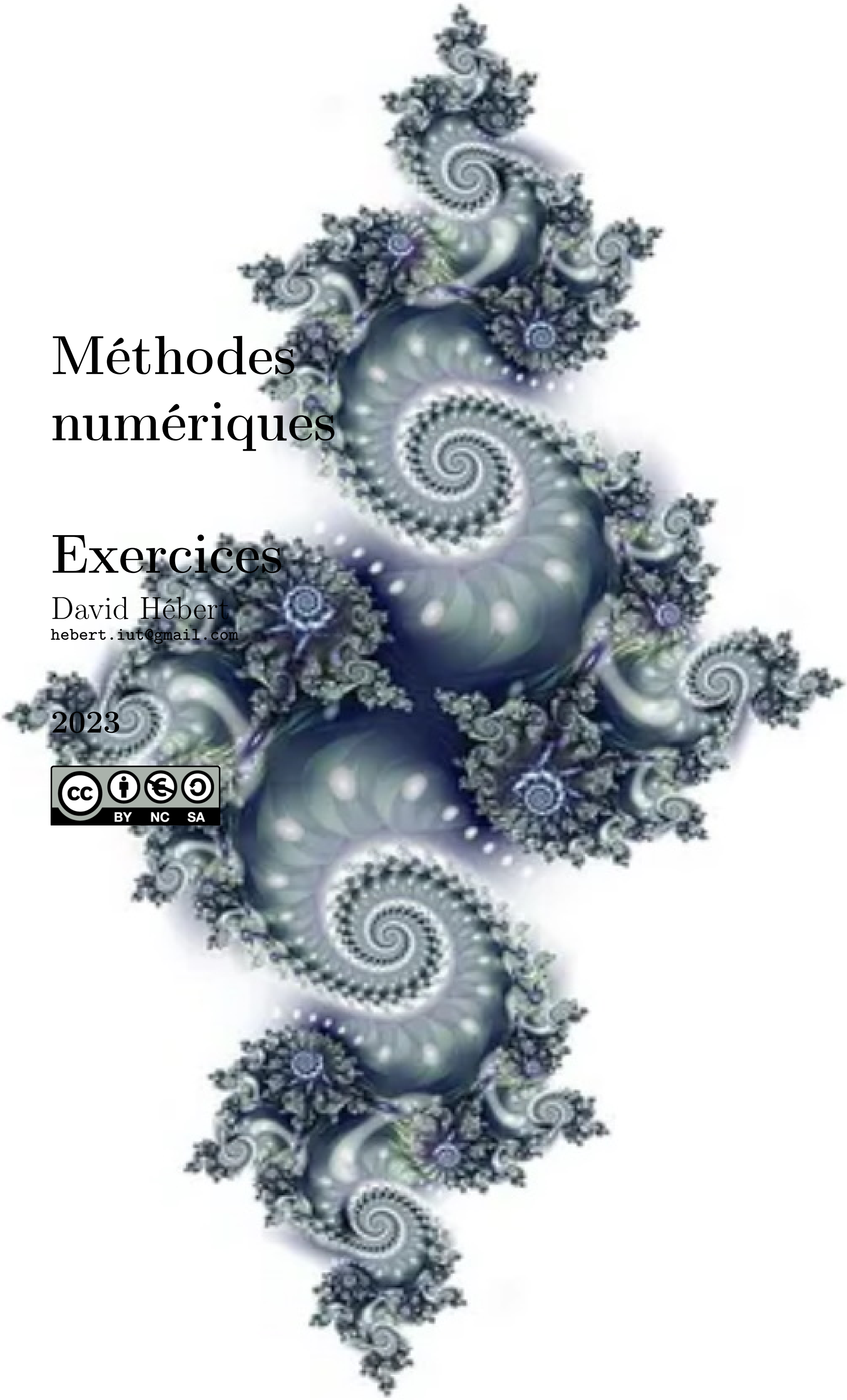

Méthodes numériques

Exercices

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

2023

Sommation et récurrence

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{2} 3n$
2. $\sum_{k=0}^{3} k^2$
3. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i}$
4. $\sum_{x=1}^{3} 1-x$
5. $\sum_{y=0}^{4} 3y-2$

Exercice 2

Écrire, à l'aide du symbole Σ, les sommes suivantes.

1. $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$
2. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+\cdots+1982\times 1983$
3. $3+7+11+15+\cdots+43+47$
4. $1-2+4-8+\cdots+1024-2048$
5. $1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1$
6. $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14+15$

Exercice 3

Démontrer les formules suivantes par récurrence sur $\mathbb{N}$ après les avoir exprimé à l'aide du signe Σ

1. $1+2+3+\cdots+N=\dfrac{N(N+1)}{2}$
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2=\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3=(1+2+3+\cdots+N)^2$

Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réel tel que $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$. Monter que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<2$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réel tel que $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}$. Monter que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 6

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

Exercice 7

On considère ici des divisions euclidienne (c'est à dire que nous ne manipulons que des nombres entiers). On note $a|b$ pour dire que a divise b. Cela signifie :

$$\forall a,b\in\mathbb{Z},\ \Big((a|b)\iff(\exists k\in\mathbb{Z},\ b=ka)\Big)$$

Montrer par récurrence les propositions suivantes.

