Méthodes Numériques

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

2022

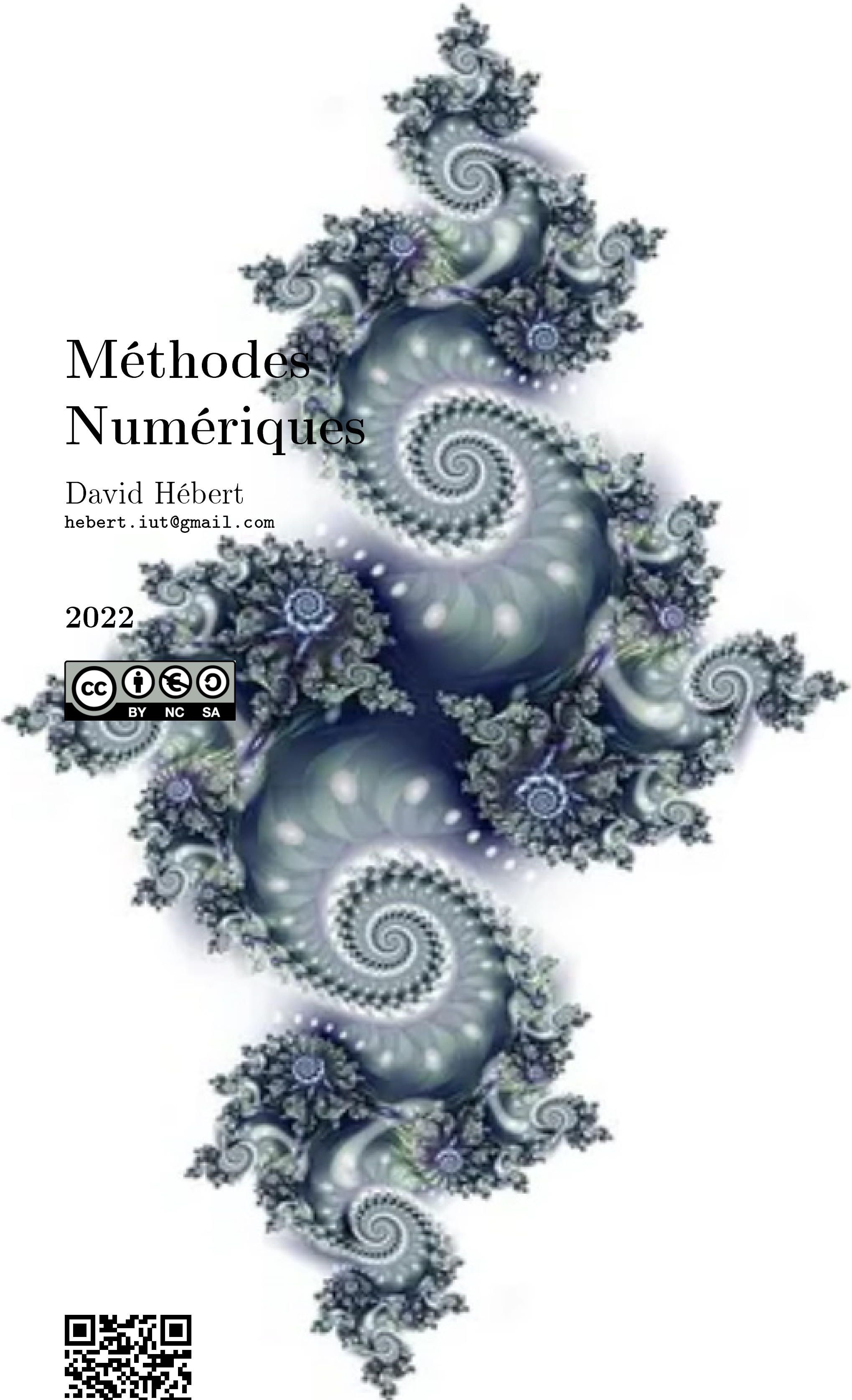


Table des matières

1. Généralités sur les suites

Considérons les nombres suivants :

$$0 \ 1 \ 3 \ 7 \ 15 \ 31 \ 63 \ \cdots$$

Pour passer d'un terme à l'autre on double le chiffre et on ajoute 1. Précisément si x est un nombre alors le nombre suivant est $2x+1$.

Les *suites* ont pour but de formaliser et d'étudier ce type de comportement.

Définition

Une **suite numérique réelle** est la donnée d'un ensemble de nombre réel indexé par le les entiers. Si u est une suite on note u_n son n-ième terme.

Lorsque l'on définie une suite on peut le faire de deux manières.

Suite explicite. Une telle définition signifie que l'on peut déterminer u_n en fonction de n. Par exemple la suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n + n$. Dans une telle définition, il suffit de remplacer, comme pour une fonction, le n par 64 pour calculer le 64-ième terme de la suite : $u_{64} = (-1)^{64} + 64 = 65$.

Suite récurrente. Une telle définition signifie que pour déterminer le 64-ième terme de la suite, il faut passer par la détermination d'un ou plusieurs terme précédents. Par exemple la suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3u_{n-1} - 1$. Dans une telle définition il est nécessaire de préciser un point de départ de la récursion en indiquant par exemple une valeur de u_0. Par exemple $u_0 = 1$. Alors dans ce cas $u_1 = 3u_0 - 1 = 3.1 - 1 = 2$, $u_2 = 3u_1 - 1 = 3.2 - 1 = 5$ etc. Pour déterminer u_{64} il est donc nécessaire de passer par le calcul de u_{63}.

Dans l'exemple de l'introduction on peut dire que la suite de nombre est une suite numérique réel définie par $u_0 = 0$ et $u_n = 2u_{n-1} + 1$.

L'un des objectifs de l'étude de suite est de passer de définition récurrente à définition explicite. Par exemple, la suite de Fibonacci est définie de manière récurrente par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (on fait la somme des deux derniers terme pour obtenir le suivant). Grâce à l'étude des suites on peut démontrer (avec un peu d'effort) que la définition explicite de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Dans cette partie nous allons nous donner quelques éléments d'études des suites.

