Probabilités continues

Exercice 1

Révision de calcul intégrale : calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^3 + 6x \, dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{-3} (1-x)^{\frac{1}{3}} \, dx$
3. $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x^5} \, dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x \, dx$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x) + \mathbb{1}_{\{x \geqslant -1\}}(x) dx$
6. $\displaystyle\int_{3}^{5} x\mathbb{1}_{\{x<4\}}(x) \, dx$
7. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^x \mathbb{1}_{\{x \leqslant 0\}}(x) + e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}(x) \, dx$
8. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}(x) \, dx$
9. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbb{1}_{[0;1]}(x) + x^3 \mathbb{1}_{[-1;1]}(x) \, dx$
10. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \mathbb{1}_{[-k-1;k+1]}(x) \right) \, dx$

Exercice 2

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k(1-x)^{\frac{1}{3}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \end{array}$$

1. Déterminer k pour que p soit une densité de probabilité.
2. Calculer sa fonction de répartition et la tracer dans un repère orthonormé.
3. Soit X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité p.
   (a) Calculer $P(0.5 < X \leqslant 1)$.
   (b) Calculer l'espérance de X.
   (c) Calculer sa variance.

Exercice 3

Même exercice que précédemment avec la fonction

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\left(xe^x \mathbb{1}_{[-1;0]}(x) + x^2 e^{-2x} \mathbb{1}_{[0;1]}(x)\right) \end{array}$$

Exercice 4

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-|x|} \mathbb{1}_{[-\ln(2);\ln(2)]}(x) \end{array}$$

1. Vérifier que p est une densité de probabilité.
2. On pose $Y = |X|$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire la fonction de densité de probabilité de Y (on admettra qu'elle existe).

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire ayant la fonction de répartition suivante

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1 - e^{-\frac{x^2}{2}})\mathbb{1}_{\{x>0\}}(x) \end{array}$$

1. Vérifier que F est une fonction de répartition.
2. Donner la fonction de densité de F.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 6

Soit $\lambda > 0$. On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle si sa fonction de densité de probabilité est $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}(x)$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction de densité de probabilité.
2. Déterminer en fonction de λ la fonction de répartition F_X.
3. Déterminer en fonction de λ l'espérance et la variance de X.
4. Soit $Y = X^2$.
   (a) Calculer l'espérance de Y.
   (b) Déterminer sa fonction de répartition F_Y.
   (c) En déduire la fonction de densité de probabilité de Y (on admettra qu'elle existe).

Exercice 7

Une enquête a été effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître leur achat de lait en 1 mois. Sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type normale avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 6 litres. En vue d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois) et celui des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).

Exercice 8

Une étude effectuée auprès de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à $11,5$ mois avec un écart-type de $3,2$ mois. La distribution des âges étant normale, évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots

1. Avant 10 mois.
2. Après 18 mois.
3. Entre 8 et 12 mois.

Exercice 9

On mesure la taille en centimètres de 2500 hommes ; la distribution obtenue suit une loi normale de moyenne égale à $169\,\mathrm{cm}$ et d'écart-type égal a $5,6\,\mathrm{cm}$.

1. Quel est le pourcentage d'hommes dont la taille est inférieure à $155\,\mathrm{cm}$?
2. Quel est le pourcentage d'hommes dont la taille est comprise entre $155\,\mathrm{cm}$ et $175\,\mathrm{cm}$?
3. Quel est l'intervalle, centré sur la valeur moyenne de la taille, qui contient 60% de la population en question ?

Exercice 10

On suppose que les étudiants d'un cours de probabilité ont des notes normalement distribuées autour d'une moyenne de $9,7$, avec un écart-type de 4.

1. Trouver la probabilité pour qu'un étudiant ait une note supérieure à 13.
2. Trouver la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 10 étudiants ait une note moyenne supérieure à 13.

Exercice 11

Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire normale X sachant que $P(X \geqslant -2) \simeq 0,2$ et $P(X < -5) \simeq 0,7$.

Exercice 12

Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire normale X sachant que $P(X \leqslant 2) = 0,5793$ et $P(X > 5) = 0,2119$.

Exercice 13

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Déterminer la moyenne et la variance.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil avec une durée de vie comprise entre 200 et 230 jours ?