TD1 - Mathématiques discrètes

Calcul propositionnel

Exercice 1

Quelles sont les manières de placer les parenthèses dans l'expression $\neg p \vee q \wedge \neg r$? On comparera les tables de vérité de ces propositions.

Exercice 2

Donner les tables de vérités des propositions suivantes.

1. $q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
2. $(p \vee q) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
3. $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow (q \vee q))$
4. $\neg((p \Rightarrow q) \wedge r)$

Exercice 3

En utilisant les tables de vérité, montrer que les propositions suivantes sont égales.

1. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ et $p \Rightarrow (q \vee r)$
2. $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ et $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Exercice 4

Les expressions suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $\Big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\Big) \Longleftrightarrow \Big(p \Rightarrow (q \wedge r)\Big)$
2. $\Big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\Big) \Longleftrightarrow \Big((p \vee q) \Rightarrow r\Big)$

Exercice 5

Simplifier les propositions suivantes.

1. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
2. $\neg r \wedge (\neg r \vee (p \wedge \neg r \wedge (q \vee p)))$
3. $(\mathcal{V} \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$
4. $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
5. $\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)$
6. $q \Rightarrow (p \vee \neg r)$
7. $(p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg q)$
8. $(((p \wedge q) \Rightarrow \neg q) \wedge ((p \wedge \neg q) \Rightarrow q))$

Exercice 6

On note $\veebar$ le *ou exclusif*, dont la table de vérité est

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Montrer à l'aide d'une table de vérité que $p \veebar q = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.
2. En vous servant du résultat précédent et des règles CANDIMATICA montrer les formules suivantes.
   (a) $p \veebar p = 0$
   (b) $p \veebar 0 = p$
   (c) $p \veebar 1 = \neg p$
   (d) $p \veebar \neg p = 1$
   (e) $p \veebar q = q \veebar p$

(f) $p \mathbb{W}(q \mathbb{W} r) = (p \mathbb{W} q)\mathbb{W} r$

(g) $(p \mathbb{W} q = 0) \Leftrightarrow (p = q)$

(h) $\neg(p \mathbb{W} q) = (\neg p)\mathbb{W} q = p \mathbb{W}(\neg q) = (\neg p)\mathbb{W}(\neg q)$

(i) $(p \mathbb{W} q = r) \Rightarrow (q \mathbb{W} r = p)$

Ensembles en extension

Exercice 7

On considère dans le référentiel $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$, les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d\}$. Déterminer en extension les ensembles suivants ainsi que leur cardinalité.

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $\overline{A}$
4. $\overline{B}$
5. $\mathcal{P}(A)$
6. $\mathcal{P}(\overline{B})$
7. $\mathcal{P}(A \cap B)$
8. $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(A \cap B)\Big)$

Exercice 8

Donner le cardinal de chacun des ensembles suivants.

1. $\Big\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}\Big\}$
2. $\Big\{\varnothing, \{a, b\}, a, b, \{\varnothing\}\Big\}$
3. $\Big\{b, c\Big\}$
4. $\Big\{\{b, c\}\Big\}$
5. $\varnothing$
6. $\Big\{\varnothing\Big\}$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, reproduire dans un diagramme de Venn les parties correspondantes.

1. A
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$
4. $\overline{A}$
5. $\overline{A \cap B}$
6. $\overline{A} \cap \overline{B}$
7. $\overline{A \cup B}$
8. $\overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice 10

Dans le référentiel $\mathcal{E} = \Big\{\varnothing, a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}\Big\}$ dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. $\varnothing \in \mathcal{E}$
2. $\varnothing \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$
3. $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$
4. $\{a, b\} \in \mathcal{E}$
5. $\{b, c\} \subseteq \mathcal{E}$
6. $c \in \mathcal{E}$
7. $b \in \mathcal{E}$
8. $\{a, b\} \subseteq \mathcal{E}$
9. $\varnothing \subseteq \mathcal{E}$
10. $\{a, \{a\}\} \subseteq \mathcal{E}$
11. $\{a\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$
12. $\{a, c\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes.