Variations

Définition

1. On dira qu'une suite u est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On dira qu'une suite u est *strictement croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
3. On dira qu'une suite u est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
4. On dira qu'une suite u est *strictement décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

Dans la pratique on dispose de deux méthodes pour étudier les variations d'une suite.

Première méthode. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si cette différence est positive alors la suite est croissante, si elle est négative elle est décroissante. Prenons par exemple la suite $u_n = n^2 + 1$ alors $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ mais puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $2n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite u est strictement croissante.

Deuxième méthode. Cette méthode ne s'applique que lorsque la suite est strictement positive (quelque soit le n, $u_n > 0$). En effet, si u_n ne s'annule pas, on peut diviser. Dans ce cas on étudie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare avec 1. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante. Regardons par exemple la suite $u_n = 2^n$ alors $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$ et la suite est strictement croissante.

Qu'en est-il des variations de la suite de l'introduction : $u_0 = 0$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$? Il est évident que la suite u_n est toujours positive, de plus $u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1 \geqslant 0 + 1 > 0$. Donc la suite u est strictement croissante.

Limites

La limite d'une suite est toujours a limite en $+\infty$. Lorsque la suite est définit de manière explicite, on raisonne comme pour les fonctions.

Par exemple si la suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Dans la pratique, puisque le calcul des suites n'est qu'en $+\infty$ on note simplement $\lim u_n$ au lieu de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Proposition

Soient u, v et w trois suites numérique.

1. (Théorème des gendarmes) Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ pour tout n assez grand et si $\lim v_n = l = \lim w_n$ alors $\lim u_n = l$.
2. Si $v_n \leqslant u_n$ pour tout n assez grand et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.
3. Si $u_n \leqslant w_n$ pour tout n assez grand et si $\lim w_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

On peut reformuler ces propriétés à l'aide de quantificateur. Tout d'abord *pour* n *assez grand* se traduit par :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N$$

La proposition suivante s'écrit alors formellement de la manière suivante.

1.
$$\left.\begin{array}{ll} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N & v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ & \lim v_n = l \\ & \lim w_n = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = l$$

2.
$$\left.\begin{array}{ll} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N & v_n \leqslant u_n \\ & \lim v_n = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = +\infty$$

3.
$$\left.\begin{array}{ll} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N & u_n \leqslant w_n \\ & \lim w_n = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = -\infty$$

Considérons par exemple la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ de manière explicite par $u_n = (-1)^n + n$. Le "problème" de cette suite est que $(-1)^n$ n'admet pas de limite (car pour n paire $(-1)^n = +1$ et sur les impaires $(-1)^n = -1$). Cependant on a toujours $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. En ajoutant n à ces inégalités on trouve $-1+n \leqslant (-1)^n+n \leqslant 1+n$ soit en reformulant $n-1 \leqslant u_n \leqslant n+1$ et $n+1$ comme $n-1$ tendent trivialement vers $+\infty$. Il en va donc de même pour u_n et ce bien que $(-1)^n$ n'admette pas de limite.

Voici un résultat permettant non pas de calculer une limite mais de garantir son existence.

Proposition

1. Soit u une suite croissante tel que u_n soit majoré pour tout n assez grand (c'est à dire que $u_n < M$ pour un certain M ne dépendant pas de n). Alors u admet une limite.
2. Soit u une suite décroissante tel que u_n soit minoré pour tout n assez grand (c'est à dire que $u_n > M$ pour un certain M ne dépendant pas de n). Alors u admet une limite.

Par exemple, on peut rapidement montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ est décroissante et minoré trivialement par 0. Donc u admet une limite. On montre que $\lim u_n = 1$.

2. Suites arithmétiques

Définition

On dira qu'une suite u est **arithmétique** si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

où r est un nombre réel ne dépendant pas de n. On l'appelle la **raison** de la suite.

Remarque : En d'autre terme, une suite sera dite *arithmétique* si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un réel appelé *raison*.

Dans ce cas particulier de suite, on peut passer de la forme récurrente à la forme explicite assez rapidement.

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration. On raisonne par récurrence le cas initial étant trivial.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Montrons que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= u_0 + nr + r \\ &= u_0 + (n+1)r \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- **Si** $r > 0$ alors la suite est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
- **Si** $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.
- **Si** $r = 0$ alors la suite est constante et tend donc vers sa valeur constante (n'importe lequel de ses termes).

3. Suites géométriques

Définition

On dira qu'une suite est **géométrique** si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

où q est un nombre réel ne dépendant pas de n. On l'appelle la **raison** de la suite.

Remarque : En d'autre terme, une suite sera dite *géométrique* si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un réel appelé *raison*

Dans ce cas particulier de suite, on peut passer de la forme récurrente à la forme explicite assez rapidement.

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n$$

Démonstration. On raisonne par récurrence le cas initial étant trivial.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$. Montrons que $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= qu_n \\ &= qu_0 q^n \\ &= u_0 q^{n+1} \end{aligned}$$

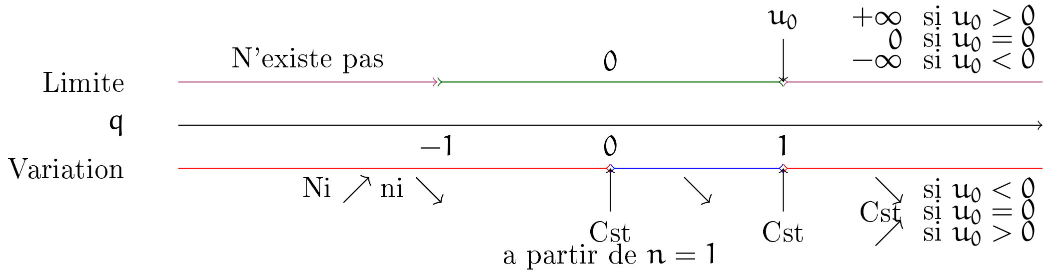
Ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire

Soit u une suite géométrique de raison q.

