \alpha_i = \sum\limits_{j=a}^{b} \alpha_j = \sum\limits_{k=a}^{b} \alpha_k = \sum\limits_{truc=a}^{b} \alpha_{truc}$.

Propriétés de la sommation

Proposition Relation de Chasles

Soit u une suite et $a \leqslant c < b$ des nombres entiers.

$$\sum_{i=a}^{b} u_i = \sum_{i=a}^{c} u_i + \sum_{i=c+1}^{b} u_i$$

Démonstration. Trivial $\square$

Théorème Linéarité

Soient α et β des suites de nombres réelles, $a \leqslant b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) - **Commutativité.** $\sum\limits_{i=a}^{b} (\alpha_i + \beta_i) = \sum\limits_{i=a}^{b} \alpha_i + \sum\limits_{i=a}^{b} \beta_i$.

(ii) - **Distributivité.** $\sum\limits_{i=a}^{b} \lambda \alpha_i = \lambda \sum\limits_{i=a}^{b} \alpha_i$.

Démonstration. Il s'agit d'un reformulation de la commutativité de l'addition $(a + b = b + a)$ et de la distributivité dans $\mathbb{R}$ $(\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b)$. $\square$

Pour tout $a \leqslant b$, on note $[\![a;b]\!]$ l'intervalle des nombres entiers entre a et b. Comme pour les nombres réels on adoptera les notations de bornes incluses ou non ($[\![a;b[\![$, $]\!]a;b]\!]$ et $]\!]a;b[\![$)

Théorème Changement de variable

Soit $\varphi : [\![a;b]\!] \to [\![c;d]\!]$ une bijection et α une suite de nombres réelles.

$$\sum_{i=c}^{d} \alpha_i = \sum_{j=a}^{b} \alpha_{\varphi(j)}$$

Démonstration. Puisque φ est une bijection, l'ensemble $[\![a;b]\!] = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$ est transformé en $\{\varphi(a), \ldots, \varphi(b)\}$ qui correspond, quitte à changer l'ordre des élément, à l'ensemble $\{c, c+1, \ldots, d\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=a}^{b} \alpha_{\varphi(j)} &= \alpha_{\varphi(a)} + \cdots + \alpha_{\varphi(b)} \\
&= \alpha_c + \cdots + \alpha_d \\
&= \sum_{i=c}^{d} \alpha_i
\end{aligned}$$

□

Sommations classiques

Proposition

Somme de Gauss. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme quadratique de Gauss. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somme des termes d'une suite géométrique. Soient $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Binôme de Newton. Soient a et b des nombres réels et $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

Démonstration. Exercice. □

9. Suites équivalentes

Définition

On dira qu'une suite u est **non nul à partir d'un certain rang** si

$$\exists N, \forall n \geqslant N, \qquad u_n \neq 0$$

Par exemple, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + (-1)^n$ n'est pas non nul à partir d'un certain rang car pour tous les termes de rang impaire $u_n = 0$.

La suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est non nul à partir d'un certain rang. Précisément à partir du rang $N = 1$. Bien qu'elle converge vers 0 aucun de ses termes n'est nul.

Définition

On dira que deux suites u et v toutes deux non nulles à partir d'une certain rang, sont **équivalentes**, noté $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Voici l'exemple canonique.

Proposition

Soit P un polynôme non nul de degré p et de coefficient dominant $a \neq 0$.

$$P(n) \sim an^p$$

Démonstration. Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i x^i$. Avec les notations de l'énoncé on a $a_p = a$ nécessairement non nul par la définition du degré. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{P(n)}{an^p} &= \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i n^i}{an^p} \\
&= \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i n^i}{an^p} \\
&= \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{a} n^{i-p}
\end{aligned}$$

Or pour i entre 0 et p le nombre $i - p \leqslant 0$. Précisément strictement inférieur à 0 si $i \neq p$ de sorte que pour $i \neq p$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{i-p} = 0$ et pour $i = p$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{i-p} = 1$. Ce qui prouve le résultat. □

Ainsi on a par exemple $-3n^2 - 2n + 1 \sim -3n^2$.

Remarque : ATTENTION : si $u \sim v$ cela ne signifie pas que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ comme peut le montrer le contre exemple $u_n = 3n^2 + n$ et $v_n = 3n^2$.

Proposition Relation d'équivalence

Soient u, v et w des suites non nulle à partir d'un certain rang.

Symétrie : $u \sim v \Rightarrow v \sim u$.

Transitif : $\Big((u \sim v) \wedge (v \sim w)\Big) \Rightarrow u \sim w$.

Réflexif : $u \sim u$.

Démonstration.

Symétrie : si $u \sim v$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ce qui permet d'écrire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{1} = 1$ soit encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ ce qui traduit, par définition, que $v \sim u$.

Transitif : si $u \sim v$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et si $v \sim w$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$ de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} \frac{v_n}{w_n} = 1 \times 1 = 1$ ce qui traduit le fait que $u \sim w$.

Réflexif : naturellement on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{u_n} = 1$ ce qui prouve que $u \sim u$.

□

Théorème

Soient u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang tel que $u \sim v$.

(i). Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

(ii). Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \pm\infty$.

Démonstration. On écrit $v_n = \frac{v_n}{u_n} u_n$ et on passe à la limite. □

Lemme : Soit f une fonction définie et dérivable autour de 0 tel que $f(0) = 0$. Alors

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = f'(0)$$

Démonstration. On reprend la définition de nombre dérivé : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On prouve le résultat en prenant $a = 0$. □

Théorème

Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et f une fonction définie et dérivable autour de 0 tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors

$$f(u_n) \sim u_n$$

Démonstration. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(u_n)}{u_n} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{f(u)}{u}$ en posant le changement de variable $u = u_n$. D'après le lemme, cette limite vaut $f'(0)$ qui d'après l'hypothèse de l'énoncé vaut 1 et prouve donc que $f(u_n) \sim u_n$ □

Corollaire Formulaire

Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
2. $\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \sim u_n$
3. $\dfrac{1}{1+u_n} - 1 \sim -u_n$
4. $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{1}{2} u_n$
5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
6. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
7. $\sin(u_n) \sim u_n$
8. $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
9. $\tan(u_n) \sim u_n$

Démonstration. On applique le théorème précédent avec les fonctions suivantes , dont on pourra vérifier dans chaque cas que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha - 1$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1$.
4. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$.
5. $f(x) = e^x - 1$.
6. $f(x) = \ln(1+x)$.
7. $f(x) = \sin(x)$.
8. On se sert de la limite connue $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
9. $f(x) = \tan(x)$.

□

On peut multiplier et diviser les équivalents.

Proposition

Soient a, b, c et d quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i). $[(a \sim b) \wedge (c \sim d)] \Rightarrow (ac \sim bd)$

(ii). $[(a \sim b) \wedge (c \sim d)] \Rightarrow \left(\dfrac{a}{c} \sim \dfrac{b}{d}\right)$

(iii). $a \sim b \Rightarrow a^\alpha \sim^\alpha$

Démonstration.

(i). On observe que $\dfrac{a_n c_n}{b_n d_n} = \dfrac{a_n}{b_n} \times \dfrac{c_n}{d_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

(ii). On a $\dfrac{\frac{a_n}{c_n}}{\frac{b_n}{d_n}} = \dfrac{a_n d_n}{b_n c_n} = \dfrac{a_n}{b_n} \times \dfrac{1}{\frac{c_n}{d_n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$.

(iii). On observe que $\dfrac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1^\alpha = 1$

□

On peut également composer par des fonctions classiques (exponentielle et logarithme).

Proposition

Soient a, b, c et d quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang et u et v deux suites.

(i) $e^u \sim e^v \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

(ii) $\left(\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0\right) \wedge (a \sim b)\right) \to (\ln(|a|) \sim \ln(|b|))$

(iii) $\left(\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty\right) \wedge (a \sim b)\right) \to (\ln(|a|) \sim \ln(|b|))$

Démonstration.

(i). Cela suit de l'observation que $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n}$.

(ii). On écrit $\dfrac{\ln(|a_n|)}{\ln(|b_n|)} = \dfrac{\ln(|b_n|) + \ln\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)}{\ln(|b_n|)} = 1 + \dfrac{\ln\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)}{\ln(|b_n|)}$. Ce dernier membre tend vers 0 puisque le numérateur tend vers $\ln(1) = 0$ et le dénominateur vers $\ln(0) = -\infty$ (puisque a et b ont même limite donc 0).

(iii). On raisonne comme précédemment avec $A_n = \dfrac{1}{a_n}$ et $B_n = \dfrac{1}{b_n}$.

$\square$

Théorème Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration. Cela pourra s'obtenir lors en faisant l'exercice sur les intégrales de Wallis. $\square$

10. Séries

Léo l'escargot avance à un mètre par heure et souhaite atteindre l'extrémité d'une corde qui fait 100 mètres. Si rien ne s'opposait à lui, il lui faudrait donc 100 heures pour atteindre le bout de la corde (soit à peu près 4 jours). Mais ce qu'ignore Léo l'escargot c'est qu'au début de chaque heure un géant va venir tirer sur la corde qui s'apparente à un élastique (infiniment élastique). A chaque fois la corde sera étendu de 100 mètres de manière homogène. Le mot *"homogène"* signifie que non seulement la distance à parcourir par Léo augmentera mais aussi la distance parcouru. Seul le pourcentage de progression restera le même. Détaillons les premières heures de l'avancée de Léo.

Heure 0 : Léo est au bout de la corde.

- Distance parcouru : 0m.
- Distance à parcourir : 100m

Heure 1 : Léo à parcouru 1 mètre soit $1/100 = 1\%$ de la distance total. Le géant tire sur la corde et rajoute donc 100 mètres à sa longueur. La longueur total de la corde est donc de 200 mètres mais la distance parcouru par Léo est toujours de 1% de la distance total. Il a donc $1\% \times 200 = 2$ mètres de corde derrière lui.

