TD5 - Intégration

Exercice 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x$
2. $x \mapsto 1$
3. $x \mapsto 2x$
4. $x \mapsto 3x$
5. $x \mapsto x - 1$
6. $x \mapsto e^x$
7. $x \mapsto e^x + 1$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$
10. $x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$
11. $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$
12. $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
13. $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$
14. $x \mapsto 2xe^{x^2}$
15. $x \mapsto xe^{x^2}$
16. $x \mapsto \dfrac{x}{e^{x^2}+1}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \, dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \, dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5 \, dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{3} x^2 + 1 \, dx$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x+1)^2 \, dx$
6. $\displaystyle\int_{5}^{3} 2x + 1 \, dx$
7. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x} \, dx$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2xe^{x^2+1} \, dx$
9. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1} \, dx$
10. $\displaystyle\int_{-3}^{3} e^{3x+1} \, dx$
11. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{x^2+x} + \frac{1}{2}e^{x^2+x} \, dx$
12. $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(3)} (1 - 2e^{-t}) \, dx$
13. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$
14. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$
15. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} \, dx$
16. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie.

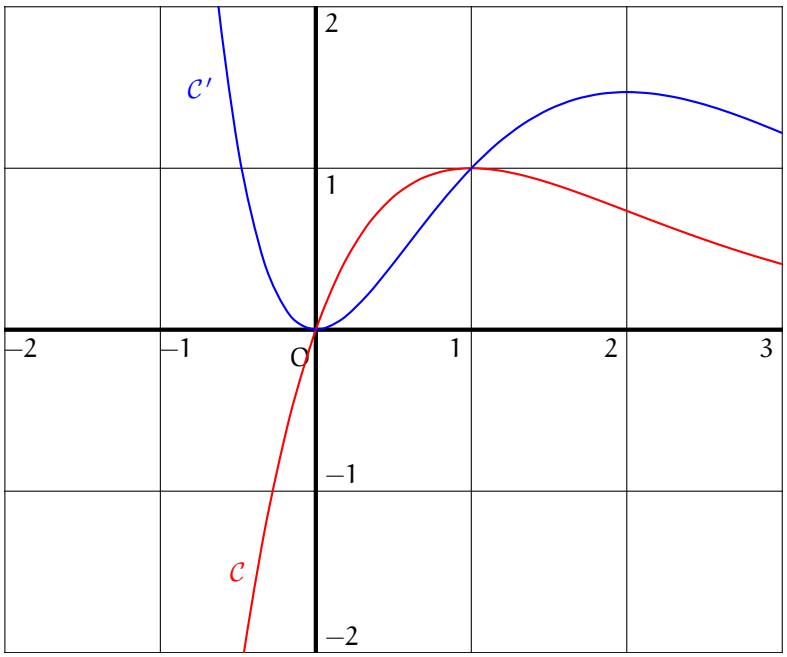
1. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x} \, dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln(x) \, dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln(x) \, dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} (1 - 2x^2)e^{-x} \, dx$

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = xe^{1-x}, \qquad g(x) = x^2e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement notées $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:



Étude des fonctions f et g.

1. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
2. Justifier le fait que f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
3. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux respectifs.

Calculs d'intégrales. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale I_n par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

Calcul d'une aire plane.

1. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
2. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Déterminer la valeur précise de $\mathcal{A}$.

Étude de l'égalité de deux aires. Soit a un réel strictement supérieur à 1. On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. On admet que $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1)$.

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une unique valeur a tel que $S(a) = \mathcal{A}$.

