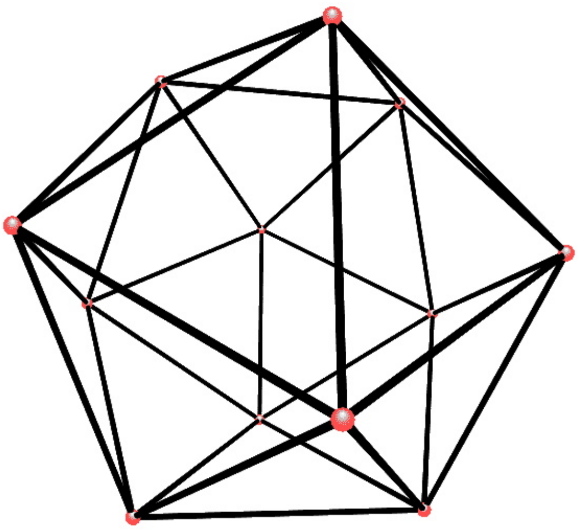
Recherche opérationnelle
&
Aide à la décision

David Hébert

hebert.iut@gmail.com



2023

Table des matières

1. Programmation linéaire à deux variables

1.1 Exemples de problème

1. Une usine produit deux modèles de machines, l'une que l'on appellera modèle A exige 2 kg de matière première et de 30 heures de fabrication et donne un bénéfice de 7€. L'autre que l'on appellera B exige 4 kg de matière première et de 15 heures de fabrication et donne un bénéfice de 6€. On dispose de 200 kg de matière première et de 1200 h de travail.

   Quelle production doit on avoir pour obtenir un bénéfice maximal ?
2. Renault fabrique des voitures et des camions. Chaque véhicule doit être traité dans l'atelier de peinture et dans l'atelier de carrosserie. La capacité de l'atelier de peinture permet de traiter 40 camions par jour (si l'on ne peint que des camions), ou 60 voitures par jour (si l'on ne peint que des voitures). De la même façon la capacité de l'atelier de carrosserie est limitée à 50 camions par jour et à 50 voitures par jour. Chaque camion produit rapporte 3000€, et chaque voiture 1000€.

   Quel plan de production quotidien doit adopter Renault pour maximiser le profit de l'entreprise ?

   Et si en plus, le fabriquant impose à ses employés de faire sortir de son usine au moins 30 camions et 20 voitures par jour ?

1.2 Mise en inéquation

Reprenons les exemples précédents et traduisons les en langage mathématiques.

1. La question est de savoir combien de produit A et B peut-on produire au maximum. Notons simplement A le nombre de produit A et B le nombre de produit B. Les contraintes de l'énoncé se traduisent ainsi :
   - **Domaine :** A et B sont des entiers positifs
   - **La matière première :** 2 kg pour le produit A, 4 kg pour le produit B et le tout ne doit pas dépasser la quantité maximale de matière première soit 200 kg :

     $$2A + 4B \leqslant 200$$
   - **Temps de fabrication :** 30 h pour le produit A, 15 h pour le produit B ; le tout ne dépassant pas 1200 h :

     $$30A + 15B \leqslant 1200$$
   - **Le bénéfice :** de 7€, pour le A et de 6€, pour le B. Bien sur on souhaite que ce bénéfice soit maximal ; on cherche donc A et B tel que

     $$7A + 6B$$

     soit maximal.
2. On note c le nombre de camion produit quotidiennement et v le nombre de voiture.
   - **Domaine :** c et v sont des entiers positifs.
   - **Capacité des ateliers :** en un jour on ne peut prendre qu'un maximum de 40 camions dans l'atelier de peinture. Le temps de traitement d'un camion est de $\dfrac{1}{40}$ de jour et par la même méthode le temps de traitement d'une voiture est $\dfrac{1}{60}$ de jour. La contrainte sur la capacité de l'atelier de peinture s'exprime donc de la manière suivante

     $$\frac{1}{40}c + \frac{1}{60}v \leqslant 1$$

     En raisonnant de même, la contrainte sur l'atelier de carrosserie s'exprime par

     $$\frac{1}{50}c + \frac{1}{50}v \leqslant 1$$

- **Le bénéfice :** on doit le maximiser c'est à dire trouver la valeur maximale de

$$3000c + 1000v$$

- **... et si en plus :** la condition supplémentaire se traduit simplement par

$$c \geqslant 30, \qquad v \geqslant 20$$

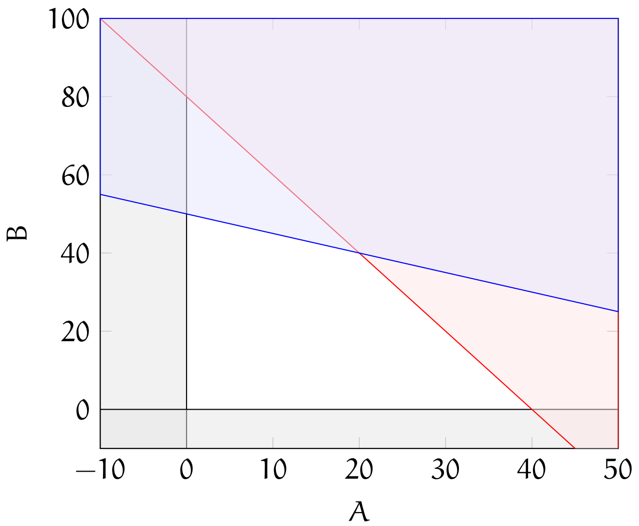
Avant de résoudre ces problèmes en nombres entiers, c'est à dire en satisfaisant toutes les contraintes de domaine, nous allons détailler les méthodes qui permettent de les résoudre en continue, c'est à dire dans $\mathbb{R}$.

1.3 Résolution graphique

Lorsque le problème posé fait apparaitre deux variables on peut développer une méthode de résolution (en continue) par analyse graphique. Prenons l'exemple 1. La formulation mathématique du problème a fait apparaitre 4 inéquations du plan :

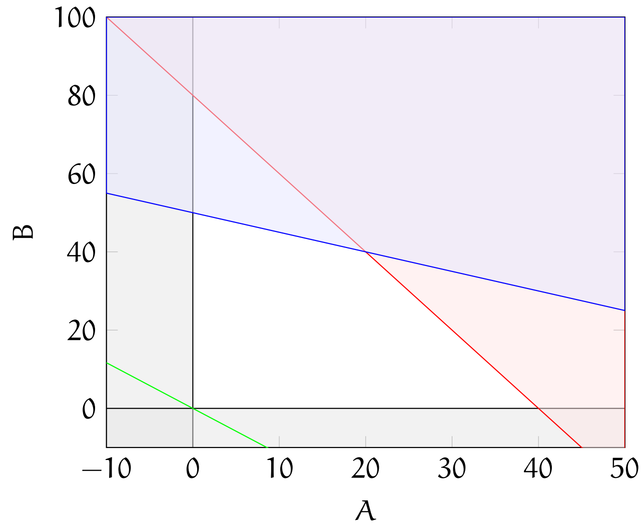
$$\begin{array}{rcl} A & \geqslant & 0 \\ B & \geqslant & 0 \\ 2A + 4B & \leqslant & 200 \\ 30A + 15B & \leqslant & 1200 \end{array}$$

Représentons ce domaine (A en abscisse et B en ordonnée) ; les droites dessinées correspondent aux droites d'équations $A \longmapsto B = \dfrac{200 - 2A}{4}$ et $A \longmapsto B = \dfrac{1200 - 30A}{15}$



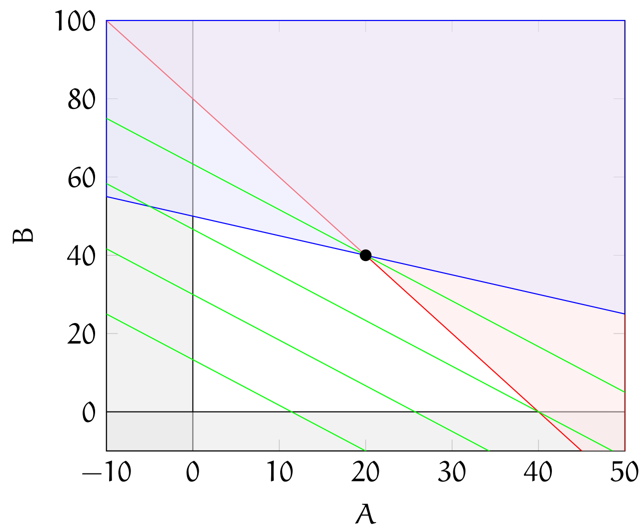
On observe que ce domaine défini un polyèdre convexe (la partie la plus claire). En fait ça sera toujours le cas.