- Distance parcouru : 2m.
- Distance à parcourir : 198m

Heure 2 : Léo parcours 1 mètre supplémentaire donc un total de 3 mètres soit $3/200 = 1.5\%$ de la longueur de la corde. Le géant tire sur la corde qui fait maintenant 300 mètres mais la proportion de distance parcouru par l'escargot reste de 1.5% soit $1.5\% \times 300 = 4,50$ mètres.

- Distance parcouru : 4.50m.
- Distance à parcourir : 295.50m

Question : Léo l'escargot atteindra-t-il le bout de la corde ?

Notons u la suite indexée par $\mathbb{N}$ représentant la proportion de l'élastique parcouru par Léo ; les indices représentant les heures.

D'après l'énoncé $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{100}$ et $u_2 = \dfrac{1,5}{100}$. Si l'on reprend le raisonnement, au bout de deux heures, Léo a parcouru déjà les 1% de la première heures et encore 1 mètre mais des 200 mètres que fait l'élastique. Sa proportion est donc $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200} = \dfrac{1}{100}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$. Même lorsque le géant va tirer sur l'élastique cette proportion sera la même. Il est aisé d'observer qu'au bout de n heures (pour $n > 0$) la proportion d'élastique parcouru est

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

La question revient donc à savoir si cette somme arrivera à 1 ou plutôt si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > 100$.

Proposition

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Démonstration. On rappel que la valeur $\ln(a)$ est définie comme étant l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la fonction inverse et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$, de sorte que $\ln(k+1) - \ln(k)$ représente l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la fonction inverse et les droites d'équation $x = k$ et $x = k + 1$. Or cette aire est majorée par le rectangle de coté 1 et $\dfrac{1}{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} \qquad \text{en posant } k'=k+1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(n+1) \leqslant S_{n+1}-1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(n+1)+1 \leqslant S_{n+1}
\end{aligned}$$

En réindexant on a donc $S_n \geqslant \ln(n)+1$, ce qui prouve le résultat en passant à la limite. □

Puisque la limite de S_n est infini et croissante (somme de terme positif), il existe un N tel que $S_N > 100$. Donc Léo atteindra bien le bout de l'élastique. Mais en combien de temps ? Puisqu'il y a des logarithme dans l'encadrement, il y aura des exponentielle dans la réponse... quelque part entre e^99 et e^100 ce qui est de l'ordre de 10^{42}... pauvre escargot. Ce nombre d'heure, en année est environ 10^{38} c'est dire 100 milliard de milliard de milliard de milliard d'années.

Donnons un cadre de telle sommes infinis

Définition

Soit u une suite indexée par $\mathbb{N}$.

(i). On appel **somme partielle** de u la suite $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.

(ii). On appel **série** de **terme générale** u_n et notée

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{ou lorsqu'il n'y a pas d'ambïguité sur les indices} \qquad \sum u_n$$

la limite, si elle existe, de la suite des sommes partielles.

Pour le confort de la définition, on a considéré les suites indexées par $\mathbb{N}$, il peut en fait s'agir de n'importe quelle sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de cardinalité infinie.

Ainsi on peut noter $\displaystyle\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Les sommes partielles de cette série sont très difficiles a expliciter. De manière générale, pour une série quelconque on ne sait pas expliciter les sommes partielles. Pire : il est assez rare de connaitre la valeur exacte d'une série (rare signifie qu'en prenant une série au hasard parmi l'ensemble des séries, la probabilité de connaitre sa valeur exacte est nulle).

Mais ce n'est pas toujours nécessaire de connaitre cette valeur, l'ordinateur le fera pour nous. Sauf si la série diverge (c'est à dire que la suite de ses sommes partielles diverge). Dans ce cas l'ordinateur risque de boucler à l'infini. Nous avons donc uniquement besoin (pour aider l'ordinateur) de savoir si la série admet une valeur.

On parle de *critères de convergences*.

Proposition Critère grossier

Soit u une suite tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$ alors $\sum u_n$ ne converge pas.

Démonstration. Supposons que $l>0$ alors puisque u tend vers l, $u_n \geqslant \dfrac{l}{2}$ pour n suffisamment grand, mettons pour tout $n \geqslant N$. Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} u_n \geqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2} = +\infty \frac{l}{2} = +\infty$.

On raisonne de la même manière (mais en majorant au lieu de minorer) lorsque $l<0$. □

Il est donc nécessaire que le terme générale de la série tende vers 0.

Théorème

Soient u et v deux suites non nulle à partir d'un certain rang tendant vers 0.
Si $u \sim v$ alors $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature.

Démonstration. Puisque l'équivalence est symétrique, il suffit de démontrer les deux points suivants.

Si $\sum u$ est divergente alors $\sum v$ est divergente. Pour simplifier la preuve, supposons que $\sum u = +\infty$.
Puisque $u \sim v$ alors à partir d'un certain rang N, $\frac{v_n}{u_n} \geqslant \frac{1}{2}$. Alors

$$\sum_{n=N}^{\infty} v_n = \sum_{n=N}^{\infty} u_n \frac{v_n}{u_n} \geqslant \sum_{n=N}^{\infty} u_n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} u_n = +\infty$$

On raisonne de même (en majorant) si $\sum u = -\infty$.

Si $\sum u$ est convergente alors $\sum v$ est convergente. Le raisonnement contraposé de ce résultat est similaire au précédent.

$\square$

Par exemple $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ car $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Critères

Théorème Critère de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{convergente,} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{divergente,} & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Théorème Critère de d'Alembert

Soit u une suite positive tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \begin{cases} \text{convergente,} & \text{si } l < 1 \\ \text{divergente,} & \text{si } l > 1 \end{cases}$$

Théorème Critère de Cauchy

Soit u une suite non nul à partir d'un certain range tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \begin{cases} \text{convergente,} & \text{si } l < 1 \\ \text{divergente,} & \text{si } l > 1 \end{cases}$$

11. Dérivés

A quoi ça sert les math ?

Cette question est tout à fait légitime et trouve de nombreuses réponses qui dépendent du champ des mathématiques dont on parle, de la personne qui pose la question ou de la personne qui répond.

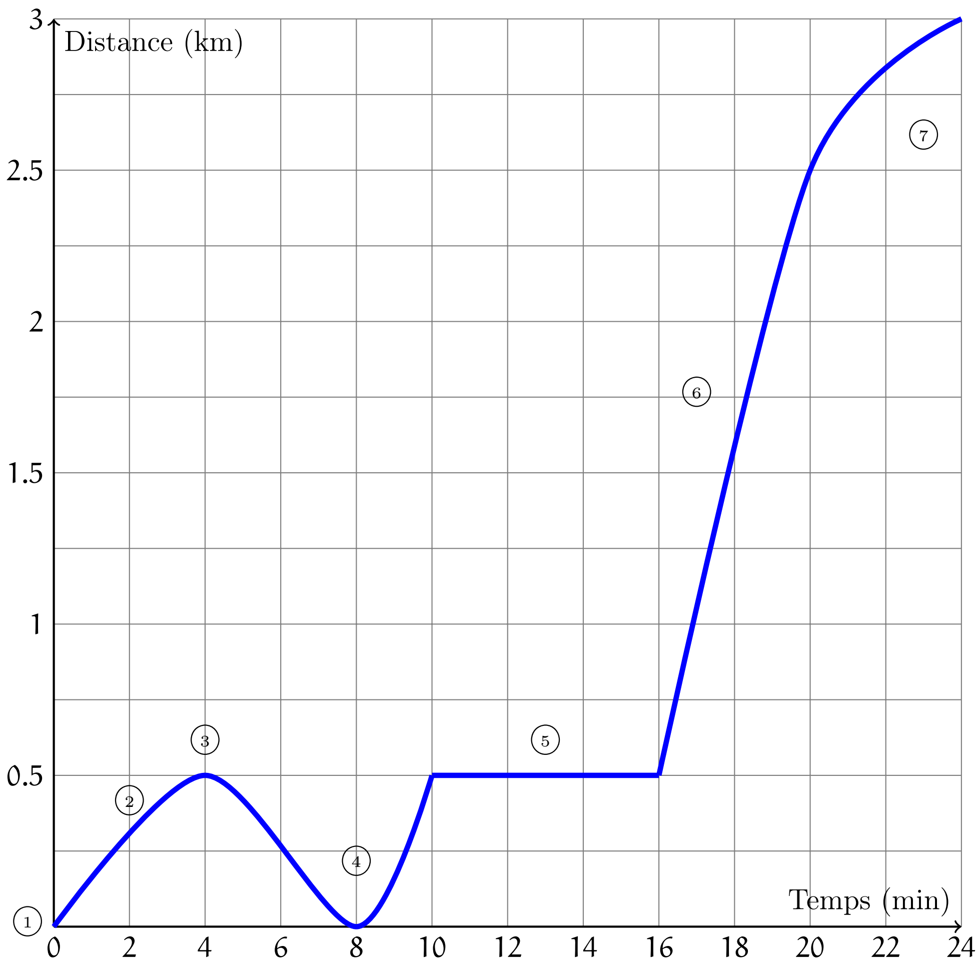
Une des réponses les plus élégante serait de commencer à dire que les mathématiques, avant d'être une science à part, étaient considérées comme un outil pour les autres sciences. Nombreux scientifiques de l'époque étaient physiciens ou chimistes en même temps qu'ils étaient mathématiciens. Par exemple, Gauss dont nous avons parler dans le chapitre sur la résolution des systèmes était astronome de métier. Il n'en est pas moins appeler *le prince des mathématiques* aujourd'hui.

Pour parler de ce nouveau chapitre nous allons nous immerger très légèrement dans le monde de la physique et essayer ensemble de faire comme nos ancêtres et réinventer la *dérivation*.

Nous allons parler de vitesse. La vitesse mesure la distance parcouru en un laps de temps donnée.