- **Si** $q > 1$ alors la suite est strictement monotone et tend vers ∞ ; le signe étant déterminé par le signe de u_0.
- **Si** $q = 1$ alors la suite est constante et tend donc vers sa valeur constante (n'importe lequel de ses termes).
- **Si** $0 < q < 1$ alors la suite est strictement décroissante et tend vers 0.
- **Si** $q = 0$ alors pour tout $n > 0$, $u_n = 0$ qui est aussi la valeur de sa limite.
- **Si** $-1 < q < 0$ alors la suite n'est ni croissante ni décroissante mais tend vers 0.
- **Si** $q \leqslant -1$ alors la suite n'est ni croissante, ni décroissante et n'admet pas de limite.

Remarque : Pour résumer :



*Cst : Constante

4. Sommations finies

Définition

Soit u une suite et $a \leqslant b$ deux nombres entiers. On note

$$\sum_{i=a}^{b} u_i$$

la **sommation** de tous les termes la suite u.

Par exemple $\sum_{i=10}^{15} 2^i = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15}$.

Remarque : La variable de sommation est dite *muette* : elle n'intervient pas dans le résultat de la sommation mais dans sa formulation. Ainsi $\sum_{i=a}^{b} \alpha_i = \sum_{j=a}^{b} \alpha_j = \sum_{k=a}^{b} \alpha_k = \sum_{truc=a}^{b} \alpha_{truc}$.

Propriétés de la sommation

Proposition Relation de Chasles

Soit u une suite et $a \leqslant c < b$ des nombres entiers.

$$\sum_{i=a}^{b} u_i = \sum_{i=a}^{c} u_i + \sum_{i=c+1}^{b} u_i$$

Démonstration. Trivial □

Théorème Linéarité

Soient α et β des suites de nombres réelles, $a \leqslant b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) - **Commutativité.** $\sum_{i=a}^{b} (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=a}^{b} \alpha_i + \sum_{i=a}^{b} \beta_i$.

(ii) - **Distributivité.** $\sum_{i=a}^{b} \lambda \alpha_i = \lambda \sum_{i=a}^{b} \alpha_i$.

Démonstration. Il s'agit d'un reformulation de la commutativité de l'addition $(a + b = b + a)$ et de la distributivité dans $\mathbb{R}$ $(\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b)$. □

Pour tout $a \leqslant b$, on note $[\![a; b]\!]$ l'intervalle des nombres entiers entre a et b. Comme pour les nombres réels on adoptera les notations de bornes incluses ou non ($[\![a; b[\![$, $]\!]a; b]\!]$ et $]\!]a; b[\![$)

Théorème Changement de variable

Soit $\varphi : [\![a; b]\!] \longrightarrow [\![c; d]\!]$ une bijection et α une suite de nombres réelles.

$$\sum_{i=c}^{d} \alpha_i = \sum_{j=a}^{b} \alpha_{\varphi(j)}$$

Démonstration. Puisque φ est une bijection, l'ensemble $[\![a;b]\!] = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ est transformé en $\{\varphi(a), \dots, \varphi(b)\}$ qui correspond, quitte à changer l'ordre des élément, à l'ensemble $\{c, c+1, \dots, d\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=a}^{b} \alpha_{\varphi(j)} &= \alpha_{\varphi(a)} + \dots + \alpha_{\varphi(b)} \\
&= \alpha_c + \dots + \alpha_d \\
&= \sum_{i=c}^{d} \alpha_i
\end{aligned}$$

□

Sommations classiques

Proposition

Somme de Gauss. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme quadratique de Gauss. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somme des termes d'une suite géométrique. Soient $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Binôme de Newton. Soient a et b des nombres réels et $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

Démonstration. Exercice. □

5. Suites arithmético-géométriques

Définition

On dira qu'une suite est **arithmético-géométrique** si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

pour des nombres réels a et b ne dépendant pas de n. Dans ce cas le couple de nombre réel (a, b) est appelé la **raison** de la suite.

Dans le cas ou $a = 1$ on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$ on retrouve une suite géométrique.

Proposition

Soit u une suite arithmético-géométrique de raison (a, b) tel que $a \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n (u_0 - x) + x$$

où x est la solution de l'équation $x = ax + b$.

Démonstration. D'une part $u_{n+1} = au_n$ et d'autre par $x = ax + b$. En faisant la différence des deux égalités on a $(u_{n+1} - x) = a(u_n - x)$. Soit en posant $v_n = u_n - x$, $v_{n+1} = av_n$ et v_n est une suite géométrique. Sa forme explicite est donc $v_n = a^n v_0$ soit encore $u_n - x = a^n(u_0 - x)$. □

Corollaire

Soit u une suite arithmético-géométrique de raison (a, b). Si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$ alors la suite est constante. Sinon :

Si $|a| < 1$ alors $\lim u_n = \dfrac{b}{1-a}$.

Si $a \leqslant -1$ alors u n'admet pas de limite.

Si $a > 1$ alors u tend vers l'infini, le signe étant déterminé par le signe de $u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

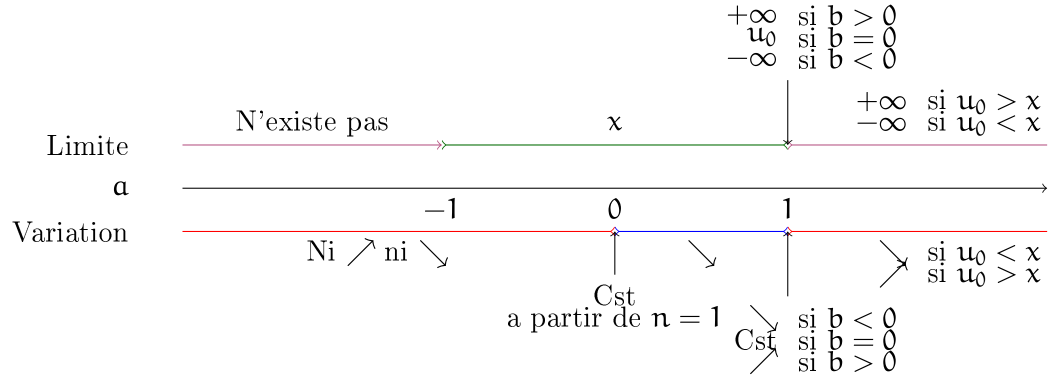
Si $a = 1$ **et** $b > 0$ alors u tend vers $+\infty$.