On rappel que le problème est de trouver A et B de sorte que le bénéfice $7A + 6B$ soit maximal. Imaginons que nous souhaitons un bénéfice nul (pourquoi pas ?). Cela se traduit par le fait de trouver A et B dans le domaine convexe tel que $7A + 6B = 0$. On trace donc la droite $A \longmapsto B = \dfrac{0 - 7A}{6}$.



On observe que cette droite touche le domaine en l'origine, c'est à dire lorsque $A = B = 0$; ce qui est normal : on ne produit rien, on a donc aucun bénéfice.

Cela nous amène alors à considérer la familles de droites $\left\{ A \longmapsto B = \dfrac{M - 7A}{6} \right\}_{M \in \mathbb{R}_+}$ qui sont toutes parallèles (puisqu'elles possèdent le même coefficient directeur). Lorsque le M grandit, c'est à dire lorsque le bénéfice augmente, la droite se translate vers le haut puisque le M représente l'ordonnée à l'origine.



Par lecture graphique on observe donc que la valeur maximale de M est atteint au point d'intersection des droites $A \longmapsto B = \dfrac{200-2A}{4}$ et $A \longmapsto B = \dfrac{1200-30A}{15}$; ceci se produit lorsque $A = 20$ donc $B = 40$ et $M = 7A + 6B = 380$.

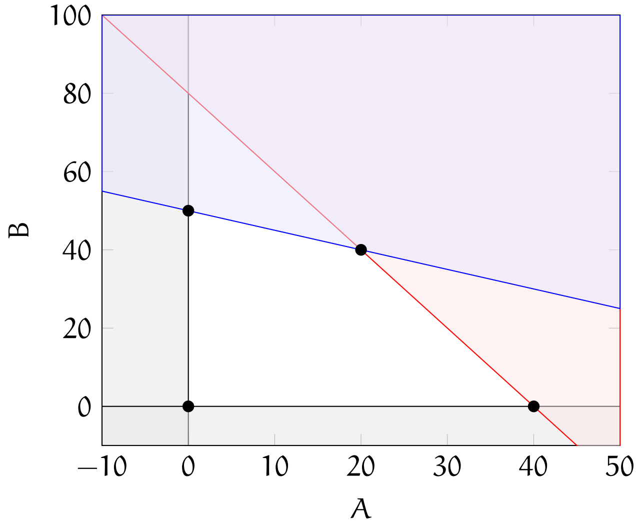
C'est la solution optimale, car si le bénéfice augmente on sort du domaine imposé par les contraintes.

En procédant de la sorte pour n'importe qu'elle type de tel problème on en déduit nécessairement que la solution est sur "coin" du polyèdre convexe.

Remarque 1.3.1 : Lorsque l'on est face à un tel problème (linéaire et ne faisant apparaitre que deux variables) on représente le domaine et on détermine les "coins" du polyèdre.

Reprenons notre exemple :

$$\begin{array}{rcl} A & \geqslant & 0 \\ B & \geqslant & 0 \\ 2A + 4B & \leqslant & 200 \\ 30A + 15B & \leqslant & 1200 \\ Max(7A + 6B) & & \end{array}$$



Pour chaque "coin" on calcul la valeur de la fonction à optimiser, dans notre exemple $7A + 6B$ et on cherche la plus grande valeur (car il s'agit d'un maximum, si c'est un minimum on va bien sur prendre le minimum).

(x, y)	$7A + 6B$
$(0, 0)$	0
$(40, 0)$	280
$(0, 50)$	300
$(20, 40)$	380

On arrive donc à la même conclusion que précédemment : il faut produire 20 produit A et 40 produit B pour obtenir un bénéfice maximum de 380€.

2. Programmation linéaire : généralisation et théorie

2.1 Généralités

Définition 2.1.1

La **programmation linéaire** est une méthode permettant d'optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire sous certaines contraintes linéaires définies par des inégalités.

La fonction linéaire à optimiser s'appelle **la fonction objectif** ou **la fonction de coût** ou **la fonction économique**.

Un **problème linéaire** est un problème pouvant être résolu par de la programmation linéaire.

Remarque 2.1.2 : Dans la suite de ce chapitre, on émet une hypothèse de continuité : les solutions d'un problème linéaire peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles.

Dans le chapitre suivant, on s'intéressera aux problèmes linéaires en nombres entiers.

Les contraintes peuvent être définies par des égalités et des inégalités large de sens différent ($\leqslant$ et $\geqslant$).

Définition 2.1.3

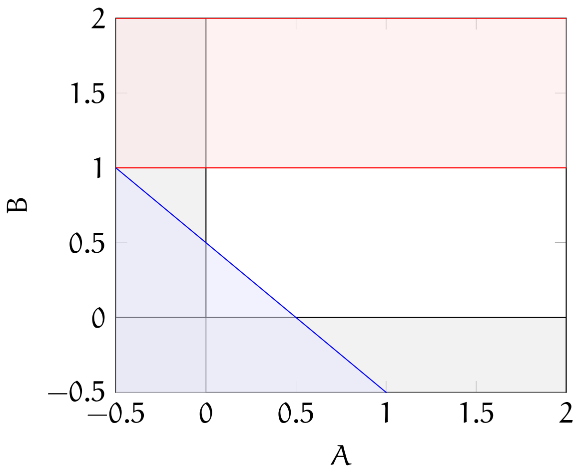
Étant donné un problème linéaire, on dira qu'une solution est **admissible** ou **réalisable** si les valeurs numériques associées aux variables satisfont à l'ensemble des contraintes.

L'ensemble des solutions forme la **région admissible** également appelé **le simplexe**.

Une solution admissible sera dite **optimale** si elle optimise la fonction objectif.

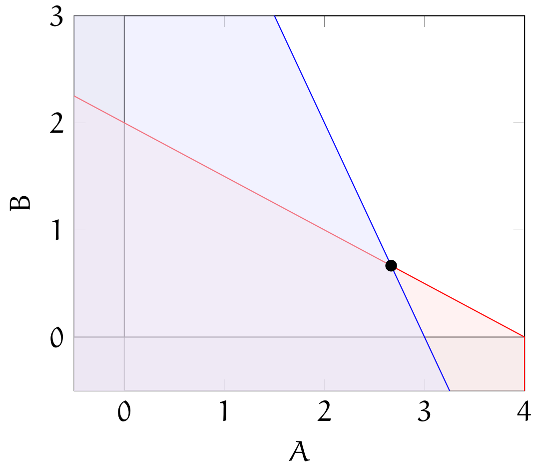
Remarque 2.1.4 : Étant donné un problème linéaire, plusieurs situations sont possibles :

- Il n'existe aucune solution.



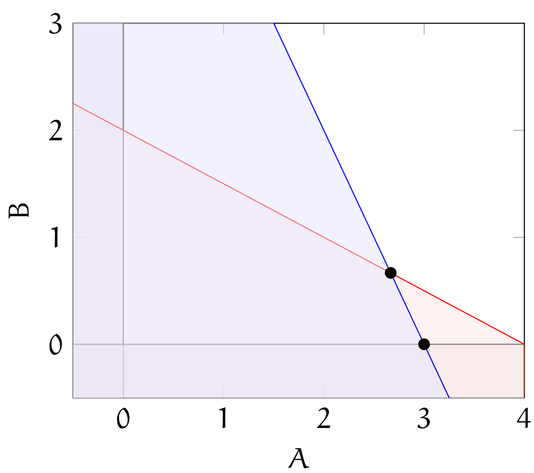
$$\begin{cases} A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \\ B \geqslant 1 \\ A+B \leqslant \frac{1}{2} \\ \mathrm{Max}(A+2B) \end{cases}$$

- Il existe une unique solution.