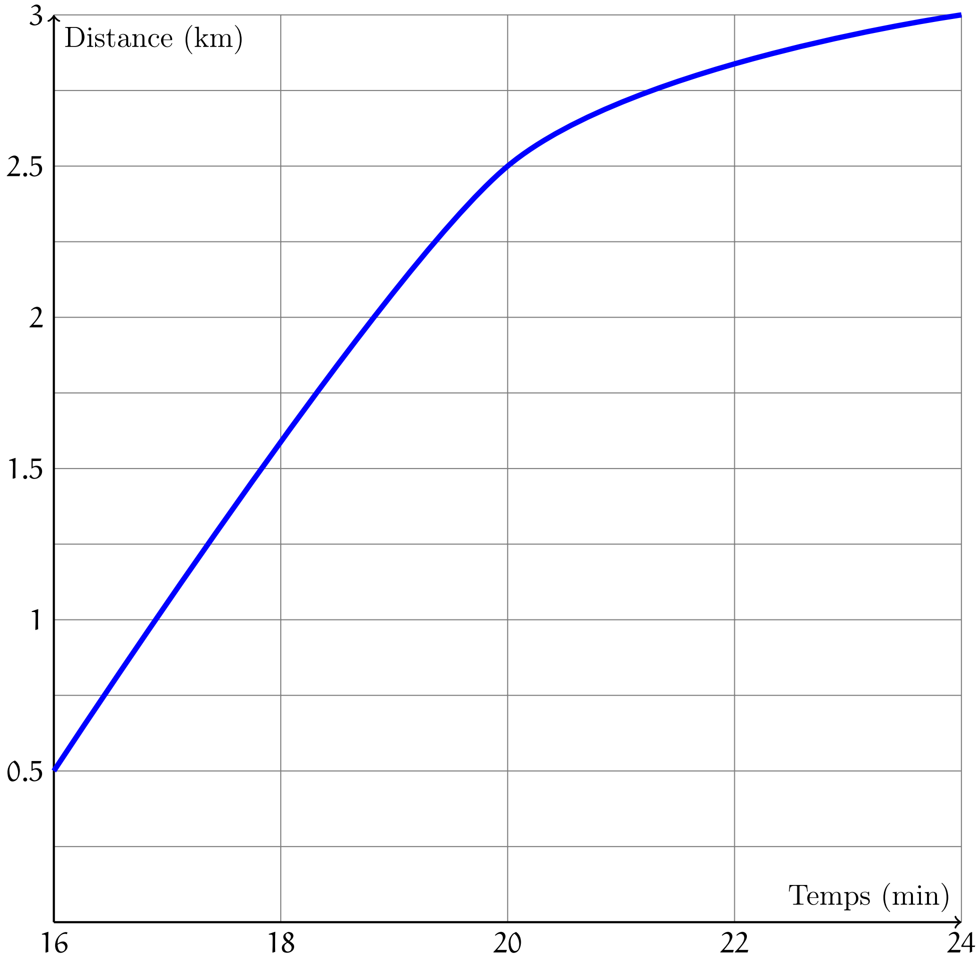
Sur le graphique ci dessous, il vous est représenté le parcours de votre serviteur depuis chez lui jusqu'au marché de la ville. En abscisse le temps mesuré en minute, en ordonnée la distance parcouru mesurée en kilomètre. La petite histoire de ce graphique est la suivante :

1. Je part de chez moi.
2. Je me rend à pied jusqu'à l'arrêt de bus.
3. Je me rend compte que j'ai oublié de prendre un ticket de bus je rentre chez moi le prendre.
4. Je repart immédiatement de chez moi vers l'arrêt de bus en courant pour ne pas le rater.
5. J'ai raté le bus et je dois donc en attendre un autre.
6. Le bus arrive, je monte dedans et me laisse transporter jusqu'à la station "Mairie".
7. Une fois arriver je marche tranquillement vers la place du marché (pour me rendre compte que nous sommes vendredi et qu'il n'y a pas marché `#vecu`).

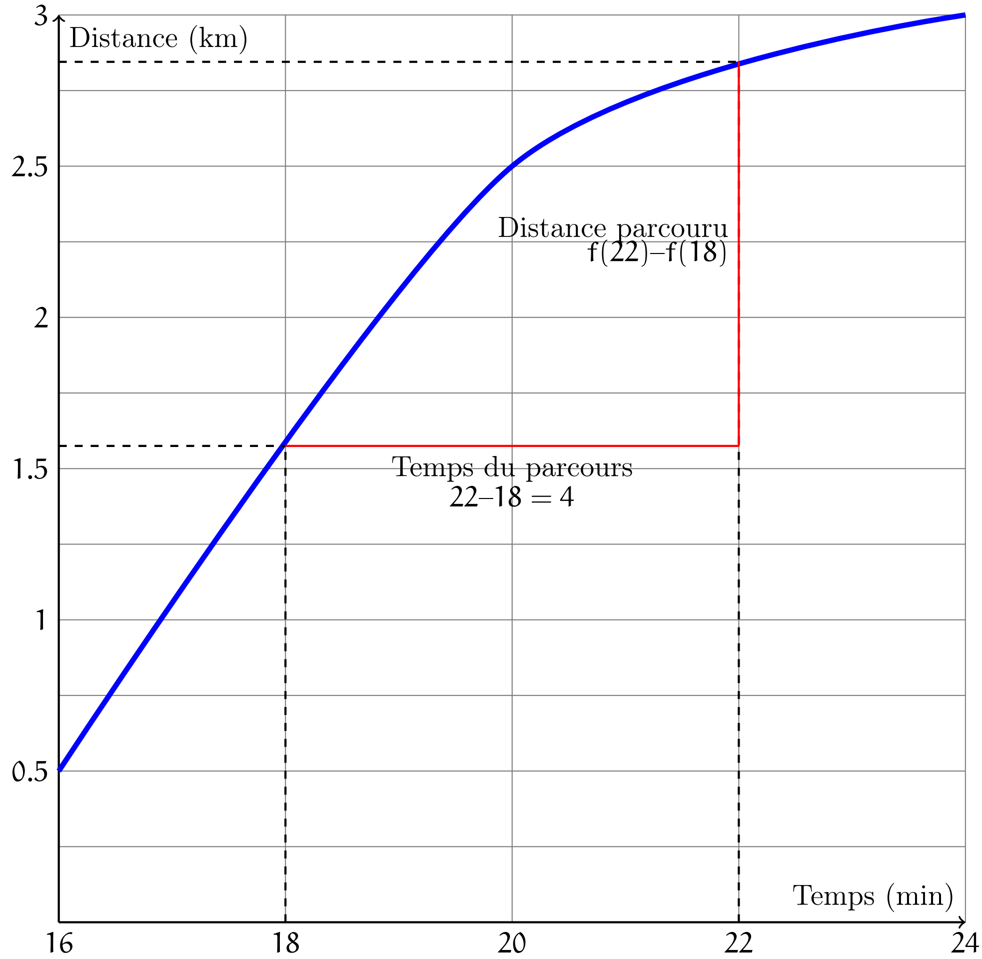


Malgré le périple, il m'a fallut 24 minutes pour parcourir les 3 kilomètres qui me sépare du marché. La vitesse est la distance par rapport au temps. Ici $\frac{3km}{24min}$. Multiplions par $2,5$ au numérateur et dénominateur pour obtenir $\frac{7,5km}{60min}$ soit $7,5$ km/h. Cette information est quelques peu trompeuse. En tant que marcheur $7,5$ km/h est une marche très sportive, mais pour le bus $7,5$ km/h est très mauvais. Poser une question de raffinement sur ces information cinétique équivaut à se poser une question du genre : quelle était ma vitesse 20 minutes après mon départ ?

Pour comprendre cela isolons les dernières minutes de mon trajet (parties 6 et 7) :



La vitesse moyenne uniquement sur cette portion correspond toujours à la distance, ici $2,5$ km par rapport au temps, ici 8 minutes. Cela correspond à une vitesse de $18,75$km/h. Rapprochons-nous un peu plus du 20 pour déterminer la vitesse à la 20ième minutes. Pour généraliser un peu plus imaginons que le graphe soit le dessin de la courbe représentative d'une fonction f.



Dans ce cas, comme toujours d'ailleurs, la vitesse est la distance parcouru sur le temps de parcours soit $\frac{f(22)-f(18)}{22-18}$. Et comme c'est le but ici on souhaite se rapprocher de 20. Nous avons vu dans le précédent chapitre que "se rapprocher de" se traduisait mathématiquement par la notion de limite. On définie donc la vitesse instantanée, qui s'oppose à la vitesse moyenne, comme la vitesse moyenne infiniment proche de la valeur cherchée. Si cette limite existe (dans le sens ou la limite inférieur et supérieur sont les même et sont finies) on dira que la fonction est dérivable.

Définition

Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ de son domaine de définition. Si

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et que ces deux limites sont finies, alors on appellera la valeur de ces limites la *dérivé de la fonction* f *en* a que l'on notera $f'(a)$. Précisément :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Quelque soit la fonction que nous traitons, cette limite est toujours une forme indéterminée (de la forme $0/0$). Ca serait beaucoup moins intéressant sinon ^_^.

Par exemple dérivons en $a = 3$ la fonction $f(x) = x^2$. Revenons à la définition et essayons de simplifier la limite, qui est malheureusement par construction, toujours une forme indéterminée. Ici l'idée est d'utiliser une identité remarquable.

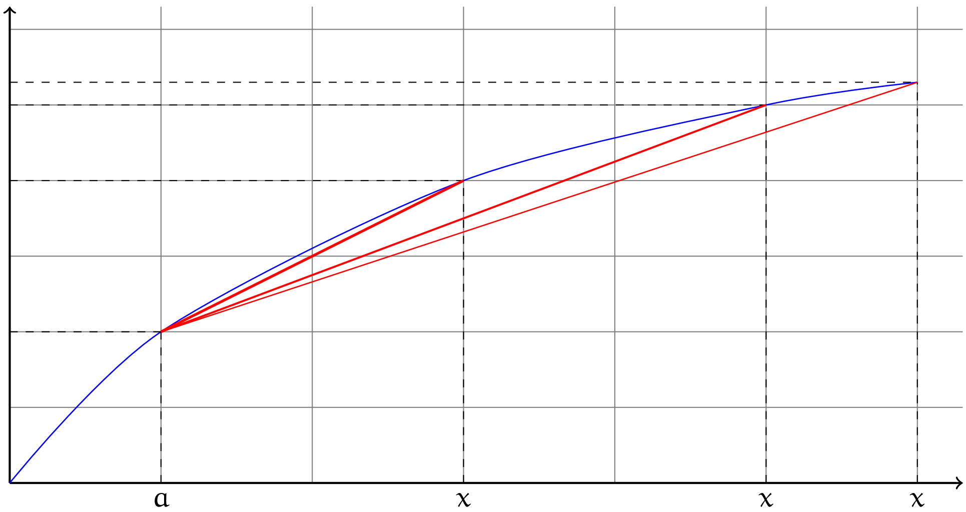
$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3}(x+3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Conclusion $f'(3)=6$.