Si $a = 1$ **et** $b = 0$ alors u tend vers u_0.

Si $a = 1$ **et** $b < 0$ alors u tend vers $-\infty$.

Démonstration. Cela découle du théorème sur les limites des suites géométrique. Seul le cas $a = 1$ reste à démontrer. Mais si $a = 1$ alors la suite arithmético-géométrique est une suite arithmétique de raison b. La preuve de ce corollaire se déduit alors du théorème sur les limites des suites arithmétiques. □

Remarque : Pour résumer : posons $x = \dfrac{b}{1-a}$ alors si $u_0 = x$ alors $u_n = x$ pour tout n. Sinon :



*Cst : Constante

En particulier dans l'exemple de l'introduction avec la suite $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Puisque $a = 2 > 1$ on en déduit que la suite tend vers $+\infty$.

Considérons par exemple la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. C'est, par définition une suite arithmético-géométrique. La solution de l'équation $x = 2x + 1$ est -1. D'après le théorème $v_n = u_n - (-1)$ est une suite arithmétique. Sans appliquer machinalement les formules on observe :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 2u_n + 1 + 1 \\ &= 2u_n + 2 \\ &= 2(u_n + 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que v_n est une suite géométrique de raison 2 donc $v_n = v_0 2^n$ où $v_0 = u_0 + 1 = 0 + 1 = 1$. Soit $v_n = 2^n$ soit encore $u_n + 1 = 2^n$ et en conclusion $u_n = 2^n - 1$.

6. Suites équivalentes

Définition

On dira qu'une suite u est **non nul à partir d'un certain rang** si

$$\exists N, \ \forall n \geqslant N, \qquad u_n \neq 0$$

Par exemple, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + (-1)^n$ n'est pas non nul à partir d'un certain rang car pour tous les termes de rang impaire $u_n = 0$.

La suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est non nul à partir d'un certain rang. Précisément à partir du rang $N = 1$. Bien qu'elle converge vers 0 aucun de ses termes n'est nul.

Définition

On dira que deux suites u et v toutes deux non nulles à partir d'une certain rang, sont **équivalentes**, noté $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Voici l'exemple canonique.

Proposition

Soit P un polynôme non nul de degré p et de coefficient dominant $a \neq 0$.

$$P(n) \sim an^p$$

Démonstration. Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i x^i$. Avec les notations de l'énoncé on a $a_p = a$ nécessairement non nul par la définition du degré. Alors

$$\begin{aligned} \frac{P(n)}{an^p} &= \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i n^i}{an^p} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i n^i}{an^p} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{a} n^{i-p} \end{aligned}$$

Or pour i entre 0 et p le nombre $i - p \leqslant 0$. Précisément strictement inférieur à 0 si $i \neq p$ de sorte que pour $i \neq p$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{i-p} = 0$ et pour $i = p$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{i-p} = 1$. Ce qui prouve le résultat. □

Ainsi on a par exemple $-3n^2 - 2n + 1 \sim -3n^2$.

Remarque : ATTENTION : si $u \sim v$ cela ne signifie pas que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ comme peut le montrer le contre exemple $u_n = 3n^2 + n$ et $v_n = 3n^2$.

Proposition Relation d'équivalence

Soient u, v et w des suites non nulle à partir d'un certain rang.

Symétrie : $u \sim v \Rightarrow v \sim u$.

Transitif : $\Big((u \sim v) \wedge (v \sim w)\Big) \Rightarrow u \sim w$.

Réflexif : $u \sim u$.

Démonstration.

Symétrie : si $u \sim v$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ce qui permet d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{1} = 1$ soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ ce qui traduit, par définition, que $v \sim u$.

Transitif : si $u \sim v$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et si $v \sim w$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = 1 \times 1 = 1$ ce qui traduit le fait que $u \sim w$.

Réflexif : naturellement on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n} = 1$ ce qui prouve que $u \sim u$.

$\square$

Théorème

Soient u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang tel que $u \sim v$.

(i). Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

(ii). Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$.

Démonstration. On écrit $v_n = \frac{v_n}{u_n} u_n$ et on passe à la limite. $\square$

Lemme : Soit f une fonction définie et dérivable autour de 0 tel que $f(0) = 0$. Alors

$$\lim_{u\to0} \frac{f(u)}{u} = f'(0)$$

Démonstration. On reprend la définition de nombre dérivé : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On prouve le résultat en prenant $a = 0$. $\square$

Théorème

Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et f une fonction définie et dérivable autour de 0 tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors

$$f(u_n) \sim u_n$$

Démonstration. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)}{u_n} = \lim\limits_{u\to0} \frac{f(u)}{u}$ en posant le changement de variable $u = u_n$. D'après le lemme, cette limite vaut $f'(0)$ qui d'après l'hypothèse de l'énoncé vaut 1 et prouve donc que $f(u_n) \sim u_n$ $\square$

Corollaire Formulaire

Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
2. $\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \sim u_n$
3. $\dfrac{1}{1+u_n} - 1 \sim -u_n$
4. $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{1}{2} u_n$
5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
6. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
7. $\sin(u_n) \sim u_n$
8. $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
9. $\tan(u_n) \sim u_n$

Démonstration. On applique le théorème précédent avec les fonctions suivantes , dont on pourra vérifier dans chaque cas que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha - 1$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1$.
4. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$.
5. $f(x) = e^x - 1$.
6. $f(x) = \ln(1+x)$.
7. $f(x) = \sin(x)$.
8. On se sert de la limite connue $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
9. $f(x) = \tan(x)$.

