# Fiche de probabilité

## Généralités sur les probabilités

⟶ Un espace de probabilité est la donnée de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où

$\Omega$ est un ensemble

$\mathcal{F}$ est une tribu. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de $\Omega$, dont les éléments s'appelle des *évènements*, satisfaisant :

1. $\mathcal{F} \neq \varnothing$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $(\forall i \in \mathbb{N}\ A_i \in \mathcal{F}) \Rightarrow \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \in \mathcal{F}$.

$\mathbb{P}$ est une mesure réelle sur $\mathcal{F}$. C'est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in \mathcal{F},\ 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$
3. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'évènement tel que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap Aj = \varnothing$ alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$.

⟶ $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

⟶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

⟶ $\forall A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

⟶ $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

⟶ La *probabilité conditionnelle d'un évènement* $A$ *sachant* $B$ est

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

⟶ Deux évènements sont dis *incompatible* si $A \cap B = \varnothing$.

⟶ Deux évènements sont dis *indépendant* si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. On note $A \perp\!\!\!\perp B$

⟶ Un évènement $A$ est dis *certain* ou *presque sûre* si $\mathbb{P}(A) = 1$.

⟶ Un évènement $A$ est dis *impossible* si $\mathbb{P}(A) = 0$.

## Généralités sur les variables aléatoires réelles

⟶ Un v.a.r. est une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

⟶ $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}\right)$$

⟶ La *fonction de répartition d'une v.a.r.* $X$ est

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0;1] \\ t &\longmapsto \mathbb{P}(X \leqslant t) \end{aligned}$$

⟶ Deux v.a.r. $X$ et $Y$ sont *indépendantes*, noté $X \perp\!\!\!\perp Y$, si pour tout couple $A$, $B$ de sous-ensemble de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

## Les v.a.r. discrètes

⟶ Une v.a.r. est discrète si $\Omega$ est dénombrable.

⟶ Le *support* d'une v.a.r. discrète est

$$\mathrm{Supp}(X) = \{k \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X = k) \neq 0\}$$

⟶ La *loi* d'une v.a.r. discrète est la donnée de $P(X = k)$ pour tout les $k \in \mathrm{Supp}(X)$.

⟶ L'*espérance* d'une v.a.r. discrète $X$, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathrm{Supp}(X)} k\mathbb{P}(X = k)$$

⟶ Si $f$ est continue ,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k\in\mathrm{Supp}(X)} f(k)\mathbb{P}(X = k)$$

⟶ La *variance* d'une v.a.r. discrète $X$, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \sum_{k\in\mathrm{Supp}(X)} (k - \mathbb{E}(()X))^2 \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

**Lois discrètes classique**

Si $X$ suit une loi classique $\mathcal{L}$, on note $X \sim \mathcal{L}$.

| | |
|---|---|
| Dirac<br>$X \sim \delta_x$<br>$x \in \mathbb{R}$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = \{x\}$<br>Loi. $\mathbb{P}(X = x) = 1$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = x$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = 0$ |
| Uniforme<br>$X \sim \mathcal{U}(a, b)$<br>$a \in \mathbb{Z}$<br>$b \in \mathbb{Z}$<br>$a \leqslant b$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = [\![a; b]\!]$<br>Loi. $\forall k \in \mathrm{Supp}(X),\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a + b}{2}$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$ |
| Bernoulli<br>$X \sim \mathcal{B}(p)$<br>$p \in [0; 1]$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = \{0, 1\}$<br>Loi. $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = p$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$ |
| Binomiale<br>$X \sim \mathcal{B}(n, p)$<br>$n \in \mathbb{N}$<br>$p \in [0; 1]$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = [\![0, n]\!]$<br>Loi. $\forall k \in \mathrm{Supp}(X),\ \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = np$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$ |
| Géométrique<br>$X \sim \mathcal{G}(p)$<br>$p \in [0; 1]$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = \mathbb{N}_{>0}$<br>Loi. $\forall k \in \mathrm{Supp}(X),\ \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$ |
| Hypergéométrique<br>$X \sim \mathcal{H}(n, a, p)$<br>$N \in \mathbb{N}_{>0}$<br>$n \in \mathbb{N}$<br>$p \in [0; 1]$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = [\![0; n]\!]$<br>Loi. $\forall k \in \mathrm{Supp}(X),\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{C_{pN}^k C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_N^n}$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = np$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)\dfrac{N - n}{N - 1}$ |
| Poisson<br>$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$<br>$\lambda \in ]0; +\infty[$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = \mathbb{N}$<br>Loi. $\forall k \in \mathrm{Supp}(X),\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \lambda$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \lambda$ |

où $C_n^k$ désigne le coefficient binomiale définie par $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n - k)!}$