Nous venons de voir la définition qui en tant que tel n'est pas évidente de prime abord. Et nous espérons que vous l'aurez compris, ça sert à calculer la vitesse instantanée. Mais tout ce travail pour calculer une vitesse serait un peu trop de gâchis de concept mathématiques. Puis surtout, en pratique comme procède t-on au calcul ? Les réponses arrivent !

Tangente

Continuons sur notre lancée théorique avant de passer à la pratique et observons un peu plus en détail ce nouveau jouet qu'est la définition de la dérivé.



Sur ce graphique, on observe que plus x se rapproche de a plus les droites (en noire - on les appelle savamment des cordes) vont se retrouver collées à la courbe. A la limite, de tel droite collée à la courbe, sont appelée des *tangente*.

Quelle est l'équation de la droite qui passe par les points de coordonnée $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ sachant que x se destine à se rapprocher de a ?

D'après les précédents chapitres nous avons vus que cette droite a pour équation

$$Y = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(X-a)+f(a)$$

Les variables X et Y permettent de donner l'équation de la droite tandis que x désigne un réel de l'axe des abscisses. Il suffit de passer à la limite lorsque $x \to a$ pour déterminer l'équation de la tangente.

Définition

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f définie en un réel a est donnée par

$$T_a \quad : \quad Y = f'(a)(X-a)+f(a)$$

Par exemple la tangente de la fonction carré en $a=3$ est $T_3 :\ y = 6(x-3)+3^2 = 6x-9$

Dérivées usuelles et fonctions dérivées

Dans le calcul que nous avions fait dans les paragraphes précédents pour calculer la dérivée de la fonction carré en 3, que l'on ai mis un 3 ou un 42 ça ne change pas le travail :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} (x+a) \\ &= 2a \end{aligned}$$

Le cas de la fonction carré est réglé ! C'est l'occasion de parler de **fonction dérivée**.

Définition

La fonction dérivée d'une fonction f est la fonction notée f' tel que la valeur de f' en a est le nombre dérivé de la fonction f en a.

Nous avons par exemple montré que la fonction dérivée de la fonction carré est $f'(x) = 2x$.

Qu'en est-il de la fonction cube $g(x) = x^3$. Abracadabra ! Voici une formule sorti de nul part : $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$. Attaquons à présent le calcul de la limite :

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

En conclusion $g'(x) = 3x^2$.

Commençons par faire peur : OUI ! Pour calculer des dérivées (en tant que fonction ou valeur numérique) il n'y a pas d'autre solution que de passer par la définition de limite ! Mais pas d'inquiétude. Beaucoup de mathématiciens ont établis un formulaire recensant les dérivées des fonctions usuelles (et oui, il faut les apprendre et les connaitre par cœur) :

Proposition

Soit n un entier strictement positif et k un nombre réel alors

$$\begin{aligned} f(x) = k &\quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \\ f(x) = x^n &\quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = \frac{1}{x^n} &\quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} \\ f(x) = \sqrt{x} &\quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

On retrouve par exemple les formules que nous avons trouvé à l'aide du calcul de limite sur les fonctions carré et cube.

Opérations sur les dérivées

Et si nous souhaitions dériver la fonction $x + 1$? Nous savons dérivé $x = x^1$ qui admet $1x^0 = 1$ comme dérivé et la dérivé du nombre réel 1 est 0. Qu'en est-il de la somme ?

Proposition

$$(f+g)' = f' + g'$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette formule on prouve le résultat.

$$\frac{[f(x)+g(x)] - [f(a)+g(a)]}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

□

Ainsi la fonction dérivée de $x^2 + x + 1$ est $2x + 1$.
Qu'en est-il de la fonction dérivée de la $x^2 - 3x + \frac{1}{x}$. Les précédents résultats nous donnent

$$\left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' - (3x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - (3x)' - \frac{1}{x^2}$$

Réglons le problème de $(3x)'$ à coup de théorème !

Proposition

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette formule on prouve le résultat.

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

□

En d'autre terme la dérivé de $3x$ c'est 3 fois la dérivée de x (qui est 1). Au final

$$\left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)' = 2x - 3 - \frac{1}{x^2}$$

Et qu'en est-il de la fonction dérivée de $(\sqrt{x}+1) \times \frac{1}{x}$. Bon soyons claire : ca va commencer a devenir n'importe quoi, mais ça marche !

Proposition

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette égalité on prouve le résultat :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a)}{x-a} + \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

□

Ainsi

$$\begin{aligned}\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' &= (\sqrt{x}+1)'\frac{1}{x}+(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x}+(\sqrt{x}+1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

En conclusion $\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}$ (les plus savant pour chercher à simplifier davantage cette dérivée et montrer que $\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' = -\frac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$ en utilisant le fait que $\sqrt{x}^2 = x$).

Et qu'en est-il de la fonction dérivée de la fonction $\frac{x}{x+1}$?

Proposition

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette égalité on prouve le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{\frac{f(x)g(a)}{g(x)g(a)}-\frac{g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x-a)}+\frac{f(a)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x-a)}-\frac{f(a)g(x)-g(a)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= g(a)\frac{f(x)-f(a)}{g(x)g(a)(x-a)}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}\end{aligned}$$

□

Sur notre exemple

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x+1}\right)' &= \frac{(x)'(x+1)-(x+1)'(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Et qu'en est-il de la fonction dérivé de $\sqrt{x^2+x}$?

Proposition

$$(f(g))' = f'(g) \times g'$$

Démonstration. On a

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

D'un coté $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ de l'autre coté en effectuant le changement de variable $y = g(x)$ on a, par définition du nombre dérivée $\lim_{x\to a} \dfrac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} = \lim_{y\to g(a)} \dfrac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)} = f'(g(a))$. □

Ainsi $(\sqrt{x^2+x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \times (x^2+x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \times (2x+1) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

En particulier ce dernier résultat permet d'obtenir un petit peu plus de formule de dérivation (il n'y en avait pas assez comme ça !)

Corollaire

Soient n un entier strictement positif u une fonction

$$f(x) = u(x)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nu(x)^{n-1} \times u'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{u(x)^n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{n}{u(x)^{n+1}} \times u'(x)$$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$$

Par exemple déterminons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ en $a = 0$. D'après les paragraphes précédents $T_0 : \; y = f'(0)(x-0) + f(0)$. D'une part $f'(x) = x - 1$ d'où $f'(0) = -1$ et d'autre part $f(0) = 1$. En conclusion l'équation de la tangente est $y = -x + 1$.

Variations et dérivations

Lorsque l'on se donne une fonction, on souhaite l'étudier. Ce que nous avons déja explorer avec l'étude du domaine de définition ou des translations de fonction de références. D'autre informations son a extraire de la fonction. L'une d'elle est ce que l'on appelle les *variations* de la fonction ce qui se traduit vulgairement par : quand est-ce que la fonction monte et quand-est-ce qu'elle descend.

Définition

- On dira qu'une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.

Plaçons nous par exemple sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et étudions les variations de la fonction $f(x) = x^2$. Soit $0 < \alpha < \beta$ alors

$$f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Puisque α et β sont tout deux positifs alors $\alpha + \beta > 0$ et puisque $\alpha < \beta$ alors $\alpha - \beta < 0$. La règle des signes nous donne donc que $\alpha^2 - \beta^2$ est négatif soit encore $f(\alpha) < f(\beta)$ et donc que la fonction carré est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

On montrerai de même que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Pour compiler ces informations de variation on réalise un *tableau de variation* qui comporte deux lignes : une ligne pour spécifier les valeurs de x classer dans l'ordre croissant, comme pour les tableaux de signe et une seconde ligne représentant les variations par des flèches qui montent pour signaler la croissance ou qui descende pour signaler la décroissance.

Le tableau de variation de la fonction carré est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$		$\nearrow$	

On complète souvent le tableau de variation en mettant les valeurs des limites au bout des flèches :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cet exemple était assez facile. Les droites, c'est à dire les fonctions affines ont aussi des variations faciles à étudier.

Proposition

Soit f une fonction affine de coefficient directeur a.

- Si $a > 0$ la droite est strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $a < 0$ la droite est strictement décroissante.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	$+\infty \searrow -\infty$

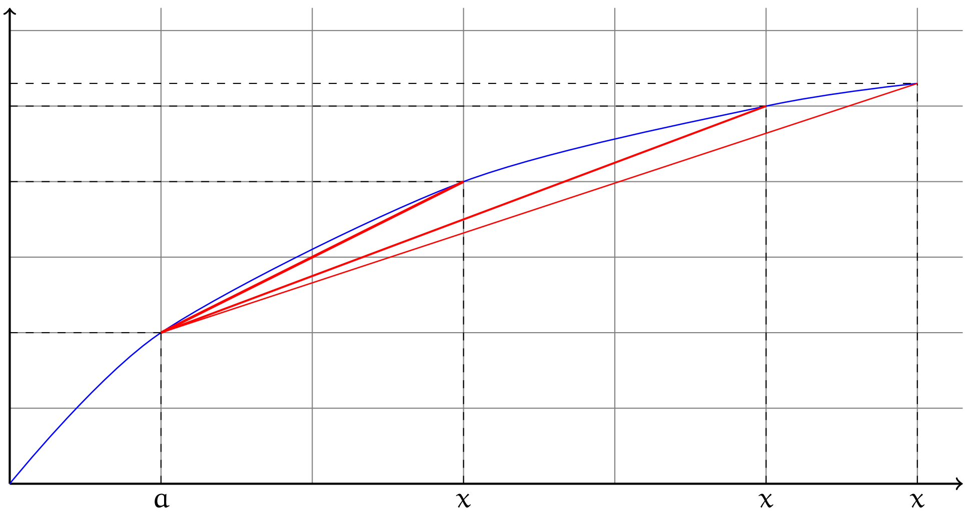
- Si $a = 0$ la droite est constante.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	$k \longrightarrow k$

où $f(x) = k$

En se servant des variations des droites ainsi que du lien entre tangente et dérivation, nous pouvons obtenir les variations d'une fonction.