□

On peut multiplier et diviser les équivalents.

Proposition

Soient a, b, c et d quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i). $[(a \sim b) \wedge (c \sim d)] \Rightarrow (ac \sim bd)$

(ii). $[(a \sim b) \wedge (c \sim d)] \Rightarrow \left(\dfrac{a}{c} \sim \dfrac{b}{d}\right)$

(iii). $a \sim b \Rightarrow a^\alpha \sim^\alpha$

Démonstration.

(i). On observe que $\dfrac{a_n c_n}{b_n d_n} = \dfrac{a_n}{b_n} \times \dfrac{c_n}{d_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

(ii). On a $\dfrac{\frac{a_n}{c_n}}{\frac{b_n}{d_n}} = \dfrac{a_n d_n}{b_n c_n} = \dfrac{a_n}{b_n} \times \dfrac{1}{\frac{c_n}{d_n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$.

(iii). On observe que $\dfrac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1^\alpha = 1$

□

On peut également composer par des fonctions classiques (exponentielle et logarithme).

Proposition

Soient a, b, c et d quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang et u et v deux suites.

(i) $e^u \sim e^v \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

(ii) $\left(\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0\right) \wedge (a \sim b)\right) \rightarrow (\ln(|a|) \sim \ln(|b|))$

(iii) $\left(\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty\right) \wedge (a \sim b)\right) \rightarrow (\ln(|a|) \sim \ln(|b|))$

Démonstration.

(i). Cela suit de l'observation que $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n}$.

(ii). On écrit $\dfrac{\ln(|a_n|)}{\ln(|b_n|)} = \dfrac{\ln(|b_n|) + \ln\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)}{\ln(|b_n|)} = 1 + \dfrac{\ln\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)}{\ln(|b_n|)}$. Ce dernier membre tend vers 0 puisque le numérateur tend vers $\ln(1) = 0$ et le dénominateur vers $\ln(0) = -\infty$ (puisque a et b ont même limite donc 0).

(iii). On raisonne comme précédemment avec $A_n = \dfrac{1}{a_n}$ et $B_n = \dfrac{1}{b_n}$.

$\square$

Théorème Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration. Cela pourra s'obtenir lors en faisant l'exercice sur les intégrales de Wallis. $\square$

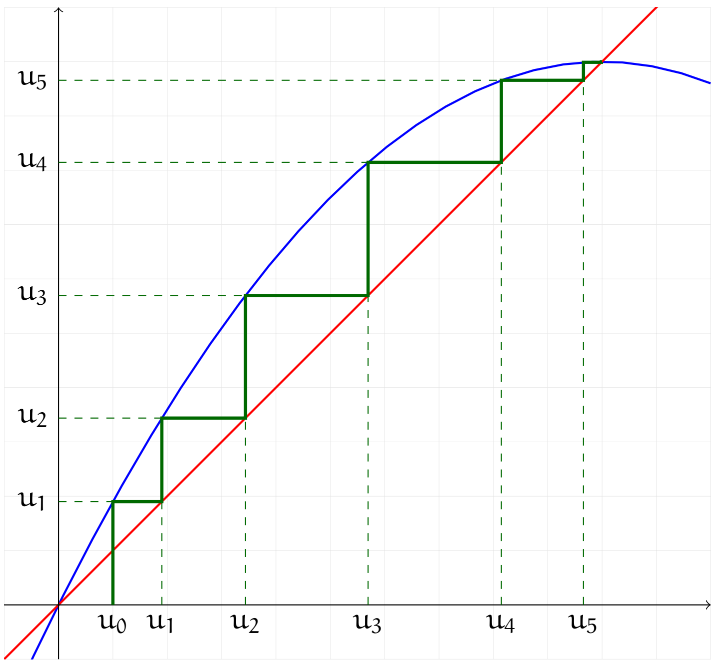
7. Suites récurrentes fonctionnelles

Définition

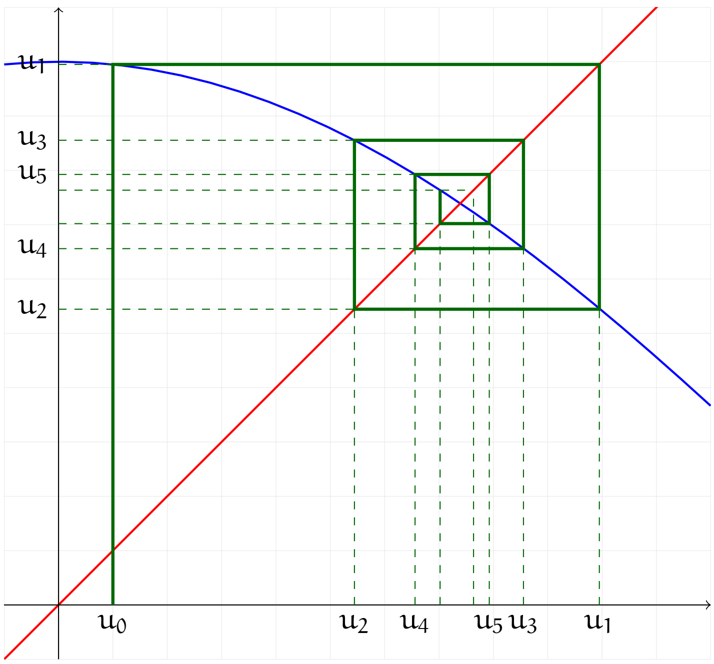
On dira qu'une suite u définie sur un domaine D, est récurrente fonctionnelle si il existe une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Les suites récurrentes fonctionnelles sont un cas particulier des suites définies de manière récurrente. Par exemple $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est une suite récurrente fonctionnelle avec $f(x) = x^2 + 1$. La suite $v_{n+1} = v_n^n + 1$ est une suite récurrente mais n'est pas fonctionnelle car on ne peut pas trouver de fonction telle que $v_{n+1} = f(v_n)$ (la fonction f définissant les suites récurrentes fonctionnelles ne doivent pas dépendre de n).

