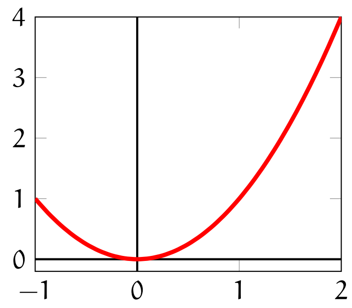
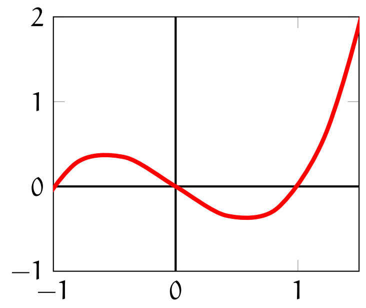
TD4 - Fonctions

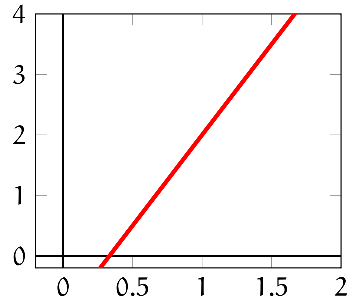
Images et antécédants

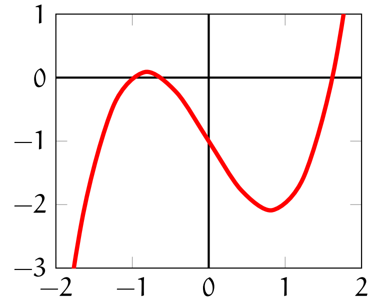
Exercice 1

Par lecture graphique donner l'image de 1.









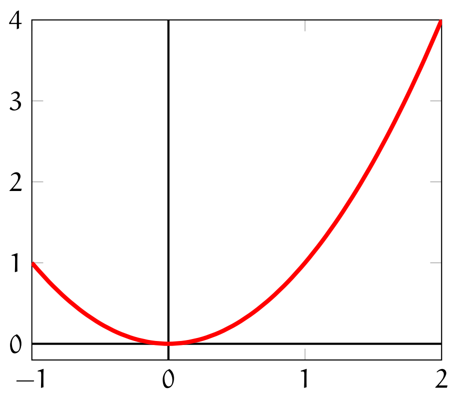
Exercice 2

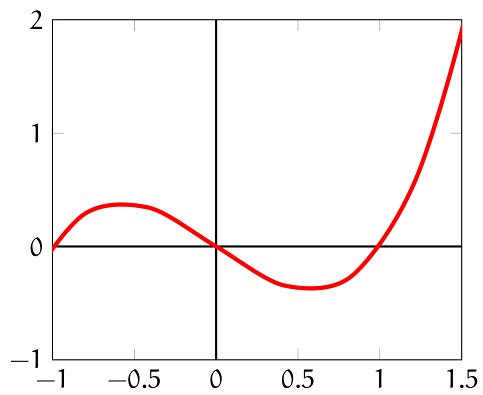
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'image de a.

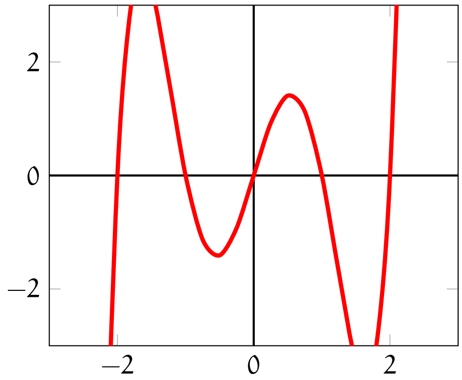
1. $x \mapsto x^2$, $a = 1$
2. $x \mapsto x^3 - x$, $a = 1$
3. $x \mapsto 3x - 1$, $a = 1$
4. $x \mapsto x^3 - 2x - 1$, $a = 1$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, $a = 0$
6. $x \mapsto \sqrt{x^4 - 9x^3 - 9}$, $a = -1$
7. $x \mapsto \dfrac{x-1}{x} + 9x - \sqrt{x^2 - 1}$, $a = 2$

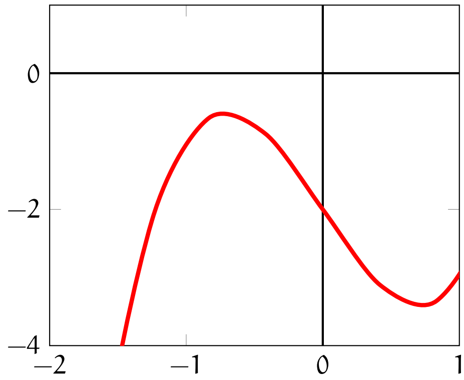
Exercice 3

Par lecture graphique donner le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 0.









Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de a.

1. $x \mapsto x^2$, $a = 1$
2. $x \mapsto x^3 - x$, $a = 0$
3. $x \mapsto 3x - 1$, $a = 1$
4. $x \mapsto x^3 - 2x - 1$, $a = -1$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, $a = 0$
6. $x \mapsto \sqrt{x^4 - 9x^2 - 9}$, $a = 2$

Intersection

Exercice 5

Déterminer le(s) point(s) d'intersection(s) éventuel(s) entre la parabole $x \mapsto (x-4)^2$ et la droite $x \mapsto 3x + 4$.

Exercice 6

Déterminer le(s) point(s) d'intersection(s) éventuel(s) entre la parabole $x \mapsto x^2 - x - 1$ et la droite $x \mapsto 2 - x$.

Exercice 7

Déterminer le(s) point(s) d'intersection(s) éventuel(s) entre la parabole $x \mapsto x^2 + x - 6$ et la droite $x \mapsto x - 2$.

Limites

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 14^+} \frac{-8}{x - 14} =$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 5^-} \frac{-15}{x - 5} =$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 7^-} \frac{9}{x - 7} =$
4. $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{61}{3}^+} \frac{-3}{x + \frac{61}{3}} =$
5. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^2 - x - \dfrac{23}{5}}{3x^4 - 7 + 4x - x^2 + 7x^3} =$
6. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{-\dfrac{35}{3} - 7x - 2x^3 - 9x^2} =$
7. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{-3 + \dfrac{11}{3}x + 5x^3}{\dfrac{2}{3}x + \dfrac{62}{5}x^2 + 4 + 5x^3} =$
8. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 8x - x^2 - x^3}{-7x^2 - x^3 - x - 5} =$

Exercice 9

1. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x>0$, $f(x)\leqslant \frac{1}{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x>0$, $f(x)\geqslant \frac{1}{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
3. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x\geqslant 1$, $\frac{1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant \frac{1}{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
4. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x\geqslant 1$, $1-\frac{1}{x}\leqslant 2f(x)-5\leqslant 1+\frac{1}{x^2}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x\geqslant 0$, $0\leqslant f(x)\leqslant \sqrt{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (c) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Dérivés

Exercice 10

Dériver les fonctions suivantes.

1. $x\mapsto x^3$
2. $x\mapsto x^4-5x^2+4$
3. $x\mapsto \sqrt{x}$
4. $x\mapsto \sqrt{x-3}$
5. $x\mapsto \sqrt{x^2+1}$
6. $x\mapsto (x^2-2x)^2$
7. $x\mapsto (x^2-x)^{47}$
8. $x\mapsto 3(x^4-9x^3+x)^7$
9. $x\mapsto (x-1)(2x+3)$
10. $x\mapsto 4(2x-4)(x+3)$
11. $x\mapsto x\sqrt{x}$
12. $x\mapsto xx^3$
13. $x\mapsto x^2\sqrt{x-1}$
14. $x\mapsto x^3\sqrt{3x-4}$
15. $x\mapsto \frac{1}{x}$
16. $x\mapsto \frac{1}{x+1}$
17. $x\mapsto \frac{1}{x^2+1}$
18. $x\mapsto \frac{3}{x^2+1}$
19. $x\mapsto \frac{3x-4}{x^2+1}$
20. $x\mapsto \frac{\sqrt{7x-8}}{3x}$

Étude de variation

Exercice 11

Le but de l'Exercice est de d'étudier la fonction $f(x)=\frac{1}{x^3-1}$

1. Domaine de définition
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+x+1=0$.
   (b) Prouver que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.
   (c) En déduire le domaine de définition de la fonction f.
2. Étude de la dérivé
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f'(x)=-\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}$

(b) En déduire les variations de f.

3. Étude aux limites

   (a) Déterminer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

   (b) Déterminer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

   (c) Conclure sur l'éventuelle existence d'asymptotes.