Reprenons le graphique qui nous a mené à la notion de tangente



Les droites successives, qui tendent vers la tangente, sont toutes croissante car le coefficient directeur est $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif puisque $a < x$ et que la fonction f est croissante. A la limite ce caractère sera conservé. Cela permet d'en déduire le théorème suivant.

Théorème

- Si f' existe et est positive sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.
- Si f' existe et est négative sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.

Autrement dis : étudier les variations d'une fonction reviens à étudier le signe de sa dérivé.

La dérivé de la fonction $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$. Naturellement $2x$ est positif lorsque x est positif donc la fonction f sera croissante sur cet intervalle ce que nous avions déjà déterminer.

Exemple

Étudions la fonction $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

Nous voyons une fraction, il faut donc que le dénominateur, $x^2 - 1$, ne s'annule pas. En utilisant une identité remarquable ou une les formules de calculs des racines pour les polynômes de degrés 2, nous pouvons rapidement conclure que le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. Le but étant de déterminer le signe de la dérivé, c'est à dire de résoudre une inéquation de la forme $f'(x) > 0$, nous allons calculer la dérivée et la factoriser au maximum.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{(x)'(x^2-1) - (x^2-1)x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)^2 + 1(x^2-1) - 2xx}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)^2 + x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Nous allons a présent dresser le tableau de signe et par la même le tableau de variation.

Dans le tableau de variation comme dans les tableaux de signe on signale les valeurs interdites par une double barre.

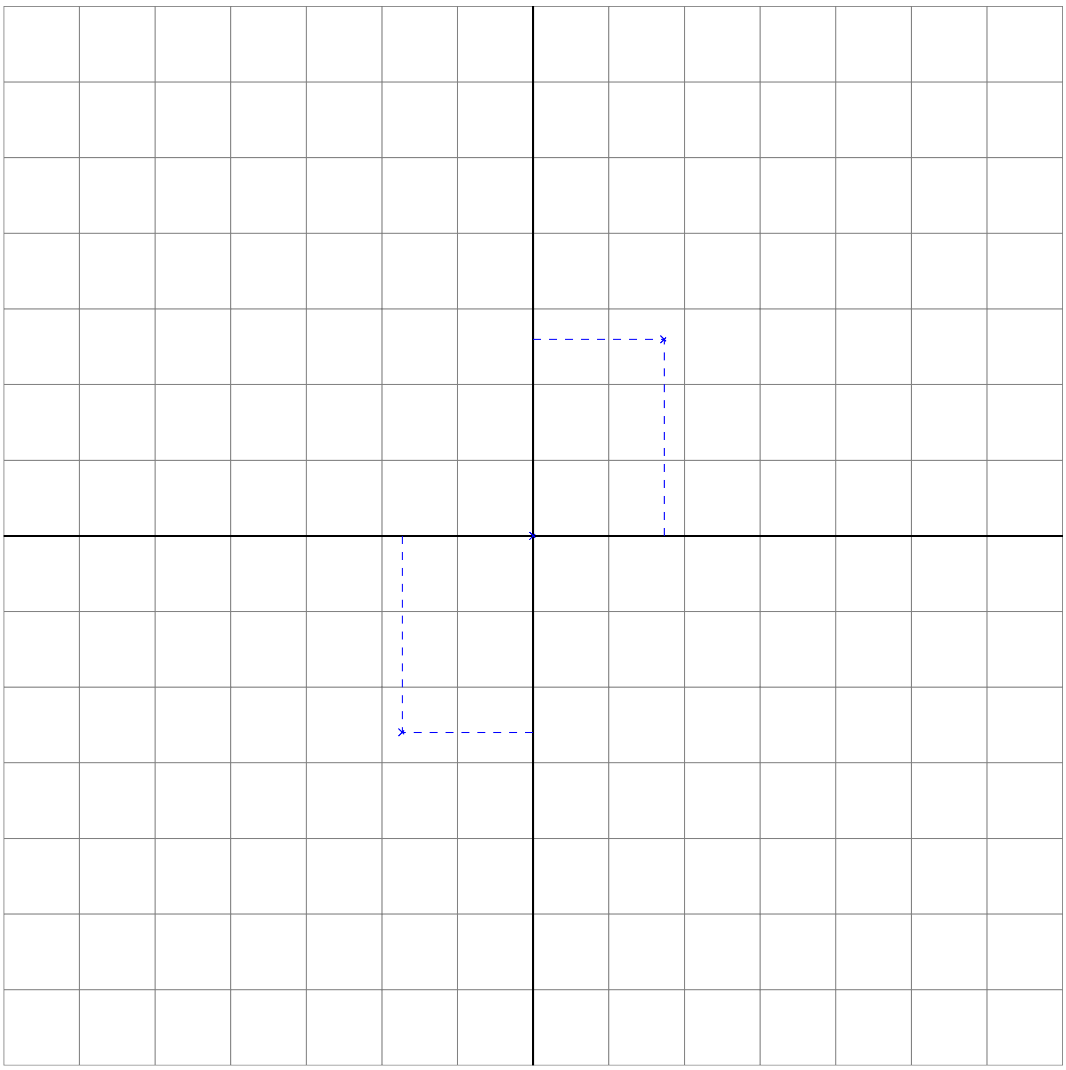
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$

Une étude de limite permet alors de finaliser le tableau :

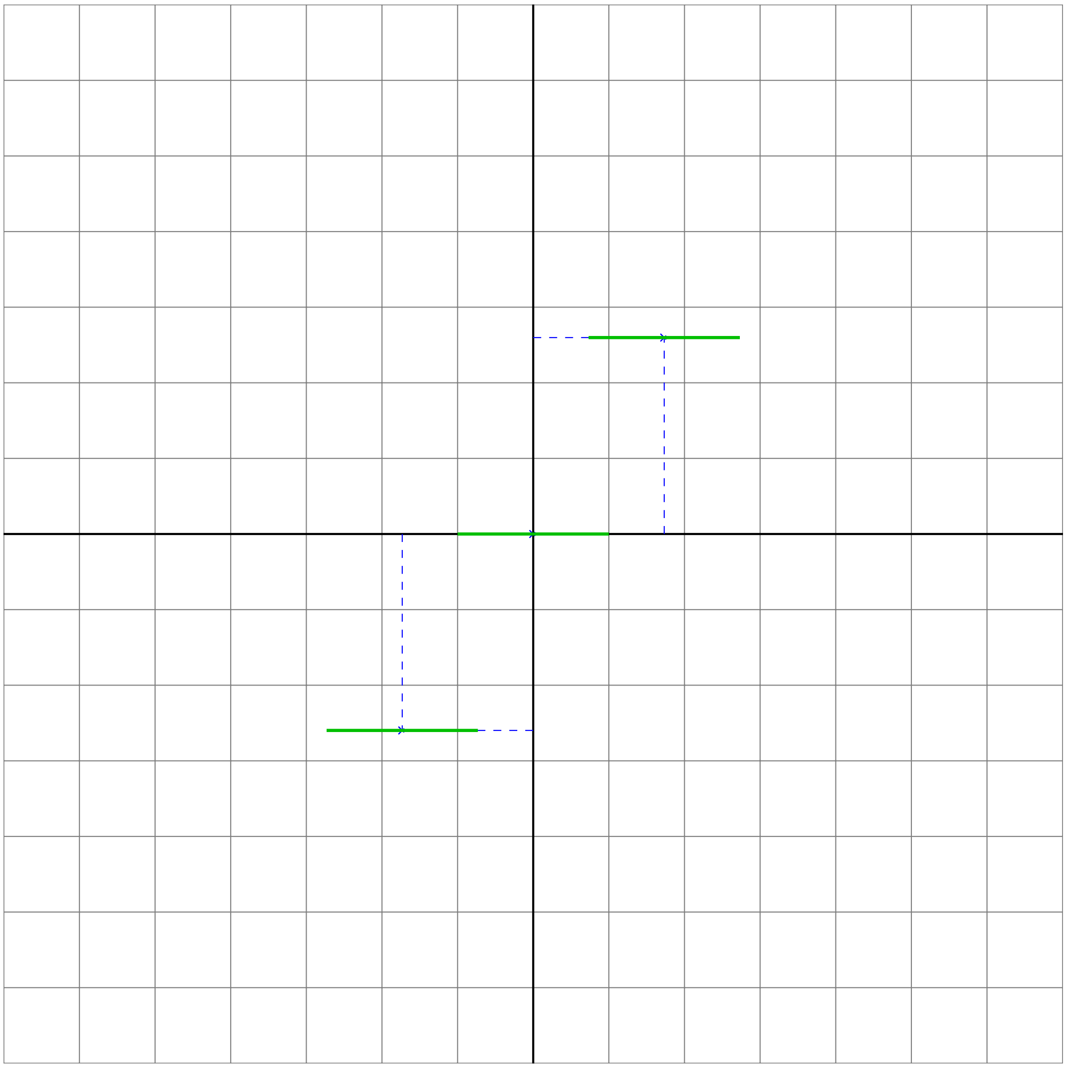
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}/2$

Le tableau de variation suffit en générale pour donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

D'une part les valeurs finie de la fonction donne des point de passage. Dans notre exemple nous savons que la courbe passera par les points $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$ et $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.