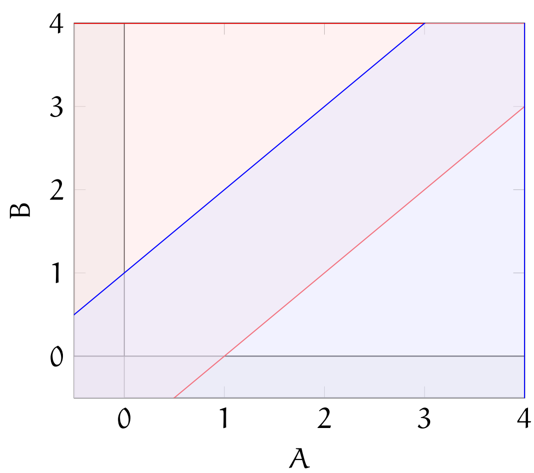
$$\begin{cases} A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \\ A+2B \leqslant 4 \\ 2A+B \leqslant 6 \\ \mathrm{Max}(A+B) \end{cases}$$

- Il existe plusieurs solutions.



$$\begin{cases} \begin{array}{rcl} A & \geqslant & 0 \\ B & \geqslant & 0 \\ A+2B & \leqslant & 4 \\ 2A+B & \leqslant & 6 \\ \mathrm{Max}(2A+B) & & \end{array} \end{cases}$$

- Parmi les solutions, l'optimum n'est pas borné.



$$\begin{cases} \begin{array}{rcl} A & \geqslant & 0 \\ B & \geqslant & 0 \\ A-B & \geqslant & 1 \\ A-B & \leqslant & -1 \\ \mathrm{Max}(A) & & \end{array} \end{cases}$$

Le langage le mieux adapté pour la formulation des problèmes linéaires est celui des matrices.

Définition 2.1.5

Soient n et p deux entiers strictement positifs, $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{(1,n)}(\mathbb{R})$ et $X = {}^t(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ le vecteur colonne des indéterminées.

Un problème de la forme $\begin{cases} A.X \leqslant B \\ X \geqslant 0 \\ \mathrm{Max}(C.X) \end{cases}$ est un problème linéaire sous **forme normale**.

Proposition 2.1.6

Tout problème linéaire est équivalent à un problème linéaire sous forme normale.

Démonstration. En conservant les notations de la définition précédente, les équivalents sont donnés par les règles suivantes :

- La recherche du $\mathrm{Min}(C.X)$ équivaut à la recherche du $\mathrm{Max}(C'.X)$ où $C' = -C$.
- Si la $k^{\text{ième}}$ contrainte est de la forme $\sum_{i=1}^{n} A_{k,i}X_i \geqslant B_k$ alors cela équivaut à $\sum_{i=1}^{n} A'_{k,i}X_i \leqslant B'_k$ où pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $A'_{k,i} = -A_{k,i}$ et $B'_k = -B_k$.
- Si la $k^{\text{ième}}$ contrainte est de la forme $\sum_{i=1}^{n} A_{k,i}X_i = B_k$ alors cela équivaut aux deux contraintes suivantes : $\sum_{i=1}^{n} A_{k,i}x_i \leqslant B_k$ et $\sum_{i=1} nA_{k,i}x_i \geqslant B_k$ (et on transforme cette dernière par la technique précédente).
- Si $X_k \leqslant 0$, on pose $X'_k = -X_k$.
- Si X_k n'est pas distingué, on décompose cette variable en deux nouvelles variables $X_k = X_k^+ - X_k^-$ où X_k^+ et X_k^- sont tous deux positifs.

$\square$

Théorème 2.1.7

Soient n et p deux entiers strictement positifs, $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{(1,n)}(\mathbb{R})$, $X = {}^t(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ le vecteur colonne des indéterminées et $\begin{cases} A.X \leqslant B \\ X \geqslant 0 \\ Max(C.X) \end{cases}$ un problème linéaire sous forme normal.

Le simplexe forme un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$. La(Les) solution(s) optimale(s), si elle(s) existe(nt), se trouve(nt) toujours sur la frontière du simplexe, précisément sur un des sommets du simplexe.

2.2 Vers la méthode du simplexe

Le principe de la *méthode du simplexe* consiste à se placer dans un un cadre un peu plus algébrique et d'adapter la méthode de Gauss.

Reprenons l'exemple précédent de la première section : le domaine est défini par les règles

$$\begin{array}{rcl} A & \geqslant & 0 \\ B & \geqslant & 0 \\ 2A+4B & \leqslant & 200 \\ 30A+15B & \leqslant & 1200 \end{array}$$

et on cherche à maximiser le bénéfice $M = 7A + 6B$.

Étape 1. On va transformer les inéquations par des équations en introduisant des variables qui vont mesurer l'écart des inéquations. On les appelle les **variables d'écarts**. On pose

$$X = 200 - 2A - 4B \qquad Y = 1200 - 30A - 15B$$

On a donc introduit deux nouvelles variables et transformé le problème en

$$(P_0) = \begin{cases} 2A & +4B & +1X & +0Y & = 200 \\ 30A & +15B & +0X & +1Y & = 1200 \end{cases}$$

où A, B, X et Y sont positives ou nulle.

On cherche à maximiser $M = 7A+6B+0X+0Y$.

Ce système de 4 inconnues à 2 équations (linéairement indépendantes) admet une infinité de solution. Le but est de trouver celle qui va maximiser $M = 7A + 6B + 0X + 0Y$.

Étape 2. Le quadruplet $(A, B, X, Y) = (0, 0, 200, 1200)$ est une solution évidente au problème. Mais c'est le pire cas possible car les variables d'écarts sont les plus grandes possibles alors que dans l'idéal il faut qu'elles soient le plus petit possibles et inversement : les solutions A et B sont les plus petites possible alors qu'il faut qu'elles soient clairement les plus grandes possibles.

Pour cette solution le bénéfice M est nul. On observe que si A ou B augmente alors M aussi. L'idée est donc de choisir une de ces variables et de l'augmenter au maximum des contraintes possibles.

Étape 2' - Bilan. Le problème est

$$(P_0) = \begin{cases} 2A & +4B & +1X & +0Y & = 200 \\ 30A & +15B & +0X & +1Y & = 1200 \end{cases}$$

avec pour solution $(A, B, X, Y) = (0, 0, 200, 1200)$.

Les variables A et B sont nulles tandis que les variables X et Y ne le sont pas.

Étape 3. On doit faire augmenter la valeur de M en choisissant une variable parmi A ou B. Puisque le coefficient de A est plus grand que celui de B, la valeur de M augmentera davantage si on augmente celle de A. On décide alors de laisser dans le quadruplet solution $(A, B, X, Y) = (0, 0, 200, 1200)$ le B à 0, et on va chercher la valeur maximale prise par A. Avec $B = 0$ le système devient :

$$(P_0') = \begin{cases} 2A & +1X & +0Y & = 200 \\ 30A & +0X & +1Y & = 1200 \end{cases}$$

soit encore

$$(P_0') = \begin{cases} X & = & 200 - 2A \\ Y & = & 1200 - 30A \end{cases}$$

or $X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$ donc $200 - 2A \geqslant 0$ et $1200 - 30A \geqslant 0$ ce qui équivaut respectivement à $A \leqslant 100$ et $A \leqslant 40$. Donc la plus grande valeur possible pour A est 40. Si $A = 40$ et $B = 0$ alors $X = 120$ et $Y = 0$.

A cette étape le quadruplet $(A, B, X, Y) = (40, 0, 120, 0)$ est solution du problème avec une valeur du bénéfice $M = 7A + 6B = 240$.

Étape 4. A l'étape 2' les variables X et Y étaient non nulles et apparaissaient une fois par ligne dans le problème. En appliquant la méthode de Gauss, on va modifier le problème pour que les variables A et X apparaissent une et une seule fois par ligne.