Prenons pour exemple la fonction $f(x) = -x^2 + 2x$ et la suite u récurrente fonctionnelle de fonction f où $u_0 = 0,1$. Pour "voir" u_1 il faut calculer l'image de u_0. Pour voir u_2 il faut calculer l'image de u_1. Pour cela on va se servir de la droite $y = x$ qui permet de projeter la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses. On continue ainsi de proche en proche pour construire cette représentation en escalier.



Lorsque la fonction f est décroissante on va plutôt avoir une représentation en escargot.



Quelque soit la configuration on observe assez rapidement que la limite, si elle existe, se rapproche du point d'intersection entre la courbe et la droite $y = x$.

Théorème

Soit u une suite récurrente fonctionnelle de fonction f continue. Si u admet une limite, cette limite est nécessairement une solution de l'équation $x = f(x)$.

Démonstration. Soit l la limite de u. Naturellement $\lim u_n = l$ et $\lim u_{n+1} = l$ et puisque f est continue en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ on arrive à $l = f(l)$. $\square$

L'*inconvénient* de ce théorème est qu'il permet de trouver la limite lorsque l'on a prouvé qu'elle existe. Ce résultat ne prouve en aucun cas que la limite existe.

Définition

Soient $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to I$ une fonction. On dira que f est k-**lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ est 4-lipschitzienne. En effet

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \left|\frac{y - x}{xy}\right| \\ &= \frac{1}{|xy|}|x - y| \\ &\leqslant 4|x - y| \end{aligned}$$

Puisque $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $y \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $xy \geqslant \dfrac{1}{4}$.

Théorème **Point fixe (Banach Picard - cas réel)**

Toute fonction k-lipschitzienne pour $k \in]0; 1[$ admet un unique point fixe.

De plus toute suite récurrente fonctionnelle définie à partir de f admet ce point fixe pour limite.

Démonstration. Pour fixer les idées prenons $I = [a; b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to I$.
Puisque f est définie de I sur I on a $f(a) \in [a; b]$ donc $a \leqslant f(a) \leqslant b$.

Montrons qu'il existe un point fixe. Pour cela considérons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$. Puisque f est k-lipschitzienne on a en particulier $f(x) - f(a) \leqslant k(x - a)$ soit $f(x) \leqslant k(x - a) + f(a)$. De même $f(x) - f(a) \geqslant -k(x - a)$ soit $f(x) \geqslant -k(x - a) + f(a)$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - b \\ &\leqslant k(b - a) + f(a) - b \\ &\leqslant \underbrace{(k - 1)b}_{<0} \underbrace{-ka + f(a)}_{\leqslant 0} \end{aligned}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe l tel que $g(l) = 0$ soit $f(l) = l$.

Montrons l'unicité du point fixe. Soit l_1 et l_2 deux points fixe alors $|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leqslant k|l_1 - l_2|$. Or $k \in]0; 1[$ donc nécessairement $|l_1 - l_2| = 0$ et $l_1 = l_2$.

Montrons que $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe l . Pour cela nous allons démontrer par récurrence que $|u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$ le cas initial étant trivial.

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - l| &= |f(u_n) - f(l)| \\ &\leqslant k|u_n - l| \\ &\leqslant kk^n|u_0 - l| \\ &\leqslant k^{n+1}|u_0 - l| \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.
Si l'on passe à la limite dans cette inégalité, on trouve, puisque $|k| < 1$, $|u_n - l| \to 0$ et u_n tend vers l.

□

Théorème Accroissements finis

Soit f une fonction définie, continue, dérivable et à dérivé continue sur I. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction f est k-lipschitzienne.

(ii) $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k$

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis, quelque soit x et y réels de I, il existe $c \in I$ tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$.

Si $f'(c) \leqslant k$ alors la fonction est k-lipschitzienne.

Si f est k-lipschitzienne alors $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \dfrac{k(x - y)}{x - y} = k$. □

Par exemple considérons la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{\cos(u_n)}{2}$. Il s'agit d'une suite récurrente fonctionnelle pour $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2}$ définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle $|f'(x)| = \left|\dfrac{-\sin(x)}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. La fonction est donc $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne. Elle converge vers l'unique point fixe solution de $l = \cos(l)$ (dont la valeur ne se prospecte qu'avec un ordinateur).

Application : suites arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique est une suite récurrente fonctionnelle pour $f(x) = ax + b$.

Supposons que $|a| < 1$ alors puisque $f'(x) = a$ la fonction est k-lipschitzienne pour $k < 1$ et admet donc un unique point fixe solution de l'équation $ax + b = x$ soit $x = \dfrac{b}{1 - a}$. On retrouve donc ce que nous avons déjà établie sur les suites arithmético-géométrique.

8. Suites homographiques

Définition

On dira qu'une fonction f est **homographique** si il existe des réels a, b, c et d tel que $c \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ est homographique.

Définition

On dira qu'une suite u est homographique si :

1. Il existe une fonction homographique f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{D}$

Pour une fonction homographique $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ son domaine $\mathcal{D}$ est $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Par exemple la suite $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$ n'est pas une suite homographique. En effet, la fonction homographique est $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$. Or si $u_0 = 0$ alors $u_1 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1 \notin \mathbb{R} - \{-1\}$

Autre exemple : la suite $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \end{cases}$ est une suite homographique. En effet, la fonction homographique est $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. De plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ ou $u_n = -1$. Cela se montre par récurrence le cas initial étant trivial. Si on suppose que $u_n = 0$ ou $u_n = -1$ montrons qu'il en va de même pour u_{n+1}.

Si $u_n = 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$ Si $u_n = -1$ alors $u_{n+1} = \dfrac{-1+1}{-1-1} = 0$

Ce qui conclut la récurrence.