De plus, par construction, le coefficient directeur d'une tangente est le nombre dérivé. Lorsque la dérivée s'annule, on en déduit que la tangente est horizontale. Cela donnera une information sur le comportement autour de la tangente puisque par définition de *tangente*, cette droite "frôle" la courbe. Ainsi la courbe sera horizontale autour des tangente horizontale !
On trace donc des morceaux de droite horizontale lorsque la dérivée s'annule :



Pour obtenir finalement

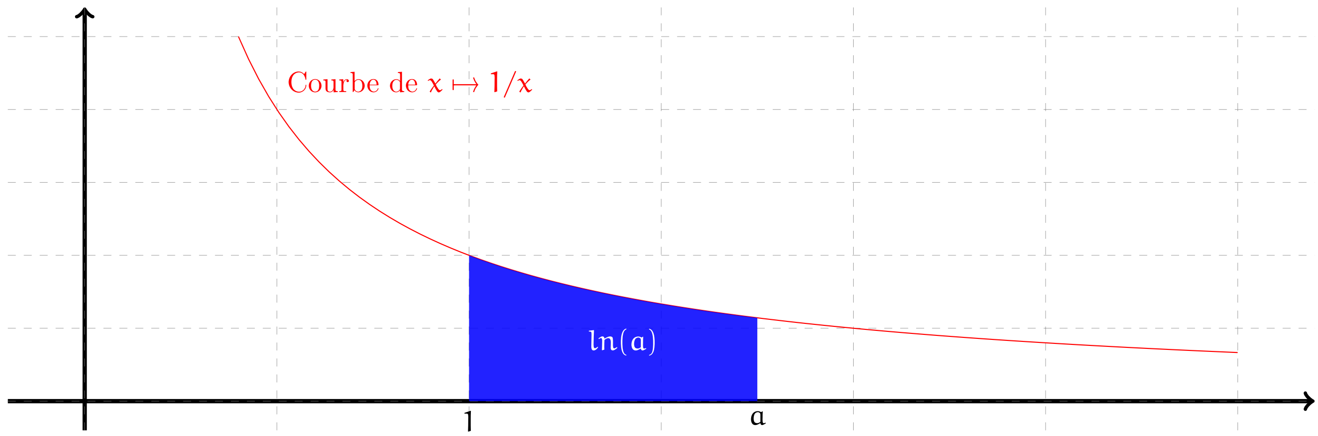
12. Logarithme

Définition et premières propriétés

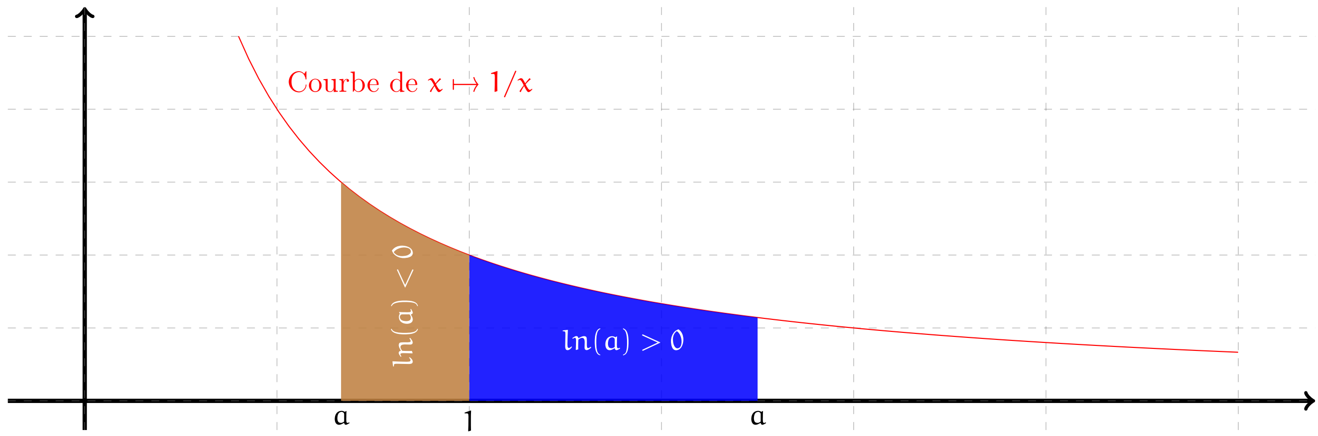
Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\ln(a)$ appelé le **logarithme népérien** de a, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite $x = 1$, $x = a$ et la courbe représentative de la fonction inverse.

En dessin cela donne :



L'aire dont on parle est une aire *algébrique* c'est à dire avec un signe : on regarde toujours l'aire entre $x = 1$ et $x = a$ dans cet ordre de sorte que si $a < 1$ alors l'aire sera considérée négative.



Proposition

1. Le nombre réel $\ln(a)$ n'est défini que si $a \in]0; +\infty[$.
2. Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$.
3. $\ln(1) = 0$.
4. Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$.

Ces propriétés se déduisent trivialement d'une lecture géométrique du logarithme.

Croissances comparées

Théorème

Soient a et b deux nombres réelles strictement positifs alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration. Admise □

Corollaire

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

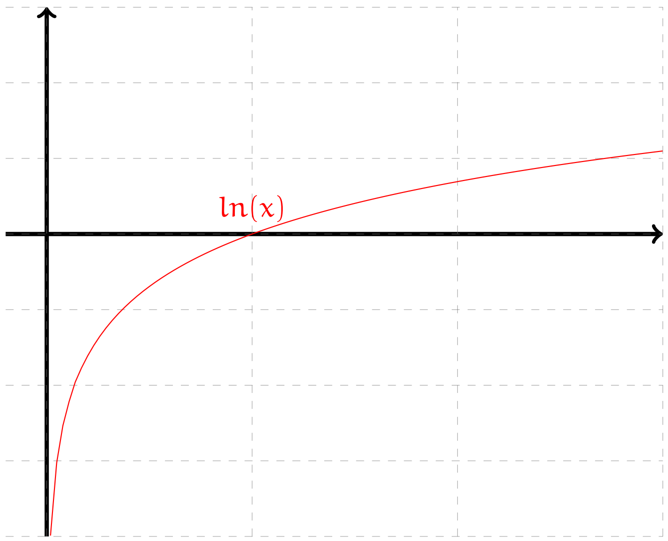
1. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.
4. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

Démonstration.

1. $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$.
2. C'est la formule précédente pour $a = 1$ (sachant que $\ln(1) = 0$).
3. $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$
4. $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n}$

□

Ce qu'il faut retenir



1. $\mathcal{D} =]0; +\infty[$
2. Si $x \in]0, 1[, \ln(x) < 0$
3. $\ln(1) = 0$
4. Si $x \in]1, +\infty[, \ln(x) > 0$
5. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
6. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
7. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
8. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Trailer : Exponentielle

La fonction logarithme est strictement croissante et prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ (car ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$). Elle est aussi continue par construction (en tant qu'aire). On peut donc lui appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires**. D'après ce théorème l'équation $\ln(x) = 0$ admet une unique solution, d'ailleurs on la connait : c'est 1.

Grâce à ce théorème on peut en déduire que si $\ln(a) = \ln(b)$ alors nécessairement $a = b$.

L'équation $\ln(x) = 1$ admet aussi une unique solution. A l'aide de la calculatrice on trouve que $x = 2.71828$. On note ce nombre e.

Qu'en est-il de l'équation $\ln(x) = 2$. Elle admet aussi une unique solution dont on peut déterminer une approximation numérique... mais on peut procéder autrement :

$$\begin{aligned} \ln(x) = 2 &\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \times 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \times \ln(e) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^2) \qquad \text{Propriété du logarithme} \\ &\Leftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

Et si on remplaçait le 2 par un 3, un -1 ou n'importe quel nombre réel... Tiens tiens... Il se passe quelque chose de marrant.

13. Exponentielle

Définition et premières propriétés

Il est indispensable d'avoir assimiler le cours sur les logarithmes pour pouvoir suivre ce cours sur les exponentielles. Ici tout sera beaucoup plus rapide que le précédent chapitre. Pas que nous souhaitons bâcler le travail mais plutôt que nous allons entièrement nous appuyer sur la fonction logarithme, raison pour laquelle nous insistons sur son assimilation.

D'ailleurs à la fin du cours sur le logarithme, avec l'aide du théorème des valeurs intermédiaire, nous avions observer que l'équation $\ln(x) = 1$ admettait une unique solution que l'on note e et dont la valeur approchée, estimée à l'aide d'un ordinateur, est 2.71828.

Qu'en est-il de manière générale de l'équation $\ln(x) = a$ pour n'importe quelle nombre réel a ? D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une unique solution.

Définition

Pour tout nombre réel a on note $\exp(a)$ l'unique solution de l'équation $\ln(x) = a$. On l'appel *exponentielle* de a. C'est la fonction réciproque du logarithme népérien.

On a immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition

1. Quelque soit le réel a, $\exp(a) > 0$.
2. $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\exp(a) > 1$.
5. Pour tout $x > 0$ alors $\exp(\ln(x)) = x$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $\ln(\exp(x)) = x$.

Démonstration.

1. Puisque $\ln(\exp(a)) = a$, le nombre $\exp(a)$ appartient au domaine de définition de $\ln$ qui est $]0; +\infty[$. Dis autrement $\exp(a) > 0$.
2. Puisque $\ln(1) = 0 = \ln(\exp(0))$ alors $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a < 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a > 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) > 1$.
5. C'est une conséquence de la réciprocité entre le $\ln$ et le $\exp$.
6. C'est une conséquence de la réciprocité entre le $\ln$ et le $\exp$.

□

Croissances comparées

Théorème

Quelque soit les nombres réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \ln(\exp(a + b)) &= a + b \\ &= \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a) \times \exp(b)) \quad \text{Propriété du logarithme} \end{aligned}$$

Puisque $\ln(\exp(a + b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$ alors $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ □

Corollaire 13.0.1

Soient a et b deux nombres réels.

1. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
2. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
3. $\exp\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$
4. $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Démonstration. Il suffit, encore une fois de repasser par la fonction logarithme. □

De $\exp(x)$ à e^x

Tout est dans le titre. On observe que les formules et propriétés de l'exponentielle sont étrangement similaire à celle des puissances. Par exemple d'un coté on $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ et d'un autre coté $10^{n+m} = 10^n 10^m$... du coup on se demande si il n'y a pas un liens entre nos familières puissances et l'exponentielle. La réponse est oui par une très simple observation :

$$\ln(\exp(x)) = x = x \times 1 = x \times \ln(e) = \ln(e^x)$$

d'après les règles de calcul sur le logarithme. Cette égalité implique donc que $\exp(x) = e^x$ et ce pour tous les x réel. Autant 10^n n'était définie que pour des n entiers autant $e^x = \exp(x)$ est définie pour tous les nombres réels !

D'ailleurs on pourrait s'amuser à définir 10^x pour n'importe quel x réelle. Tenté ? Allez on y va ! Grâce à cette formule de réciprocité entre $\ln$ et $\exp$, on peut écrire que $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sauf que le logarithme gère très bien les puissances : $\ln(10^x) = x\ln(10)$. On a $10^x = \exp(x\ln(10))$ et l'exponentielle ne soufre d'aucun problème de définition. Ca y est ! On a défini 10^x. Pourquoi s'arrêterait-on en si bon chemin ?

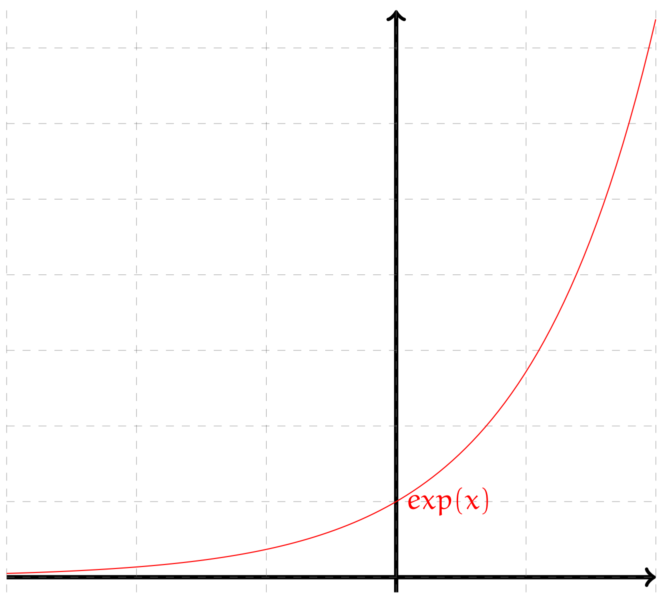
Définition

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On défini a^b par la formule :

$$a^b = \exp(b\ln(a)) = e^{b\ln(a)}$$

Le calcul quant à lui se fait à l'aide d'une calculatrice, mais à présent des expressions comme $2^{\sqrt{2}}$ ont un sens.

Ce qu'il faut retenir



1. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
2. Si $x < 0, \exp(x) < 1$
3. $\exp(0) = 1$
4. Si $x > 0, \exp(x) > 1$
5. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
6. $\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$
7. $\exp(a)^n = \exp(na)$
8. $\sqrt{\exp(a)} = \exp\left(\dfrac{1}{2}a\right)$

14. Intégrales

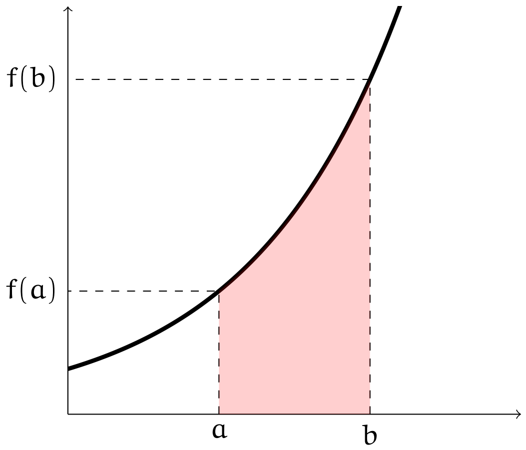
Définition

Définition

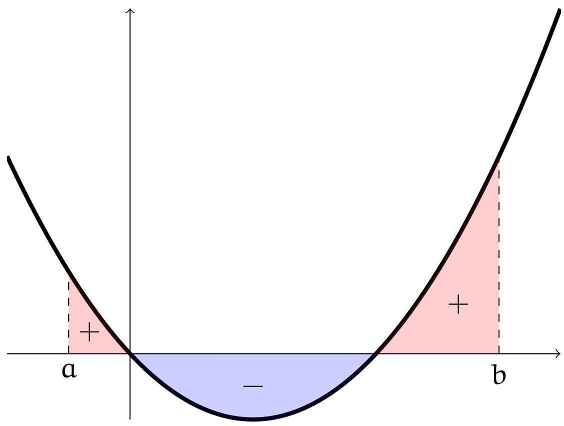
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. L'aire comprise entre les droites $x = a$, $x = b$ l'axe des abscisses ($y = 0$) et la courbe représentative de f est appelée **l'intégrale de f entre a et b**. On note cette aire

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

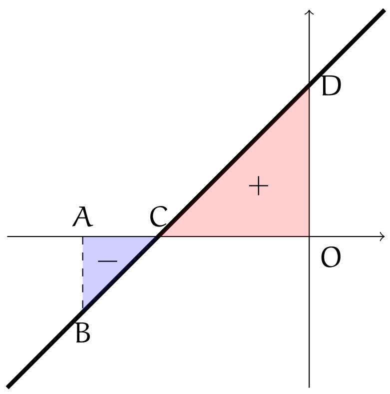
L'histoire de cette définition est multiple et trouve divers applications dans le monde de la mécanique. Nous présenterons ici un problème mathématico-mathématiques : on veut *juste* calculer une aire sous une courbe. En dessin cela donne :



Il est important de noter que l'on considère des aires algébriques. Lorsque l'aire cherchée est au dessus de l'axe des abscisses elle sera comptée positivement et négativement en dessous.



Voila une bien belle définition avec une notation bien mystérieuse, mais dans la pratique, comment est-ce que l'on procède au calcul ?



Prenons par exemple une droite d'équation $f(x) = x + 2$ et déterminons l'intégrale de f entre -3 et 0.

Un rapide dessin nous montre que cette aire est la somme de deux morceaux : l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle COD.

En fait il ne s'agit tout à fait d'une somme comme nous l'avons signalé plus haut mais plutôt d'une somme algébrique (*i.e.* qui peut changer de signe suivant le signe de f).

Le triangle étant un objet très simple de la géométrie, calculer son aire ne souffre d'aucune difficulté. L'aire du triangle ABC vaut 1 et celle du triangle COD vaut 4.

En conclusion l'aire cherchée vaut 3.

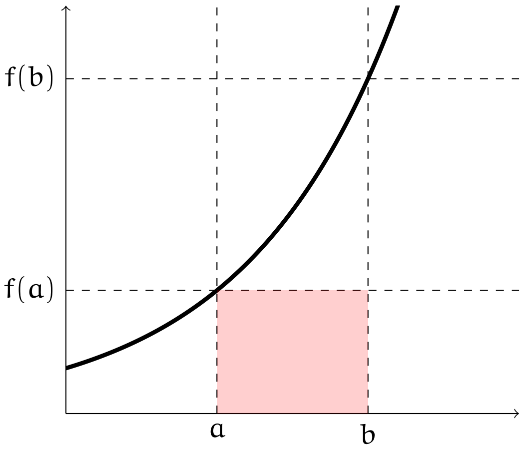
Très bien l'intégrale d'une droite c'est facile ! Il ne s'agit que d'aire de triangle... mais comment faire pour les polynômes de degrés 2, 3 un logarithme ou une exponentielle ?

Pour calculer cette aire sous la courbe, nous allons l'approcher par des objets de la géométrie beaucoup plus simple comme des triangles voir encore plus simple des rectangles.

L'un des premiers instigateur de cette approche est Bernhard Riemann d'où le nom de cette approche : les sommes des Riemann.

Les Sommes de Riemann

Approchons l'intégrale par des sommes de rectangle.

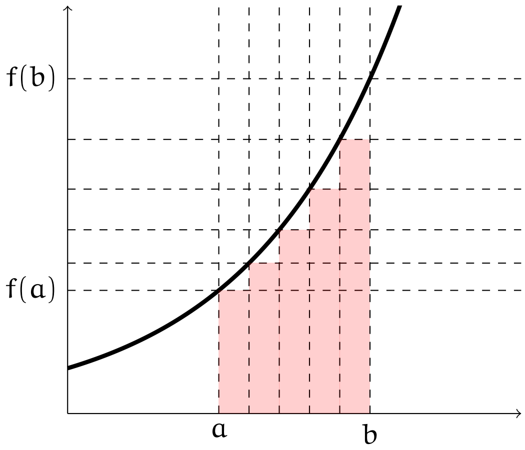


Découpage en 1 rectangle.

On a approché $\int_a^b f(x)\ dx$ par l'aire d'un rectangle d'où

$$\int_a^b f(x)\ dx \simeq (b-a) \times f(a)$$

Dans cette approche, on observe que l'erreur, la partie manquante à la vrai valeur de l'intégrale, est très grande. Le principe des sommes de Riemann est diviser l'intervalle en bien plus de rectangle pour minimiser l'erreur.