La deuxième ligne reste donc inchangée et on applique à la première la règle $L_1 \leftarrow 15L_1 - L_2$. On obtient alors le nouveau système

$$(P_1) = \left\{ \begin{array}{lllll} & +45B & +15X & -1Y & = 1800 \\ 30A & +15B & +0X & +1Y & = 1200 \end{array} \right.$$

De même l'expression du bénéfice $M = 7A + 6B$ ne faisait apparaitre que les variables nulles de l'étape 2'. Ici on va donc chercher à exprimer M en fonction de B et Y. La deuxième ligne du problème nous donne $A = 40 - \frac{1}{2}B - \frac{1}{30}Y$. En injectant cette expression dans celle de M et en simplifiant on obtient $M = 280 + \frac{5}{2}B - \frac{7}{30}Y$.

Étape 4' - Nouveau bilan. Le problème est

$$(P_1) = \left\{ \begin{array}{lllll} & +45B & +15X & -1Y & = 1800 \\ 30A & +15B & +0X & +1Y & = 1200 \end{array} \right.$$

avec un quadruplet solution $(A, B, X, Y) = (40, 0, 120, 0)$ où les variables non nulles apparaissent une et une seule fois par ligne et où les variables nulles apparaissent dans la fonction de bénéfice $M = 280 + \frac{5}{2}B - \frac{7}{30}Y$ qui vaut maintenant 280 pour le quadruplet solution.

Étape 5. On réitère ce que l'on a fait à l'étape 3 mais pour le nouveau problème P_1.

- On choisit une des variables apparaissant dans l'expression du bénéfice M pour que celui-ci augmente. Puisque B et Y doivent, par contrainte, être positives et que le coefficient de Y est négatif, on choisit la variable B. On suppose donc que Y reste nulle et on cherche la plus grande valeur possible pour B.
- Avec $Y = 0$ le système devient :

$$(P_1') = \left\{ \begin{array}{llll} & +45B & +15X & = 1800 \\ 30A & +15B & +0X & = 1200 \end{array} \right.$$

soit encore

$$(P_1') = \left\{ \begin{array}{lll} X & = & 120 - 3B \\ 2A & = & 80 - B \end{array} \right.$$

et puisque X et A sont positif on aboutit à $B \leqslant 40$ et $B \leqslant 80$. La plus grande valeur possible pour B est donc 40. Avec cette valeur $X = 0$ et $A = 20$. Ainsi $(A, B, X, Y) = (20, 40, 0, 0)$[1].

Étape 6. On modifie le problème pour que les variables nulles apparaissent dans l'expression de M et les variables non nulles apparaissent une fois par ligne dans le problème.

$$(P_2) = \left\{ \begin{array}{lllll} & +45B & +15X & -1Y & = 1800 \\ 90A & & -15X & +4Y & = 1800 \end{array} \right.$$

en faisant $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$. Finalement $M = 380 - \frac{5}{6}X - \frac{8}{45}Y$.

Étape 7. On s'arrête ! Les coefficients des variables apparaissant dans M sont tous négatifs ; si on modifie les variables liées à ces coefficient, on ne pourra pas augmenter la valeur du bénéfice. En conclusion : $A = 20$, $B = 40$ et le bénéfice $M = 380$.

2.3 Algorithmisation

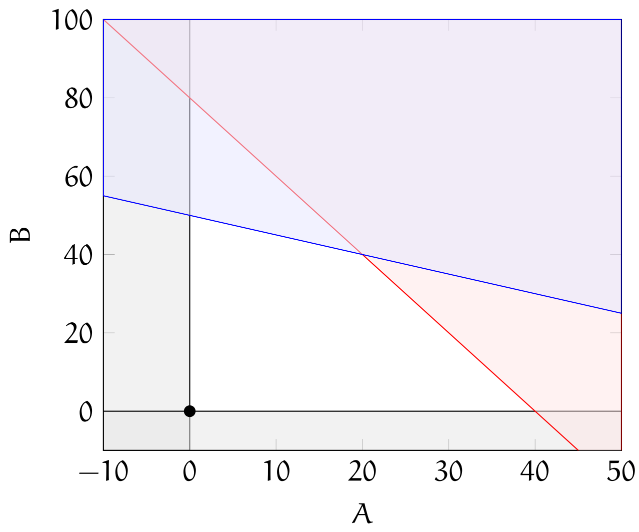
Comme nous l'avons vu le problème consiste à trouver la meilleur solution (celle qui maximise le bénéfice) dans un système qui contient en générale une infinité de solution. Le principe est d'appliquer la méthode du pivot de Gauss en choisissant correctement les pivots à chaque étape. Détaillons le calcul précédent d'un point de vue plus algébrique.

Étape 1 & 2. On utilise le langage des matrices pour exprimer le problème :

	A	B	X	Y	
X	2	4	1	0	200
Y	30	15	0	1	1200
Ben	7	6	0	0	0

Dans la première colonne, on a écrit le nom des variables que nous avons introduit pour la résolution du problème. On les appelle les **variables hors base**. Dans la dernière ligne on a traduit l'expression du bénéfice qui est donc nulle puisque $X = 200$ et $Y = 1200$. On est au point $(A, B) = (0, 0)$ du domaine des solutions admissibles.

1. On peut s'arrêter ici car on observe que X et Y sont les plus petits possible ; mais continuons pour comprendre le principe de l'algorithme.



Étape 3 & 4. Le problème étant posé, on cherche le meilleur pivot. Puisque le 7 est le plus grand coefficient dans l'expression du bénéfice, on choisit la première colonne. On dit que A est la **variable entrante**.

Pour choisir la ligne on va rajouter une colonne :

	A	B	X	Y		
X	2	4	1	0	200	$\frac{200}{2}$
Y	30	15	0	1	1200	$\frac{1200}{30}$
Ben	7	6	0	0	0	

où l'on a fait le rapport entre la colonne des coefficients, par la colonne choisit. Le plus petit est celui du Y qui vaut 40. On choisit donc la seconde ligne. On dit que Y est la **variable sortante**.

Le pivot sera donc le coefficient de la deuxième ligne, première colonne. Dans la colonne des variables hors base (c'est à dire la première colonne), on change la variable sortante par la variable entrante.

On applique la méthode du pivot :

$L_2 \leftarrow \frac{1}{30} L_2$

	A	B	X	Y	
X	2	4	1	0	200
A	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	40
Ben	7	6	0	0	0

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

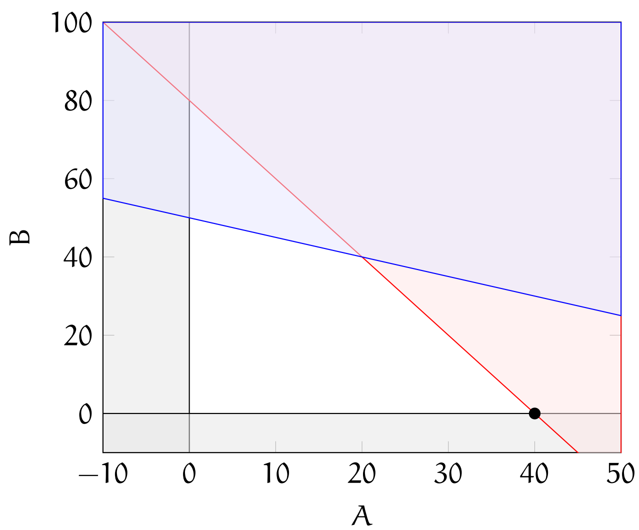
	A	B	X	Y	
X	0	3	1	$-\frac{1}{15}$	120
A	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	40
Ben	7	6	0	0	0

$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$

	A	B	X	Y	
X	0	3	1	$-\frac{1}{15}$	120
A	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	40
Ben	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{30}$	-280

On est au point $(A, B) = (40, 0)$ du domaine des solutions admissibles et le bénéfice est à 280. Le problème étant ramené à

	A	B	X	Y	
X	0	3	1	$-\frac{1}{15}$	120
A	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	40
Ben	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{30}$	-280



Étape 5 & 6. On recommence :

	A	B	X	Y		
X	0	3	1	$-\frac{1}{15}$	120	$\frac{120}{3}$
A	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	40	$\frac{40}{\frac{1}{2}}$
Ben	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{30}$	-280	

La variable entrante est B et la sortante est X. Le pivot est donc le 3.