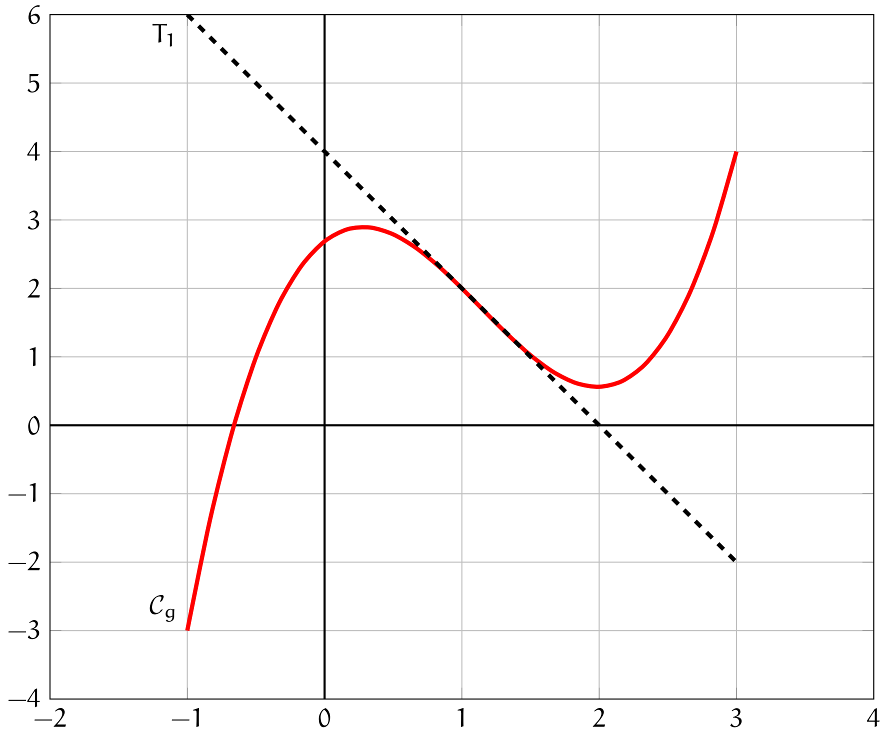
4. Donner l'équation de la tangente en 0.

5. Tracer, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 12

On donne la fonction g définie sur $[-1; 3]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-dessous.

La droite T_1 est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.



1. (a) Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$ par lecture graphique.

   (b) En déduire une équation de la tangente T_1.

2. Dans cette question on admet que $g(x) = \frac{15}{16}x^3 - \frac{51}{16}x^2 + \frac{25}{16}x + \frac{43}{16}$.

   (a) Déterminer l'équation de T_0 la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0.

   (b) Représenter T_0 dans le graphique ci-dessus.

Exercice 13

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2 - 6x - 6}{x + 5}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition.

3. Déterminer la dérivé de la fonction f.

4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.

5. Étude des asymptotes.

   (a) Déduire du calcul de limite l'équation d'une asymptote verticale.

   (b) Existe-t-il des asymptotes horizontales (non oblique) ?

(c) Montrer que $f(x) = -x - 1 - \dfrac{1}{x+5}$.

(d) En déduire l'équation d'une asymptote oblique.

6. Dessiner l'allure de la courbe sur l'intervalle $[-14; 6]$ aussi proprement que faire ce peu.

Exercice 14

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{x - 1}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition.
3. Déterminer la dérivé de la fonction f.
4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
5. Étude des asymptotes.
   (a) Déduire du calcul de limite l'équation d'une asymptote verticale.
   (b) Existe-t-il des asymptotes horizontales (non oblique) ?
   (c) Montrer que $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x-1}$.
   (d) En déduire l'équation d'une asymptote oblique.
6. Dessiner l'allure de la courbe sur l'intervalle $[-5; 5]$ aussi proprement que faire ce peu.

Logarithme

Exercice 15

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants : $A = \ln(8)$, $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$ et $C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les nombres suivants : $A = \ln(24)$, $B = \ln(144)$ et $C = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$
3. Mettre les nombres suivants sous la forme $\ln(X)$ pour un certain réel X.

$$A = 2\ln(3) + \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\ln(9) - 2\ln(3)$$

Exercice 16

Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$.

1. $\ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left((ab)^2\right)$
5. $\ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$
6. $\frac{\ln(a)}{\ln(ab^2)}$

Exercice 17

Un capital de 5000€ est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. Déterminer le nombre d'année n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000€.

Exercice 18

1. On considère la fonction $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que la droite $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   (e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (f) En déduire les variations de f.
   (g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exponentielle

Exercice 19

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x-1} + 1 \end{array}$$

Partie A. Étude de la fonction.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivé f' de f.
4. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B. Recherche d'une tangente.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f, d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer que T_a passe par l'origine si et seulement si le nombre réel a vérifie l'équation

$$1 - a^2e^{a-1} = 0$$

3. Étudier la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$.
4. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Calculer $g(1)$. En déduire la valeur exacte de α.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f qui passe par 0.

Exercice 20

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x - 1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : [0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-2)+1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de h au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de la fonction h.
3. En déduire les variations de h.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$.
5. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Prouver que $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. (Difficile) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$