Définition

Soit $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ une fonction homographique. On définit le **déterminant** de f, noté $\texttt{det}(f)$ le nombre

$$\texttt{det}(f) = ad - bc$$

Par exemple le déterminant de la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ est $\texttt{det}(f) = 2 \times 2 - (-1) \times 3 = 7$.

Proposition

Soit u une suite homographique de fonction f. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i). $\texttt{det}(f) = 0$.

(ii). La fonction f est constantes

Dans ce cas la suite homographique u est constante (à partir d'un certain rang).

Démonstration.
Notons $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ la fonction homographique. On rappel que $\texttt{det}(f)=ad-bc$ et que $c\neq 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $\texttt{det}(f)=0$. On a alors, puisque $c\neq 0$, $b=\dfrac{ad}{c}$ alors dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ &= \frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d} \\ &= \frac{\frac{acx+ad}{c}}{cx+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} \\ &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que la fonction f soit constante. Cela signifie que pour tout x dans le domaine de définition de f, $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\lambda$ pour un certain réel λ. En réécrivant cette égalité, on a donc que pour tout x, $(-\lambda c+a)x=\lambda d-b$. Une autre manière de dire que cette égalité est vraie pour tout x équivaut à dire que l'équation qu'elle définie admet un infinité de solution. Cela n'est possible que si $-\lambda c+a=0$ et $\lambda d-b=0$ ce qui se reformule en $\dfrac{a}{c}=\lambda=\dfrac{b}{d}$ soit $ad=bc$ et donc $\texttt{det}(f)=0$.

$\square$

Comme nous l'avons exploré tout au long des chapitres, l'une des questions fréquentes lorsque l'on manipule des suites est de passer de la forme récurrente à la forme explicite. Pour n'importe qu'elle suite cela est difficile voir impossible. Dans le cas très particulier des suites arithmétiques, géométrique ou arithmético-géométrique, nous y sommes parvenu. Pour les suites homographique, nous allons également pouvoir y parvenir.

Appliquons dans un premier temps le théorème du point fixe.

Corollaire

Soit u une suite homographique à valeur dans un un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, définie par la fonction $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Si, pour tout $x\in I$, $|\text{det}(f)|<(cx+d)^2$ la fonction f admet un unique point fixe dans I et u converge vers ce point fixe.

Démonstration. On a $f'(x)=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{\text{det}(f)}{(cx+d)^2}$. La condition de l'énoncé équivaut donc à dire que $|f'(x)|<1$ et donc la fonction est k-lipschitzienne pour $k<1$. Elle admet donc un unique point fixe valeur de convergence de la suite. $\square$

Considérons par exemple la suite homographique $\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{2u_n-1}{2-u_n}\end{cases}$ dont le déterminant de la fonction associée vaut 3. On montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<0$. On observe que si $x<0$ alors $-x>0$ d'où $2-x>2$ donc $(2-x)^2>4>3=\text{det}(f)$ (on se place sur l'intervalle $]-\infty;0[$). Donc la suite converge vers l'unique point fixe de f sur $]-\infty;0[$. Déterminons ce point fixe : c'est la solution de l'équation $f(x)=x$.

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2-x}=x \Leftrightarrow 2x-1=2x-x^2 \Leftrightarrow 1=x^2$$

Les deux solutions de cette équation sont 1 et -1 mais une seule valeur est dans l'intervalle $]-\infty;0[$. La limite de cette suite est -1.

A partir du point fixe on peut chercher la forme explicite d'une suite homographique.

Observons en effet que nous avons trouvé que -1 et 1 étaient les seuls points fixe de f sur son domaine de définition. On considère alors $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ alors

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}\\
&= \frac{\dfrac{2u_n-1}{2-u_n}-1}{\dfrac{2u_n-1}{2-u_n}+1}\\
&= \frac{\dfrac{(2u_n-1)-(2-u_n)}{2-u_n}}{\dfrac{(2u_n-1)+(2-u_n)}{2-u_n}}\\
&= \frac{\dfrac{3u_n-3}{2-u_n}}{\dfrac{u_n+1}{2-u_n}}\\
&= \frac{3u_n-3}{u_n+1}\\
&= 3\frac{u_n-1}{u_n+1}\\
&= 3v_n
\end{aligned}
$$

et v_n est une suite géométrique de raison 3. Son premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = 3$. On peut donc écrire $v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$.

Dans ce cas

$$
\begin{aligned}
3^{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n+1} &\Leftrightarrow 3^{n+1}(u_n+1) = u_n - 1\\
&\Leftrightarrow 3^{n+1}u_n + 3^{n+1} = u_n - 1\\
&\Leftrightarrow 3^{n+1}u_n - u_n = -3^{n+1} - 1\\
&\Leftrightarrow u_n(3^{n+1}-1) = -3^{n+1} - 1\\
&\Leftrightarrow u_n = -\frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}
\end{aligned}
$$

Et nous avons donc trouvé la forme explicite de u.

Formalisons tout ça avec un théorème.

Théorème

Soit u une suite homographique associée à la fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$. Supposons que

(i). la suite u soit à valeur dans un intervalle $I \subset \mathcal{D}$,

(ii). la fonction f admette un unique point fixe ℓ dans I,

(iii). la suite u converge vers ℓ,

(iv). il existe des réels α et β tel que $cx^2 + (d-a)x - b = c(x-\alpha)(x-\beta)$,

(v). $u_0 \neq \alpha$ et $u_0 \neq \beta$.

Alors

Si $\alpha \neq \beta$ alors $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est une suite géométrique.

Si $\alpha = \beta$ alors la suite $v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$ est une suite arithmétique.

Démonstration.