$L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$

	A	B	X	Y	
B	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{45}$	40
A	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	40
Ben	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{30}$	-280

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$

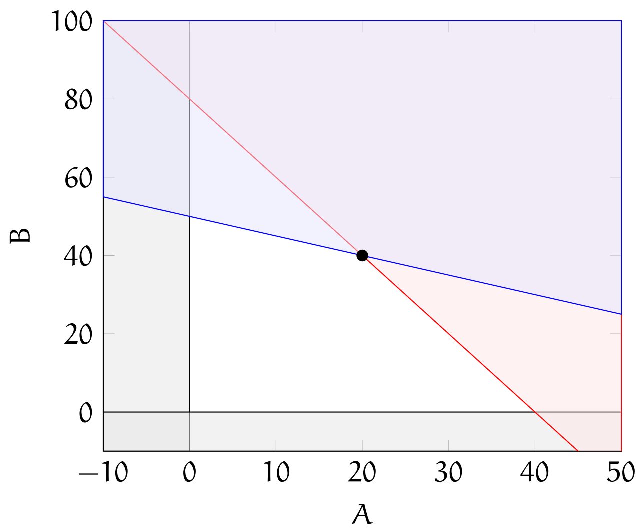
	A	B	X	Y	
B	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{45}$	40
A	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{45}$	20
Ben	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{30}$	-280

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_1$

	A	B	X	Y	
B	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{45}$	40
A	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{45}$	20
Ben	0	0	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{45}$	-380

On est au point $(A, B) = (20, 40)$ du domaine des solutions admissibles et le bénéfice est à 380. Le problème est ramené à

	A	B	X	Y	
B	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{45}$	40
A	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{45}$	20
Ben	0	0	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{45}$	-380



Étape 7. On s'arrête car tous les coefficient de la dernière ligne sont négatifs ou nuls.

2.4 La méthode du simplexe

Lorsque le problème fait apparaitre plus de 2 variables le principe reste le même est est basé sur le théorème stipulant que si la solution existe elle est sur une frontière du simplexe.

On se place donc sur un sommet, et on calcule la valeur de la fonction objectif. On va ensuite regarder les sommets adjacents et observer si la fonction objectif peut prendre une valeur supérieur ou pas. Si c'est le cas, on se déplace sur ce nouveau sommet et on recommence l'étude sinon on s'arrête et le maximum est trouvé.

Nous ne nous intéresserons pas aux problèmes de convergence mais signalons tout de même que l'algorithme à ses limites :

- Si le maximum n'est jamais atteint.
- Si deux sommets adjacents maximise l'objectif, l'algorithme va boucler à l'infini.
- Si on ne trouve pas de solution initiale.
- Si la matrice des contraintes n'est pas de rang maximal (cas dégénéré qui arrive en général lorsqu'une des contraintes est une égalité au lieu d'une inégalité).

Détaillons à présent la méthode du simplexe pour n'importe quelle nombre de variables.

Définition 2.4.1

Soient n et p deux entiers strictement positifs, $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{(1,n)}(\mathbb{R})$ et $X = {}^t(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ le vecteur colonne des indéterminées.

Un problème de la forme $\begin{cases} A.X = B \\ X \geqslant 0 \\ \mathrm{Max}(C.X) \end{cases}$ est un programme linéaire sous **forme standard**.

La première étape de la méthode du simplexe, consiste à transformer un problème linéaire sous forme normale en un problème linéaire sous forme standard en ajoutant des variables.

Proposition 2.4.2

Tout problème linéaire sous forme normale peut se mettre sous forme standard quitte à ajouter des variables, appelées **variables d'écarts**.

Démonstration. Reprenons le notations précédentes et considérons $\begin{cases} A.X \leqslant B \\ X \geqslant 0 \\ \mathrm{Max}(C.X) \end{cases}$ un problème linéaire sous forme normale. Considérons

$$E_k = b_k - \sum_{i=1}^{n} A_{k,i}X_i$$

les variables d'écarts (toutes positives ou nulles). Le problème linéaire se transforme en un problème linéaire standard de la forme : $\begin{cases} A'.X' = B \\ X' \geqslant 0 \\ \mathrm{Max}(C.X) \end{cases}$ où

$$A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,n} & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice A juxtaposée avec la matrice $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{(p,p)}(\mathbb{R})}$ et où $X' = {}^t(X_1, \ldots, X_n, E_1, \ldots, E_p)$. □

Bien sur, s'il s'agit d'une problème résoluble, il y a une infinité de solution puisqu'il y a plus d'inconnues que d'équations. Il faut choisir celle qui maximisera la fonction objectif. On va donc rajouter à la dernière ligne du système $A'X' = B$ la fonction objectif :

$$\begin{cases} A_{1,1}X_1 + & \cdots & +A_{1,n}X_n & +E_1 & +0 & +0 & \cdots & +0 & = & B_1 \\ \vdots & & \vdots & +0 & +E_2 & +0 & \cdots & +0 & = & B_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ A_{p,1}X_1 + & \cdots & +A_{p,n}X_n & +0 & +0 & \cdots & & +E_p & = & B_p \\ C_1X_1 + & \cdots & +C_nX_n & +0 & & \cdots & & +0 & = & -val \end{cases}$$

où val est la valeur de la fonction objectif à l'origine du repère.

Pour déterminer la colonne du pivot, on va choisir celle qui a le plus grand coefficient strictement positif C_i ; notons r cet indice. Pour déterminer la ligne du pivot, on va choisir la ligne du plus petit coefficient strictement positif de la colonne des $B_i/A_{i,r}$. On applique ensuite le pivot et on recommence jusqu'à ce qu'une des conditions de strict positivité dans le choix du pivot ne soit pas satisfaite.

§2.4.3 : Algorithme du simplexe

- On cherche la ligne du pivot (on parle de variable entrante) :
  1 Si tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs ou nuls : STOP.
  2 Sinon on choisit l'indice r du coefficient C_i strictement positif le plus grand.
- On cherche la colonne du pivot (on parle de variable sortante) :
  1 Si tous les $B_i/A_{i,r}$ sont strictement négatifs ou infini : STOP.
  2 Sinon on choisit l'indice s du $B_i/A_{i,r}$ positif ou nul le plus petit.
- Le pivot est $A_{s,r}$. On applique le protocole de Gauss.
- On réitère le processus.

Une condition nécessaire pour que cet algorithme permette d'arriver à une solution est que le point de départ, implicite dans la formulation, est l'origine du repère.

3. Alternatives

3.1 Les deux phases

Nous avons vu que la méthode du simplexe permet de résoudre des problèmes linéaires. Mais nous avons signalé que cette méthode a quelques limites. L'une de ces limites est que le point de départ de l'algorithme est l'origine du repère. Lorsque ce point n'est pas sur la frontière du simplexe, l'algorithme n'est pas initialisé et ne peut donc pas démarrer. Ce genre de problème arrive très régulièrement lorsque le problème initial fait apparaitre des équations ou inéquations excluant l'origine.

La méthode des deux phases permet de résoudre ce problème. La première phase va permettre de déterminer un "coin" du simplexe pour permettre d'initialiser l'algorithme la seconde phase va permettre d'arriver à la solution.

Définition 3.1.1

Soient p, n_I, n_{II} et n_{III} des entiers positifs et $A_I \in \mathcal{M}_{(n_I,p)}(\mathbb{R})$, $A_{II} \in \mathcal{M}_{(n_{II},p)}(\mathbb{R})$, $A_{III} \in \mathcal{M}_{(n_{III},p)}(\mathbb{R})$, $B_I \in \mathcal{M}_{(n_I,1)}(\mathbb{R}^+)$, $B_{II} \in \mathcal{M}_{(n_{II},1)}(\mathbb{R}^+)$, $B_{III} \in \mathcal{M}_{(n_{III},1)}(\mathbb{R}^+)$, $C \in \mathcal{M}_{(1,p)}(\mathbb{R})$ et $X = {}^t(X_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ le vecteur colonne des indéterminés.