1. $A \cap (\overline{A} \cap B)$
2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
4. $A \cup (A \cap B)$
5. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$
6. $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap C \cap \overline{B}$
7. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup B \cup (\overline{B} \cap C)$
8. $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap A$

Exercice 12

Fixons un référentiel $\mathcal{E}$. Soient A et B deux partie de $\mathcal{E}$. On pose

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

1. Représenter $A - B$ sur un diagramme de Venn ou de Caroll.
2. Montrer que $A - B = (A \cup B) - B$.

3. Montrer que $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

Exercice 13

Fixons un référentiel $\mathcal{E}$. Soient A et B deux partie de $\mathcal{E}$. On définie la **différence symétrique** de A et B, notée $A \Delta B$, comme la partie de E formé des éléments de $A \cup B$ qui n'appartiennent pas à $A \cap B$.

1. (a) Représenter la situation sur un diagramme de Venn ou de Caroll.
   (b) Donner une expression de $A \Delta B$ à l'aide des opérations ensembliste usuelle ($\cup$, $\cap$ et $\overline{\bullet}$).
2. Dans cette question, on pose $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
   (a) Calculer $A \Delta B$, $A \Delta C$ et $B \Delta C$.
   (b) Comparer $(A \cap C) \cap (B \Delta C)$ et $(A \cap B) \Delta C$.
3. Simplifier $\overline{A \Delta B}$.
4. Calculer $A \Delta \varnothing$, $A \Delta \mathcal{E}$ et $A \Delta A$.
5. Montrer que $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$.
6. L'opération Δ est-elle commutative ?
7. L'opération Δ est-elle associative ?

Exercice 14

Soient A, B, C et D quatre ensemble d'un référentiel $\mathcal{E}$.

1. Donner une relation simple entre $\#(A \cup B)$ et $\#A$, $\#B$ et $\#(A \cap B)$.
2. Donner une relation simple entre $\#(A \cup B \cup C)$ et $\#A$, $\#B$, $\#C$, $\#(A \cap B)$, $\#(A \cap C)$, $\#(B \cap C)$ et $\#(A \cap B \cap C)$.
3. Sur le même schéma, exprimer $\#(A \cup B \cup C \cup D)$.

Exercice 15

Dans une école comprenant 1100 élèves, 950 sont inscrits a cours d'espagnol, 520 au cours de russe et 250 au cours d'italien.

On précise que 400 élèves font de l'espagnol et du russe, 150 font de l'espagnol et de l'italien et 130 font du russe et de l'italien.

Tous les élèves font au moins une langue.

Combien d'élèves ne pratique qu'une seule langue ?

Exercice 16

En Papouasie, il y a des *papous* et des *pas-papous*. Parmi les *papous* il y a des *papas papous* et des *papous pas papa*. Mais il y a aussi des *papas pas papous* et des *pas papous pas papas*.

De plus, il y a des *papous pas papas à poux* et des *papas pas papous à poux*. Mais il n'y a pas de *papas papous à poux* ni de *pas papous pas papas à poux*.

Sachant qu'il y a 240 000 poux (en moyenne 10 par tête), et qu'il y a 2 fois plus de *pas papous à poux* que de *papous à poux*, déterminer le nombre de *papous pas papas à poux* et en déduire le nombre de *papas pas papous à poux*.

Ensembles en compréhension

Exercice 17

Donner la classe des prédicats suivants dans $\mathbb{R}$.

1. $5 < x < 7$
2. $-2 \leqslant x < 3$
3. $(x < 4) \wedge (x \geqslant \sqrt{2})$
4. $(x \in \mathbb{N}) \wedge (1 < x \leqslant \sqrt{2})$
5. $(x \in \varnothing) \Rightarrow (x > 2)$
6. $(x \in \varnothing) \wedge (x > 2)$
7. $(x > 2) \Rightarrow (x \in \varnothing)$
8. $(x \in \mathbb{N}) \vee (x < \sqrt{2})$
9. $(x \in \mathbb{Z}) \vee (x \geqslant 0)$
10. $(x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2)$
11. $(x \geqslant x) \Leftrightarrow (x = x)$
12. $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (2x^2 - 5x - 3 = 0)$

Exercice 18

Soient $p(x) = (x > 4)$ et $q(x) = (x < 5)$. Donner la classe des prédicats suivants dans $\mathbb{R}$.

