TD2 : Méthodes d'optimisation

Exercice 1

Le but de l'exercice est de d'étudier la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$

1. Domaine de définition
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
   (b) Prouver que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
   (c) En déduire le domaine de définition de la fonction f.
2. Étude de la dérivé
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{(x^3 - 1)^2}$
   (b) En déduire les variations de f.
3. Étude aux limites
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   (c) Conclure sur l'éventuelle existence d'asymptotes.
4. Donner l'équation de la tangente en 0.
5. Tracer, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1} \end{array}$$

1. Étudier la fonction. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
2. Donner l'équation de la tangente en 0.
3. Représentez, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 3

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3} \end{array}$$

1. Étudier la fonction. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
2. Trouver deux réels a et b tel que que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2 + 3}$. En déduire une asymptote oblique et la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.
3. Représentez, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Partie A. Généralités sur la fonction f.

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
2. En déduire l'existence éventuelle d'asymptote.

3. Prouver que la droite $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.
4. Étudier la position relative de l'asymptote oblique et de la courbe.

Partie B. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$g(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^3}$$

1. Étudier les limites de g au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de g.
3. Dresser le tableau de variation de g. On admettra que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Partie C. Conclusion

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f'(x) = g(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Dessiner aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 5

1. On considère la fonction $g(x) = -x^2 + 1 - \ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{\ln(x)}{2x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que la droite $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   (e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (f) En déduire les variations de f.
   (g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 6

1. On considère la fonction $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que $f'(x) = g(x)$.
   (e) En déduire les variations de f.
   (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 7

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x - 1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-2)+1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de h au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de la fonction h.
3. En déduire les variations de h.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;+\infty[$.
5. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-1}{e^x-x} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Prouver que $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. (Difficile) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1}$