## Les v.a.r. (absolument) continue

$\longrightarrow$ La *densité* d'une v.a.r. continue est la donnée d'un fonction $p$ définie sur $\mathbb{R}$ satisfaisant :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) \geqslant 0$.
2. La fonction $p$ est continue par morceau.
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(x)\ dx = 1$

$\longrightarrow$ Le *support* d'une variable X de densité $p$ est

$$\mathrm{Supp}(X) = \{x \in \mathbb{R} \big| p(x) \neq 0\}$$

$\longrightarrow$ Si X est de densité $p$ alors pour $-\infty \leqslant b < a \leqslant +\infty$,

$$\mathbb{P}(X \in ]a, b[) = \int_a^b p(x)\ dx$$

$\longrightarrow$ L'*espérance* d'une v.a.r. continue X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)\ dx$$

$\longrightarrow$ Théorème de transfert : Si f est continue,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)\ dx$$

$\longrightarrow$ La *variance* d'une v.a.r. discrète X, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 p(x)\ dx\end{aligned}$$

## Lois continues classique

Si X suit une loi classique $\mathcal{L}$, on note $X \sim \mathcal{L}$.

| | |
|---|---|
| Uniforme<br>$X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$<br>$a \in \mathbb{R}$<br>$b \in \mathbb{R}$<br>$a < b$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = [a, b]$<br>Densité. $p(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$<br>Répartition. $F_x(t) = \dfrac{t-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{]a,+\infty[}(x)$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| Exponentielle<br>$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$<br>$\lambda \in ]0; +\infty[$<br>$b \in \mathbb{R}$<br>$a < b$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = [0; +\infty[$<br>Densité. $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$<br>Répartition. $F_x(t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{[0;+\infty]}(x)$<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ |
| Normale<br>$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$<br>$\mu \in \mathbb{R}$<br>$\sigma \in ]0; +\infty[$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = \mathbb{R}$<br>Densité. $p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$<br>Répartition. Compliquée<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \mu$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ |
| Chi deux<br>$X \sim \chi_n^2$<br>$n \in \mathbb{N}_{>0}$ | Support. $\mathrm{Supp}(X) = \mathbb{R}$<br>Densité. $p(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$<br>Répartition. Compliquée<br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = n$<br>Variance. $\mathbb{V}(X) = 2n$ |

| | |
|---|---|
| Student<br><br>$X \sim \mathcal{T}_n$<br><br>$n \in \mathbb{N}_{>0}$ | Support. $\operatorname{Supp}(X) = \mathbb{R}$<br><br>Densité. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$<br><br>Répartition. Compliquée<br><br>Espérance. $\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \text{indéterminée} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$<br><br>Variance. $\mathbb{V}(X) = \begin{cases} \text{indéterminée} & \text{si } n = 1 \\ +\infty & \text{si } n = 2 \\ \frac{n}{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$ |

où $\Gamma$ désigne la fonction d'Euler définie sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle positive par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

**Plus de généralités sur les variables aléatoires réelles**

$\longrightarrow$ L'*espérance* est linéaire :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$\longrightarrow$ La formule de Koning-Huygens est $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

$\longrightarrow$ La *variance* est quadratique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

$\longrightarrow$ $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$\longrightarrow$ On dira que des v.a.r. $(X_i)$ sont indépendante et identiquement distribuées, acronymé *i.i.d.*, si les $X_i$ sont deux à deux indépendantes et de même loi.

$\longrightarrow$ Soient des v.a.r. $(X_i)_i$ i.i.d.

1. $\mathcal{U}(0,1) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$
2. $\mathcal{B}(1,p) \sim \mathcal{B}(p)$
3. Si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ alors
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$$
4. Si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ alors
$$\min\left\{i \in \mathbb{N}_{>0} \middle| X_i = 1\right\} \sim \mathcal{G}(p)$$
5. $\left(a + (b-a)\mathcal{U}_{[0;1]}\right) \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$
6. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors
$$\min\{X, Y\} \sim \lambda + \mu$$
7. Soit $\vartheta \in ]0; +\infty[$. Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ alors
$$\min\left\{k \in \mathbb{N} \middle| \vartheta X \geqslant k\right\} \sim \mathcal{G}\left(1 - e^{-\frac{1}{\vartheta}}\right)$$
8. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
9. $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
10. $X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \sim \chi_n^2$
11. Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \chi_n^2$ et $Z \perp\!\!\!\perp T$ alors
$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \sim \mathcal{T}_n$$