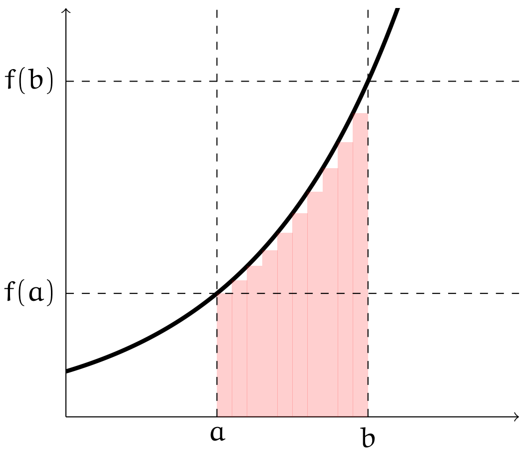


Découpage en 5 rectangles

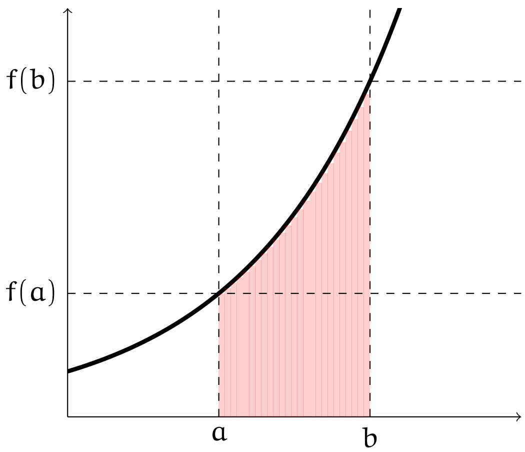
Dans cette approche on a diviser l'intervalle en 5 morceaux d'égale longueur $\dfrac{b-a}{5}$. Notons $x_i = a + i\dfrac{b-a}{5}$ de sorte que $x_0 = a$ et $x_5 = b$. Alors les rectangles ont pour aire $\dfrac{b-a}{5}f(x_i)$ de sorte que la somme des aires de ces rectangles approche bien mieux l'intégrale.

$$\int_a^b f(x)\ dx \simeq \sum_{i=0}^{4} \frac{b-a}{5} f(x_i)$$

Plus on va diviser l'intervalle $[a; b]$ en morceau petit, plus on approchera l'aire sans erreur. En mathématiques, *approcher* c'est passer à la limite.



Découpage en 10 rectangles



Découpage en 25 rectangles

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur $[a; b]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\ dx$$

L'hypothèse de continuité est un peu forte, dans la pratique il suffit de que la fonction soit *presque continue* ; c'est à dire continue sur l'intervalle $[a; b]$ sauf en certain point de cet intervalle. On retiendra que si la fonction n'est pas continue, nous pouvons tout de même définir l'intégrale.

Traitons par exemple $\displaystyle\int_0^1 \exp(x)\ dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \exp(x)\ dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\exp\left(\frac{0}{n}\right) + \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \exp\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \exp\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-\exp\left(\frac{1}{n}\right)^n}{1-\exp\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \qquad \text{Somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-\exp(1)}{1-\exp\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \lim_{x\to0} x\left(\frac{1-\exp(1)}{1-\exp(x)}\right) \qquad \text{En posant } x = \frac{1}{n} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{1-\exp(1)}{-\underbrace{\frac{\exp(x)-1}{x}}_{\to 1}} \\
&= e-1
\end{aligned}$$

Dans la pratique on ne procède JAMAIS comme ça ! C'est bien trop laborieux ! Utilisation de suite, changement de variables...

Commençons par explorer, à partir de la définition et des sommes de Riemann, les premières propriétés de l'intégrale.

Proposition

1. Relation de Chasles
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$
2. Linéarité (I)
$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$
3. Linéarité (II)
$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$
4. Positivité : si f est positive sur $[a; b]$ alors il en va de même pour $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.
5. Inégalité
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Démonstration. Ces propriétés découlent naturellement de la définition et des sommes de Riemann.
□

En particulier puisque $\int_a^a f(x)\ dx = 0$ (il n'y pas d'aire) alors la relation de Chasles donne

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

Toutes ces belles propriétés sont forts sympathique mais dans la pratique comment calculer une intégrale ?

Primitive

Définition

Soient f une fonction continue et F une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. On dira que F est une **primitive** de la fonction f si $F' = f$.

Par exemple si $f(x) = 2x$ et $F(x) = x^2$ alors F est une primitive de f. Si $G(x) = x^2 + 1$ alors $G' = f$ et G est une primitive de f. Il existe une infinité de primitive qui sont toutes les même à une constante près.

Théorème

Soient f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. Notons $G(t) = \int_a^t f(x)\ dx$. Nous allons montrer que $G'(t) = f(t)$ ce qui prouvera que G est une primitive de f et donc que $G(t) = F(t) + k$ pour un certain réel k. Ainsi nous aurons

$$F(b) - F(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^a f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

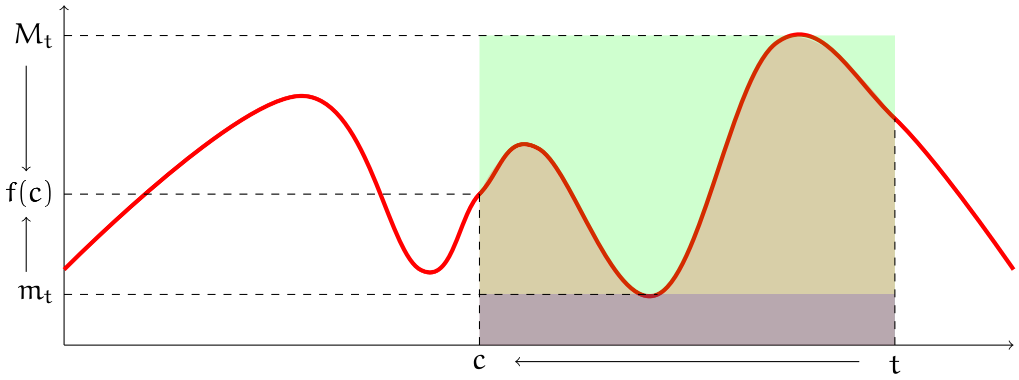
Rappelons que, par définition, $G'(c) = \lim_{t \to c} \dfrac{G(t) - G(c)}{t - c}$. Or la relation de Chasles permet d'écrire

$$G(t) - G(c) = \int_a^t f(x)\ dx - \int_a^c f(x)\ dx = \int_c^t f(x)\ dx$$

Il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaire des nombres m_t et M_t entre les nombres c et t tel que $m_t \leqslant f(x) \leqslant M_t$.

$$\begin{aligned}
m_t \leqslant f(x) \leqslant M_t \quad &\Longrightarrow \quad \int_c^t m_t\ dx \leqslant \int_c^t f(x)\ dx \leqslant \int_c^t M_t\ dx \quad && \text{par la positivité de l'intégrale} \\
&\Longrightarrow \quad (t-c)m_t \leqslant \int_c^t f(x)\ dx \leqslant (t-c)M_t && \text{aire d'un rectangle} \\
&\Longrightarrow \quad (t-c)m_t \leqslant G(t) - G(c) \leqslant (t-c)M_t \\
&\Longrightarrow \quad m_t \leqslant \frac{G(t) - G(c)}{t - c} \leqslant M_t
\end{aligned}$$

Lorsque t va tendre vers c les nombres m_t et M_t vont se rapprocher de $f(c)$. Ainsi à la limite on aura bien $f(c) = \lim_{t \to c} \dfrac{G(t) - G(c)}{t - c}$.



□

Ainsi dans la pratique lorsque l'on souhaite déterminer la valeur exacte d'une intégrale, on recherche une primitive. On observe que $F(x) = x^3 + x$ est une primitive de $f(x) = 3x^2 + 1$ de sorte $\int_0^1 3x^2 + 1 \, dx = (1^3+1) - (0^3+0) = 2$. En se sevrant des dérivés on détermine les correspondances suivantes.

Proposition

On désigne par F la primitive de f.

f	F
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x} \ (n = -1)$	$\ln(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} \ (n = -\frac{1}{2})$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

f	F
$u^n \times u' \ (n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{u} \times u' \ (n = -1)$	$\ln(u)$
$\dfrac{1}{\sqrt{u}} \times u' \ (n = -\frac{1}{2})$	$2\sqrt{u}$
$e^u \times u'$	e^u
$\cos(u) \times u'$	$\sin(u)$
$\sin(u) \times u'$	$-\cos(u)$

Par exemple une primitive de e^{3x} est $\dfrac{1}{3}e^{3x}$.

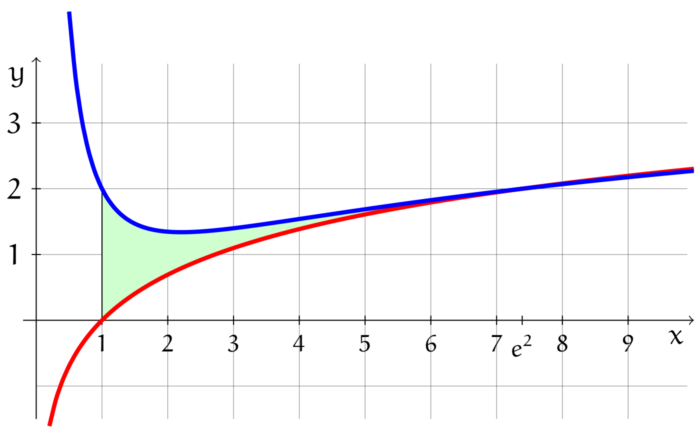
Exemple

Nous cherchons à déterminer l'aire entre la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$$

la courbe représentative la fonction $\ln$ et les droites $x = 1$ et $x = e^2$. Cela correspond à la zone verte sur le dessin. Par définition il s'agit du calcul de

$$I = \int_1^{e^2} f(x) - \ln(x) \, dx$$



Or

$$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x) \\ &= \ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}-2+\frac{2}{x}+2-\ln(x) \\ &= -\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x} \\ &= \frac{2-\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\ dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{2}{x}\ dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\ dx \\ &= [2\ln(x)]_1^{e^2} - \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{e^2} \\ &= \left(2\ln(e^2)-2\ln(1)\right) - \left(\frac{1}{2}(\ln(e^2))^2-\frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) \\ &= (2\times 2-2\times 0) - \left(\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{2}(0)^2\right) \\ &= 4-\frac{1}{2}4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Intégration par partie

Théorème

Soient u et v deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + v'u$. □

Calculons par exemple l'intégrale $\int_0^1 xe^x\ dx$. On applique la formule d'intégration par partie en posant $u' = e^x$ de sorte que $u = e^x$ et $v = x$ de sorte que $v' = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x\ dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx \\ &= \left(0e^0 - 1e^1\right) - [e^x]_0^1 \\ &= e - \left(e^0 - e^1\right) \\ &= 2e - 1 \end{aligned}$$