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ 9|(10^{n+1}-1)$
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ 3|(4^n-1)$
3. $\forall n\in\mathbb{N},\ 3|(4^n+1)$

Exercice 8

Soit (a_k) une suite d'entier tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k=n(n+2)$. Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{6} a_k$
2. $\sum_{k=0}^{n+1} a_k$
3. $\sum_{k=0}^{2n} a_k$
4. $\sum_{k=0}^{n} 1 - a_k$
5. $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$
6. $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$

Exercice 9

1. Rappeler la valeur de $\sum_{p=0}^{n} p^2$.
2. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{n} (2p)^2$.
3. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{n} (2p+1)^2$.
4. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{2n+1} (-1)^p p^2$.

Exercice 10

En utilisant le binôme de Newton développez :

1. $(x+1)^3$
2. $(x-1)^4$
3. $(x+2)^5$
4. $(1-2x)^6$

Exercice 11

1. Montrer que $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. (a) Appliquer la formule du binôme à $(1+x)^n$.
   (b) En utilisant la formule du produit de somme déterminer les entiers c_k tel que $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$.
3. Appliquer la formule du binôme à $(1+x)^{2n}$
4. En déduire une valeur de $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Exercice 12

Quel est le coefficient de x^{17} dans l'expression $(1+x^5+x^7)^{20}$?

Variations, limites et équivalents des suites

Exercice 13

Les suites suivantes sont-elles croissantes, décroissantes ou ni l'une ni l'autre ?

1. $u_n = n^2 + 2n + 1$
2. $v_n = \dfrac{2^n}{n}$
3. $w_n = \dfrac{2^n}{n!}$
4. $t_n = \dfrac{-n+1}{n-1}$

Exercice 14

Soit u une suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} \end{cases}$. On admet que tous les termes de cette suite existe.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$
3. En déduire les variations de la suite u.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 15

Parmi les suites suivantes déterminer celle qui sont arithmétiques, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison lorsque cela est possible.

1. $u_n = 2n+3$
2. $u_{n+1} = \dfrac{3n+1}{2}$
3. $u_{n+1} = 3^n + 3n$
4. $u_n = n^2 - n$
5. $u_n = 5^{n+3}$
6. $u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

Exercice 16

Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r et u_{100}.
2. $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r et u_{10}.

Exercice 17

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

1. $u_0 = 4$ et $q = 5$. Exprimer u_n en fonction de n.
2. $u_4 = 8$ et $q = 2$. Calculer u_2 et u_6.
3. $u_5 = 64$ et $u_7 = 256$. Calculer q et u_{10}.

Exercice 18

Soit u une suite arithmétique tel que $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ et $u_{10} + u_{11} = 40$.

1. Calculer le premier terme et la raison.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{30} u_k$.

Exercice 19

Un bûcheron fou veut raser une forêt de dix mille arbres. Chaque année il coupe cinquante arbre de plus que l'année précédente. Au bout de dix ans il a rasé la forêt. Combien d'arbre a-t-il coupé la première année ?

Exercice 20

Dans un milieu nutritif une paramécie se multiplie par mitose toutes les secondes (la paramécie se divise en 2). En combien de temps le nombre de paramécie sera supérieur à un million ?

Exercice 21

Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{56} n$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{56} k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{56} 2k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{567} k^2$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{56} k^2 + 3k$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{333} (-1)^k$
8. $\displaystyle\sum_{k=7}^{123} (3k-1)$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{55} 2^{2k}$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{11} \frac{1}{3^k}$

Équivalents

Exercice 22

Déterminer un équivalent des suites suivantes (lorsque cela est possible) et en déduire leur limite.

1. $u_n = 1$
2. $u_n = \dfrac{1}{2^n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$
4. $u_n = \dfrac{-3n+5}{2n+1}$
5. $u_n = \dfrac{-3\sqrt{n}+5}{2n+1}$
6. $u_n = \dfrac{-3n+5}{2n^2+1}$
7. $u_n = (-1)^n$
8. $u_n = \dfrac{1}{1-\dfrac{n}{n^2+1}} - 1$
9. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-n+1} - 1$
10. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}} - 1$
11. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^2 - 1$
12. $u_n = \left(\dfrac{-3n+1}{5n-4}\right)^2$
13. $u_n = \dfrac{1}{C_{2n}^n}$
14. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$
15. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
16. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Suites arithmético-géométrique et homographiques

Exercice 23

Soit u_n la suite définie de manière récurrente par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n - 3 \end{cases}$. On considère la suite $v_n = u_n + 3$.
Montrer que v_n est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de u_n.

Exercice 24

Soit u_n la suite définie de manière récurrente par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$. On considère la suite $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.
Montrer que v_n est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de u_n.

Exercice 25

Pour chacune des questions, donner l'expression de la suite u_n en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 &= -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n-1}{u_n+2} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n+2}{2u_n+1} \end{cases}$
7. $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 3 \end{cases}$
8. $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n+2}{2u_n+1} \end{cases}$
9. $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{2u_n-3}{12u_n-10} \end{cases}$