Un problème de la forme $\left\{\begin{array}{rcl} A_IX & \leqslant & B_I \\ A_{II}X & \geqslant & B_{II} \\ A_{III}X & = & B_{III} \\ X & \geqslant & 0 \\ Max(C.X) & & \end{array}\right.$ est un problème linéaire sous **forme préphasée**.

Proposition 3.1.2

Tout problème linéaire est équivalent à un problème linaire sous forme préphasée.

Démonstration. Il suffit de multiplier les lignes avec des coefficients constants négatifs par -1. □

Définition 3.1.3

Reprenons les notations précédentes et considérons le problème préphasée $\left\{\begin{array}{rcl} A_IX & \leqslant & B_I \\ A_{II}X & \geqslant & B_{II} \\ A_{III}X & = & B_{III} \\ X & \geqslant & 0 \\ Max(C.X) & & \end{array}\right.$ On introduit des **variables d'écarts** $e^I = (e_i^I)_{i\in[\![1;n_I]\!]}$ et $e^{II} = (e_i^{II})_{i\in[\![1;n_{II}]\!]}$ mais également des **variables artificielles** $\alpha^{II} = (\alpha_i^{II})_{i\in[\![1;n_{II}]\!]}$, $\alpha^{III} = (\alpha_i^{III})_{i\in[\![1;n_{III}]\!]}$ toutes positives. On appel **forme phasée** du problème la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_IX + e^I & = & B_I \\ A_{II}X - e^{II} + \alpha^{II} & = & B_{II} \\ A_{III}X + \alpha^{III} & = & B_{III} \\ X & \geqslant & 0 \\ Max(C.X) & & \end{array}\right.$$

§3.1.4 : Méthode des deux phases

Première phase. On met le problème sous forme phasée en modifiant la fonction objectif :

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & X & E_I & E_{II} & \alpha_{II} & \alpha_{III} & \\
\hline
E_I & A_I & Id & 0 & 0 & 0 & B_I \\
\alpha_{II} & A_{II} & 0 & -Id & Id & 0 & B_{II} \\
\alpha_{III} & A_{III} & 0 & 0 & 0 & Id & B_{III} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}$$

- On actualise la fonction objectif
  en faisant apparaitre 0 pour les variables artificielles
  (en sommant les blocs de ligne des variables artificielles
  dans la fonction objectif).

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & X & E_I & E_{II} & \alpha_{II} & \alpha_{III} & \\
\hline
E_I & A_I & Id & 0 & 0 & 0 & B_I \\
\alpha_{II} & A_{II} & 0 & -Id & Id & 0 & B_{II} \\
\alpha_{III} & A_{III} & 0 & 0 & 0 & Id & B_{III} \\
\hline
 & * & 0 & -1 & 0 & 0 & \vartheta
\end{array}$$

- On applique la méthode du simplexe avec le tableau précédent.
  - Si $\vartheta \neq 0$ après l'application de l'algorithme du simplexe
    ou si au moins une variable artificielle est non nul
    alors le problème initial n'admet pas de solution.
  - Sinon on élimine les variables artificielles et on passe à la phase 2.

Seconde phase. On récupère un tableau sans variable artificielle. On modifie la fonction objectif :

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & X & E_I & E_{II} & \\
\hline
* & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * \\
\hline
 & C & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

- On actualise la fonction objectif : on soustrait de la fonction objectif les lignes apparaissant dans le tableau.
- On applique la méthode du simplexe.

Détaillons un exemple en suivant l'algorithme précédent. Considérons le problème

$$\begin{cases}
x+2y & \leqslant & 4 \\
-x-y & \leqslant & -1 \\
3x+y & = & 6 \\
Max(2x+y) & &
\end{cases}$$

On met le problème sous forme préphasée : $\begin{cases}
x+2y & \leqslant & 4 \\
x+y & \geqslant & 1 \\
3x+y & = & 6 \\
Max(2x+y) & &
\end{cases}$

Première phase.

On construit le tableau correspondant à la forme phasée :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	0	0	0	0	-1	-1	0

On actualise la fonction objectif en faisant apparaitre des zéros aux variables artificielles :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	4	2	0	-1	0	0	7

On applique la méthode du simplexe.

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	$\boxed{1}$	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	4	2	0	-1	0	0	7

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	0	1	1	1	-1	0	3
x	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	0	-2	0	$\boxed{3}$	-3	1	3
	0	-2	0	3	-4	0	3

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	0	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	2
x	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	2
e_2	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	-1	$\frac{1}{3}$	1
	0	0	0	0	-1	-1	0

Le coefficient en bas à droite étant nul, il existe au moins une solution. On peut passer à la seconde phase.

Seconde phase. On supprimes les variables artificielles et on modifie la fonction objectif :

	x	y	e_1	e_2	
e_1	0	$\frac{5}{3}$	1	0	2
x	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
e_2	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	1
	2	1	0	0	0

On actualise la fonction objectif en soustrayant deux fois la ligne du x dans la fonction objectif (2 fois car le coefficient du x est 2, s'il y avait eu une ligne y on aurait soustrait une fois la ligne y et s'il y avait eu les deux lignes on aurait soustrait deux fois la ligne x et une fois la ligne y).

	x	y	e_1	e_2	
e_1	0	$\frac{5}{3}$	1	0	2
x	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
e_2	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	1
	0	$\frac{1}{3}$	0	0	-4

On applique la méthode du simplexe :

	x	y	e_1	e_2	
e_1	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	1	0	2
x	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
e_2	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	1
	0	$\frac{1}{3}$	0	0	-4

	x	y	e_1	e_2	
y	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
e_2	0	0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{9}{5}$
	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{22}{5}$

En conclusion la solution du problème est $(x; y) = \left(\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right)$ pour un optimum de $\frac{22}{5}$.

3.2 Le grand M

L'idée du grand M est de faire les deux phases en même temps. Pour ce faire on introduit un constante M aussi grand que souhaitée.

§3.2.1 : Méthode du grand M On met le problème sous forme phasée en introduisant pour les variables artificielle un grand M

	X	E_I	E_{II}	α_{II}	α_{III}	
E_I	A_I	Id	0	0	0	B_I
α_{II}	A_{II}	0	$-Id$	Id	0	B_{II}
α_{III}	A_{III}	0	0	0	Id	B_{III}
	C	0	0	$-M$	$-M$	0

On actualise la fonction objectif
en faisant apparaitre 0 pour les variables artificielles
(le grand M apparaitra dans la fonction objectif).

	X	E_I	E_{II}	α_{II}	α_{III}	
E_I	A_I	Id	0	0	0	B_I
α_{II}	A_{II}	0	$-Id$	Id	0	B_{II}
α_{III}	A_{III}	0	0	0	Id	B_{III}
	$*$	0	$-M$	0	0	$\vartheta(M)$

On applique la méthode du simplexe avec le tableau précédent. L'optimum $\vartheta(M)$ est une fonction polynomiale en M.

- Si au moins une variable artificielle est non nul alors le problème n'a pas de solution.
- Si $\vartheta(M)$ dépend de M alors le problème n'a pas de solution.
- Sinon la solution trouvée est une solution.

Détaillons un exemple. Considérons le problème
$$\begin{cases} x + 2y & \leqslant & 4 \\ x + y & \geqslant & 1 \\ 3x + y & = & 6 \\ Max(2x + y) & & \end{cases}$$

Construisons le tableau et introduisons le grand M :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	2	1	0	0	$-M$	$-M$	0

Mettons à jour la fonction objectif :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	$2+4M$	$1+2M$	0	$-M$	0	0	$7M$

Appliquons la méthode du simplexe en gardant en mémoire que M est aussi grand que possible :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	$\boxed{1}$	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	$2+4M$	$1+2M$	0	$-M$	0	0	$7M$

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	0	1	1	1	-1	0	3
x	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	0	-2	0	$\boxed{3}$	-3	1	3
	0	$-1-2M$	0	$2+3M$	$-2-4M$	0	$-2+3M$

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	2
x	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	2
e_2	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	-1	$\frac{1}{3}$	1
	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-M$	$-\frac{2}{3}-M$	-4

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
y	0	1	$\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
x	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
e_2	0	0	$\frac{2}{5}$	1	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-M$	$-\frac{3}{5}-M$	$\frac{22}{5}$

En conclusion la solution du problème est $(x;y)=\left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)$ pour un optimum de $\frac{22}{5}$.