1. $p(x)$
2. $q(x)$
3. $\neg q(x)$
4. $p(x) \vee q(x)$
5. $p(x) \wedge q(x)$
6. $p(x) \Rightarrow q(x)$
7. $q(x) \Rightarrow p(x)$
8. $q(x) \Rightarrow \neg p(x)$
9. $q(x) \Leftrightarrow \neg p(x)$
10. $\neg p(x) \Rightarrow q(x)$
11. $(x \in \varnothing) \Rightarrow p(x)$
12. $\neg q(x) \Rightarrow (x \in \varnothing)$

Exercice 19

Dans $\mathbb{R}$, trouver la classe des prédicats suivants.

1. $p(x) = ((x < 4) \Rightarrow (x \leqslant 5))$
2. $q(x) = ((x > 5) \Rightarrow (x < 2))$
3. $r(x) = (x^2 \leqslant 4x)$

En déduire les valeurs de vérité des propositions suivantes.

1. $p(6)$
2. $q(2)$
3. $p(6) \Leftrightarrow q(2)$
4. $p(5) \wedge q(1)$
5. $r(1)$
6. $\forall x\ p(x)$
7. $\exists x\ p(x)$
8. $\forall x\ r(x)$
9. $\exists x\ q(x)$

Exercice 20

Dans $\mathbb{R}$, trouver la classe des prédicats suivants.

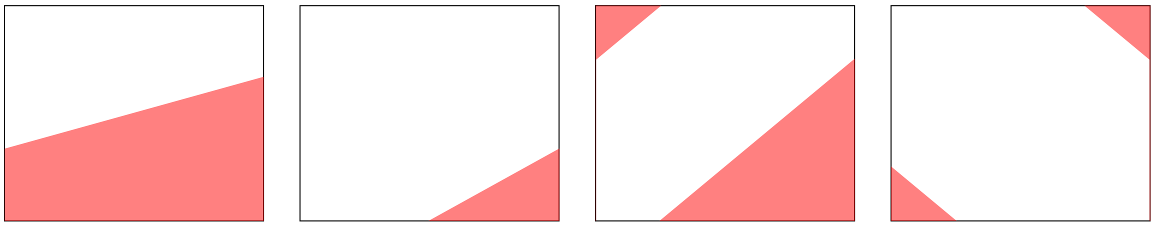
1. $p(x) = (x > 1)$
2. $q(x) = (x > 2)$

En déduire les valeurs de vérité des propositions suivantes.

1. $\forall x,\ (p(x) \Rightarrow q(x))$
2. $\forall x,\ (q(x) \Rightarrow p(x))$
3. $\exists x,\ (p(x) \Rightarrow q(x))$
4. $\exists x,\ (q(x) \Rightarrow p(x))$
5. $(\forall x,\ p(x)) \Rightarrow (\forall x,\ q(x))$
6. $(\forall x,\ p(x)) \Rightarrow (\exists x,\ q(x))$
7. $(\exists x,\ p(x)) \Rightarrow (\forall x,\ q(x))$
8. $(\exists x,\ p(x)) \Rightarrow (\exists x,\ q(x))$

Exercice 21

Dans chacun des quatre carrés de coté 1, on a dessiné des polygones A.



Donner pour chacun des carrés la valeur de vérité des propositions suivantes.

1. $\forall x,\ \exists y,\ (x, y) \in A$
2. $\forall y,\ \exists x,\ (x, y) \in A$
3. $\exists x,\ \forall y,\ (x, y) \in A$
4. $\exists y,\ \forall x,\ (x, y) \in A$