1. Montrer que l'équation $S(a) = \mathcal{A}$ équivaut à l'équation

$$e^a = a^2 + a + 1.$$

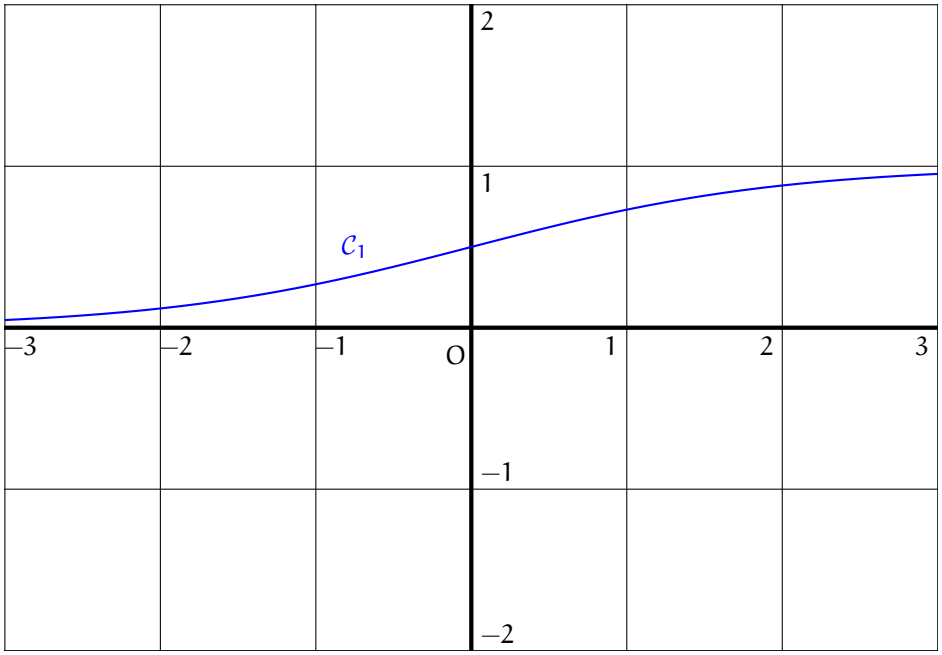
2. Conclure.

Exercice 5

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}$$

Partie A. Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ dont la courbe $\mathcal{C}_1$ est



1. Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
3. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$. En déduire les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\ dx$. Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B. Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x. On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ dans le repère de la partie précédente.
4. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C. Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vrai ou fausse et justifier la réponse.

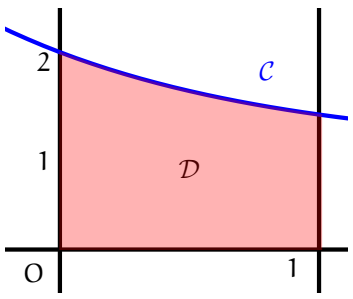
1. Quel que soit le réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quel que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0.99$.

Exercice 6

On considère la fonction g définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par :

$$g(x) = 1 + e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathcal{D}$ le domaine du plan compris d'une part entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisse et d'autre part entre les droite d'équation $x = 0$ et $x = 1$.



Le but de cet Exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaine de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A. Soit a un nombre réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$. On note $\mathcal{A}_1$ le domaine du plan compris d'une part entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisse et d'autre part entre les droite d'équation $x = 0$ et $x = a$ et $\mathcal{A}_2$ le domaine du plan compris d'une part entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisse et d'autre part entre les droite d'équation $x = a$ et $x = 1$.

1. (a) Démontrer que $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.
   (b) Exprimer $\mathcal{A}_2$ en fonction de a.
2. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \dfrac{1}{e}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0;1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Démontrer que la fonction f s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0;1]$ en un réel α. Donner la valeur arrondie au centième de α
3. En déduire une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.

Partie B. Soit b un nombre réel positif. Dans cette partie on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aires par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier que $b < 1 + \dfrac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 7

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

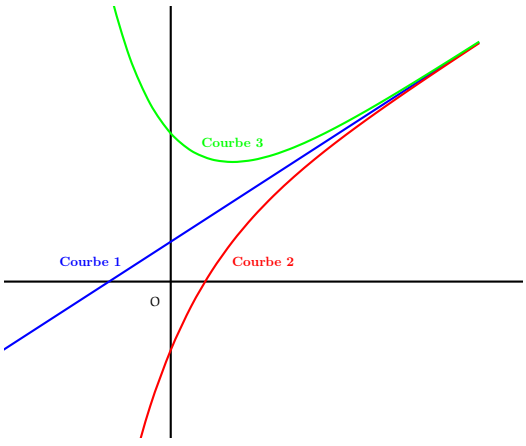
Partie A. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (x+1)e^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B. On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par : $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère orthonormal du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$, et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$). Identifier chacune de ces courbes sur la figure en justifiant.



3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.
4. (a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe des ordonnées et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur le graphique précédent.
   (b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe des ordonnées et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.