3.3 Dualité

Considérons le problème linéaire suivant :

La maison d'édition Castor vend et édite des livres et des encyclopédies. A cette fin elle dispose de trois matières premières : des feuilles blanches, des cartouches d'encre et du temps d'impression. Les données sont résumées dans le tableau suivant :

	Livre	Encyclopédie
Pages (par centaines)	4	1800
Cartouches d'encre	1	11
Temps d'impression (en heure)	1	2

Un livre est vendu 20€ et une encyclopédie 180€. La maison d'édition possède quatre millions de pages blanches, 200 cartouches d'encre et de 120 heures de temps d'impression.

En cherchant à optimiser le bénéfice de cette maison d'édition on résout le problème (P) sous forme normal :

$$(P)\begin{cases} 4x_1+1800x_2 & \leqslant & 40000 \\ x_1+11x_2 & \leqslant & 200 \\ x_1+2x_2 & \leqslant & 120 \\ Max(20x_1+180x_2) & & \end{cases}$$

A présent une autre maison d'édition arrive sur le marché : Polux. Pour rester compétitive Castor choisi de céder des matières premières à Polux. Soient

- y_1 le prix de vente par Castor d'une page blanche à Polux
- y_2 le prix pour une cartouche d'encre,
- y_3 le prix pour une heure d'impression.

Bien sur, pour que cela soit rentable pour la maison Castor, il faut que le prix que Polux va dépenser pour éditer un livre soit supérieur au prix de vente d'un livre et respectivement pour les encyclopédies.

- Prix de vente de matière première pour fabriquer un livre : $4y_1+y_2+y_3$. Prix de vente d'un livre : 20€.

$$4y_1+y_2+y_3 \geqslant 20$$

- Prix de vente de matière première pour fabriquer une encyclopédie : $1800y_1+11y_2+2y_3$. Prix de vente d'une encyclopédie : 180€.

$$1800y_1+11y_2+2y_3 \geqslant 180$$

Si Castor avait acheté ses matières premières aux même prix que Polux, sa dépense aurait été de $40000y_1 + 200y_2 + 120y_3$. Pour rester attractif, il faut que ce prix soit le plus petit possible. La fonction objectif est donc

$$\mathrm{Min}(40000y_1 + 200y_2 + 120y_3)$$

On obtient alors un nouveau problème (D) dit problème dual de (P) :

$$(D)\left\{\begin{aligned} 4y_1 + y_2 + y_3 &\geqslant 20 \\ 1800y_1 + 11y_2 + 2y_3 &\geqslant 180 \\ \mathrm{Min}(40000y_1 + 200y_2 + 120y_3)& \end{aligned}\right.$$

Définition 3.3.1

Soient n et p deux entiers strictement positifs, $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{(1,n)}(\mathbb{R})$, $X = {}^t(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ le vecteur colonne des indéterminées et le problème (P) sous forme normal

$$(P)\left\{\begin{array}{c} A.X \leqslant B \\ X \geqslant 0 \\ \mathrm{Max}(C.X) \end{array}\right.$$

On définit le **problème dual** de (P) noté (D) par :

$$(D)\left\{\begin{array}{c} {}^tA.Y \geqslant {}^tC \\ Y \geqslant 0 \\ \mathrm{Min}({}^tB.Y) \end{array}\right.$$

où $Y = {}^t(Y_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est le vecteur colonne des indéterminées.

On dit que (P) est le **problème primal** de (D).

A un problème linéaire quelconque on associe un problème dual en considérant la forme normale du primal.

Par exemple :

Proposition 3.3.2

Soit $(P) - (D)$ une paire primale-duale.

1. Le nombre de variable du problème (P) correspond au nombre de contrainte du problème (D). Précisément :
   (a) Une variable positive donne une contrainte de type $\geqslant$.
   (b) Une variable négative donne une contrainte de type $\leqslant$.
   (c) Une variable non distinguée donne une contrainte de type $=$.
2. Le nombre de contrainte du problème (P) correspond au nombre de variable du problème (D).
   (a) Une contrainte de type $\leqslant$ donne une variable positive.
   (b) Une contrainte de type $\geqslant$ donne une variable négative.
   (c) Une contrainte de type $=$ donne une variable non distinguée.
3. Si (P) est un problème de maximisation (resp. minimisation), (D) est un problème de minimisation (resp. maximisation).

Le problème (P) est appelé problème primal.

Démonstration. Il suffit de se ramener à la forme normal des problèmes. □

Proposition 3.3.3

Le problème dual d'un problème dual est le problème primal.

Démonstration. Il suffit de se ramener aux définitions. □

Théorème 3.3.4 (Dualité faible)

Soit $(\mathsf{P}) - (\mathsf{D})$ une paire primale-duale. S'il existe une solution admissible à (P) et à (D) alors la valeur de la fonction objectif de (P) est inférieur à celle de (D).

L'interprétation de la dualité faible d'un point de vue économique est que le profit est toujours inférieur ou égale à la valeur des ressources. Dans notre exemple, cela signifie que le profit des ventes de la maison Castor sera toujours plus petit que le prix d'achat des matière première par Polux.

Théorème 3.3.5 (Dualité forte)

Soit $(\mathsf{P}) - (\mathsf{D})$ une paire primale-duale.

- S'ils admettent tous les deux une solution admissible alors ils admettent tous les deux une solution optimale. Précisément l'optimum a la même valeur et la solution du dual correspond aux valeurs des variables d'écarts entrantes du primal en changeant leur signe.
- Si le primal (resp. dual) est non borné alors le dual (resp. primal) n'admet pas de solution admissible

D'un point de vue économique, la dualité forte s'interprète en précisant que le profit est maximal lorsque toutes les ressources ont été exploité (jusqu'à épuisement de leur valeur).

Illustrons le premier point de ce théorème à l'aide l'exemple des maisons Castor et Polux.

Le problème primal est

$$(\mathsf{P}) \begin{cases} 4x_1 + 1800x_2 & \leqslant 40000 \\ x_1 + 11x_2 & \leqslant 200 \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 120 \\ \mathrm{Max}(20x_1 + 180x_2) \end{cases}$$

et le problème dual est

$$(\mathsf{D}) \begin{cases} 4y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 20 \\ 1800y_1 + 11y_2 + 2y_3 \geqslant 180 \\ \mathrm{Min}(40000y_1 + 200y_2 + 120y_3) \end{cases}$$

En appliquant la méthode du simplexe au primal on abouti au tableau suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	0	1	$\frac{-1792}{9}$	$\frac{1756}{9}$	$\frac{212320}{9}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{80}{9}$
x_1	1	0	0	$\frac{-2}{9}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{920}{9}$
Max	0	0	0	$\frac{-140}{9}$	$\frac{-40}{9}$	$\frac{-32800}{9}$

Nous avons donc que $(x_1, x_2) = \left(\frac{920}{9}, \frac{80}{9}\right)$ pour un optimum de $\frac{32800}{9}$. On observe en particulier que les variables d'écarts entrantes $(e_1, e_2, e_3) = \left(0, -\frac{140}{9}, -\frac{40}{9}\right)$. Le théorème de la dualité forte permet donc de conclure que le dual admet $(y_1, y_2, y_3) = \left(0, \frac{140}{9}, \frac{40}{9}\right)$ comme solution avec un optimum de $\frac{32800}{9}$.

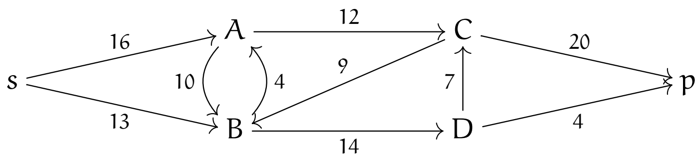
4. Optimisation de flot

Nous renvoyons au cours de théorie des graphes pour le rappel sur ces notions ainsi que l'ensemble des notations

4.1 Réseau

Définition 4.1.1

Un **réseau** est la donnée d'un graphe connexe valué $(\mathcal{G}, \lambda)$ possédant une unique source et un unique puits.