Commençons par observer qu'une fonction homographique est une bijection (de son domaine sur son codomaine). Précisément

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{ax+b}{cx+d}\\
&\Leftrightarrow y(cx+d) = ax+b\\
&\Leftrightarrow cxy + dy = ax+b\\
&\Leftrightarrow cxy - ax = b - dy\\
&\Leftrightarrow x(cy-a) = b - dy\\
&\Leftrightarrow x = \frac{b-dy}{cy-a}
\end{aligned}
$$

Observons de plus que $f(x) = x$ est équivalent à $cx^2 + (d-a)x - b = 0$. Ainsi la condition (iv) se reformule en demandant que α et β soient les points fixe de f. Autrement dit :

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \qquad \beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

Mais un point fixe d'une fonction bijective f est également un point fixe de sa bijection réciproque. En particulier nous avons

$$\alpha = \frac{b - d\alpha}{c\alpha - a} \qquad \beta = \frac{b - d\beta}{c\beta - a}$$

Si $\alpha \neq \beta$ alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} \\
&= \frac{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \alpha}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \beta} \\
&= \frac{\dfrac{au_n + b - \alpha cu_n - \alpha d}{cu_n + d}}{\dfrac{au_n + b - \beta cu_n - \beta d}{cu_n + d}} \\
&= \frac{au_n + b - \alpha cu_n - \alpha d}{au_n + b - \beta cu_n - \beta d} \\
&= \frac{(a - \alpha c)u_n + b - \alpha d}{(a - \beta c)u_n + b - \beta d} \\
&= \frac{(a - \alpha c)\left(u_n + \dfrac{b - \alpha d}{a - \alpha c}\right)}{(a - \beta c)\left(u_n + \dfrac{b - \beta d}{a - \beta c}\right)} \\
&= \frac{(a - \alpha c)\,(u_n - \alpha)}{(a - \beta c)\,(u_n - \beta)} \\
&= \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}\,\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \\
&= \frac{a - \alpha c}{a - \beta c} v_n
\end{aligned}$$

Si $\alpha = \beta$ alors la racine est double. Cela signifie que la racine du polynôme ((iv)) est

$$\alpha = \frac{a - d}{2c}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} \\
&= \frac{1}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \alpha} \\
&= \frac{cu_n + d}{au_n + b - \alpha cu_n - \alpha d} \\
&= \frac{cu_n + d}{au_n + b - \dfrac{a - d}{2c} cu_n - \alpha d} \\
&= \frac{cu_n + d}{\dfrac{a + d}{2} u_n + b - \alpha d} \\
&= \frac{cu_n + d}{\dfrac{a + d}{2} u_n + \alpha(c\alpha - a)} \\
&= \frac{cu_n + d}{\dfrac{a + d}{2} u_n + \alpha\left(c\dfrac{a - d}{2c} - a\right)} \\
&= \frac{cu_n + d}{\dfrac{a + d}{2} u_n - \alpha\dfrac{a + d}{2}} \\
&= \frac{cu_n + d}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{cu_n + d + \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2}}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{\dfrac{a + d}{2} + cu_n - \dfrac{a - d}{2}}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{\dfrac{a + d}{2} + cu_n - c\dfrac{a - d}{2c}}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{\dfrac{a + d}{2} + cu_n - c\alpha}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{\dfrac{a + d}{2} + c(u_n - \alpha)}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{\dfrac{a + d}{2}}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} + \frac{c(u_n - \alpha)}{\dfrac{a + d}{2}(u_n - \alpha)} \\
&= \frac{1}{u_n - \alpha} + \frac{c}{\dfrac{a + d}{2}} \\
&= v_n + \frac{c}{\dfrac{a + d}{2}}
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque : Ce théorème est somme toute très inquiétant. Il montre *simplement* la méthode permettant d'arriver à la forme explicite.

La conditions (i) permet de s'assurer que la suite est bien définie.

Les conditions (ii) **et** (iii) permettent de s'assurer que le point fixe existe et est unique (sur I).

La condition (iv) correspond à trouver les points fixe de la fonction f.

La condition (v) évite les problèmes. Mais si $u_0 = \alpha$ ou $u_0 = \beta$ alors la suite u_n est constante.

Un énoncé d'exercice commençant par *Soit* u *une suite homographique convergente…* suffit à s'abstenir de vérifier les conditions (i), (ii) et (iii)

Remarque : Le détail de la démonstration donne en particulier les raisons des suites v du théorème.

Dans le cas ou $\alpha \neq \beta$ alors la raison de la suite géométrique $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est $\dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$

Dans le cas ou $\alpha = \beta$ alors la raison de la suite arithmétique $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est $\dfrac{2c}{a + d} = \dfrac{c}{\sqrt{\det(f)}}$.

Supposons que la suite $\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n - \frac{3}{2}}{6u_n - 5} \end{cases}$ est convergente. Déterminons sa limite. C'est un point fixe de la fonction homographique associé.

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{6x - 5} = x \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{3}{2} = x(6x-5) \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{3}{2} = 6x^2 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 6x + \frac{3}{2} = 0$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (-6)^2 - 4(6)\frac{3}{2} = 0$. Le polynôme admet donc une seule racine double $\ell = \frac{-(-6)}{2(6)} = \frac{1}{2}$.

Regardons la suite $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$ et montrons qu'elle est arithmétique. Pour cela il faut montrer que la quantité $v_{n+1} - v_n$ ne dépend pas de n.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{u_n - \frac{3}{2}}{6u_n - 5} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{6u_n - 5}{u_n - \frac{3}{2} - 3u_n + \frac{5}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{6u_n - 5}{-2u_n + 1} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{(6u_n - 5)\left(u_n - \frac{1}{2}\right) - (-2u_n + 1)}{(-2u_n + 1)\left(u_n - \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{6u_n^2 - 3u_n - 5u_n + \frac{5}{2} - (-2u_n + 1)}{-2u_n^2 + u_n + u_n - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{6u_n^2 - 6u_n + \frac{3}{2}}{-2u_n^2 + 2u_n - \frac{1}{2}} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Ainsi v est bien une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{-2 - \frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{5}$.
Alors pour tout n, $v_n = -3n - \frac{2}{5}$ soit $\dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}} = -3n - \frac{2}{5}$ soit encore $u_n = \dfrac{1}{-3n - \frac{2}{5}} + \frac{1}{2}$.