TD3 : Méthodes d'optimisation

Exercice 1

On considère la fonction $f(x, y) = y - x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer l'image de $(1, 2)$.
2. Tracer les lignes de niveau 0, 1 et 2.
3. Déterminer et tracer la fonction partielle $f_{|x=0}$
4. Essayer de proposer une représentation en perspective de f.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy}{y^2}$.

1. Déterminer le plus grand domaine de définition de f.
2. Déterminer la fonction partielle $f_{|x=a}$ puis en déduire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.
3. Déterminer la fonction partielle $f_{|y=b}$ puis en déduire $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.
4. Déterminer les points critique de f.
5. Calculer les dérivées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.
6. Vérifier le lemme de Schwartz.
7. Déterminer la nature des points critiques.

Exercice 3

Étudiez les fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - 6y^2 + xy + x - 1$
3. $f(x, y) = e^{x^2 - xy}$
4. $f(x, y) = \ln(x + y)$
5. $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
7. $f(x, y) = x^3 - xy^2$
8. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
9. $f(x, y) = (1 + x)(1 + y)$
10. $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 3x - y$

Exercice 4

Vous réaliser N observations de deux caractères quantitatifs x et y. Il semble raisonnable de penser que le modèle se rapproche d'une estimation de la forme $y_i = ax_i + \dfrac{b}{x_i}$.

Quelles sont les meilleures estimations de a et de b ?

Exercice 5

Même exercice que précédemment avec les modèles suivants :

1. $y_i = ax_i^3 + b$
2. $y_i = ae^{x_i} + b$
3. $y_i = (ax_i + b)^2$
4. $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$