Remarque 4.1.2 : Puisqu'un réseau ne possède qu'une source et qu'un puits, on peut parler de <u>la</u> source et de <u>le</u> puits.

Un réseau modélise un phénomène de transfert de flux [2]. Le réseau précédent peut, par exemple, modéliser la circulation d'eau à travers des quartiers d'une ville (les quartiers A, B, C et D), le sommet s représentant la source de ce réseau (au sens définie ici et au sens naturel d'une source) tout comme le puits. La valuation du réseau représentant la capacitée maximale des canalisations.

Définition 4.1.3

Un **flot** sur un réseau $(\mathcal{G}, \lambda)$ de source s et de puits p est la donnée d'une application $f : \mathbf{Arc}(\mathcal{G}) \longmapsto [0; +\infty[$ satisfaisant

(i). $\forall (x, y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}),\ f(x, y) \leqslant \lambda(x, y)$.

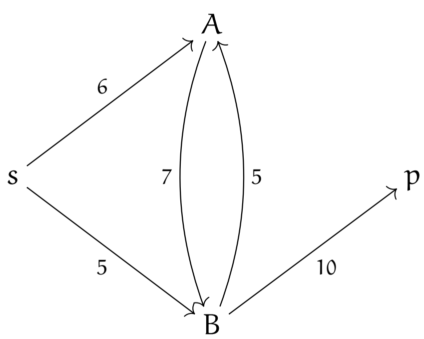
(ii). La loi des noeuds :

$$\forall x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) - \{s, p\}, \qquad \sum_{y \in \Gamma^{+1}(x, \mathcal{G})} f(x, y) = \sum_{z \in \Gamma^{-1}(x, \mathcal{G})} f(z, x)$$

Dans la pratique un flot, représente le parcours d'un flux dans le réseau. En reprennant la modélisation des canalisations, un flot représente le parcours du l'eau dans les canalisation.

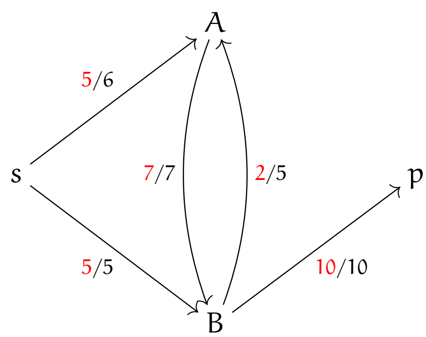
Remarque 4.1.4 : Une manière alternative d'énoncer la loi des noeuds est : tout ce qui rentre sort.

Considérons le réseau suivant



$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{Arc}(\mathcal{G}) & \longmapsto & [0; +\infty[\\ (s, A) & \longrightarrow & 5 \\ (s, B) & \longrightarrow & 5 \\ (A, B) & \longrightarrow & 7 \\ (B, A) & \longrightarrow & 2 \\ (B, p) & \longrightarrow & 10 \end{array}$$

On peut représenter un flot dans un réseau en indiquant sur chaque arc $\text{valeur du flot}/\text{valuation}$.



2. Le mot flux aura pour nous un sens différent, on l'utilise ici dans le sens courant du terme.

Définition 4.1.5

Soient f un flot sur un réseau $(\mathcal{G}, \lambda)$ de source s et de puits p et $x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) - \{s, p\}$

- Le **flux de** x est $\displaystyle\sum_{y \in \Gamma^{+1}(x,\mathcal{G})} f(x, y) = \sum_{z \in \Gamma^{-1}(x,\mathcal{G})} f(z, x)$.
- Le **flux entrant** est $\sum_{y \in \Gamma^{+1}(s,\mathcal{G})} f(s, y)$.
- Le **flux sortant** est $\sum_{z \in \Gamma^{-1}(s,\mathcal{G})} f(z, p)$.

Dans l'exemple précédent le flux de A est 7 et le flux de B est 12. La valeur du flux entrant est 10 comme la valeur du flux sortant.

Proposition 4.1.6

Quelque soit le flot dans un réseau, la valeur du flux entrant est égale à la valeur du flux sortant.

Démonstration. Le flux entrant se propage dans le réseau et il n'y a aucune perte car chaque sommet satisfait la loi des noeuds ; on retrouve donc la valeur du flux entrant dans le puits. □

Définition 4.1.7

Soit f un flot sur un réseau (G, λ) de source s et de puits p. On appel **flux du réseau** le nombre

$$\mathrm{Flux}(f) = \sum_{y \in \Gamma^{+1}(s,\mathcal{G})} f(s, y) = \sum_{z \in \Gamma^{-1}(s,\mathcal{G})} f(z, p)$$

Étant donné un réseau, peut-on déterminer un flot de flux maximal ? Cette question reviens à chercher une application satisfaisant les conditions de la définition et maximisant le flux. Il s'agit donc d'un problème linéaire.

Proposition 4.1.8

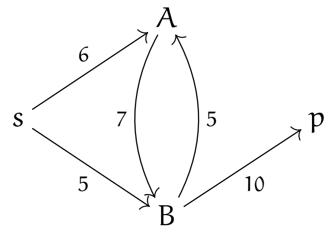
Soit $(\mathcal{G}, \lambda)$ un réseau de source s et de puits p. Considérons le problème linéaire suivant (les inconnues étants $f(x, y)$ pour tout arc (x, y) de $\mathcal{G}$) :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}), & f(x,y) & \leqslant & \lambda(x,y) \\ \forall x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G}) - \{s,p\}, \displaystyle\sum_{y \in \Gamma^{+1}(x,\mathcal{G})} f(x,y) - & \displaystyle\sum_{z \in \Gamma^{-1}(x,\mathcal{G})} f(z,x) & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{y \in \Gamma^{+1}(s,\mathcal{G})} f(s,y) - & \displaystyle\sum_{z \in \Gamma^{-1}(p,\mathcal{G})} f(z,p) & = & 0 \\ \mathrm{Max} \left(\displaystyle\sum_{y \in \Gamma^{+1}(s,\mathcal{G})} f(s,y) \right) & & & \end{cases}$$

La solution de ce problème, si elle existe, est une fonction de flot qui maximise le flux.

Démonstration. Les inéquations du problème viennent du premier point de la définition de flot. Les équations traduisent la loi des noeuds ainsi que la conservation du flux et la fonction à maximiser est le flux du flot. □

Considérons le réseau suivant



Pour simplifier, on note $f(s, A) = \alpha$, $f(s, B) = \beta$, $f(A, B) = \gamma$, $f(B, A) = \delta$ et $f(B, p) = \varepsilon$. Le système linéaire associé est

$$\begin{cases} \alpha & \leqslant & 6 \\ \beta & \leqslant & 5 \\ \gamma & \leqslant & 7 \\ \delta & \leqslant & 5 \\ \varepsilon & \leqslant & 10 \\ \alpha + \delta - \gamma & = & 0 \\ \beta + \gamma - \delta - \varepsilon & = & 0 \\ \alpha + \beta - \varepsilon & = & 0 \\ \mathrm{Max}(\alpha + \beta) & & \end{cases}$$

On peut chercher la solution via les méthodes alternatives (deux phases ou grand M). Le premier tableau de la méthode du grand M est le suivant :

	α	β	γ	δ	ε	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	a_1	a_2	a_3	
e_1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6
e_2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
e_3	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	7
e_4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5
e_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	10
a_1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a_2	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
a_3	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Max	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	0

On dénombre 13 variables pour un problème initial de 4 sommets et 5 arcs.

Remarque 4.1.9 : On observe qu'un réseau avec s sommets et a arcs fait apparaître un problème linéaire à $2a + s - 1$ variables (ce qui correspond aux nombres de colonne de la matrice de résolution).

Par un raisonnement combinatoire on peut démontrer que le nombre maximal de variables pour un réseau à $s > 2$ sommets est $(s - 1)(2s - 3)$ (par exemple le plus gros réseau sur 8 sommets engendrera un problème linéaire à 91 variables).

Fort heureusement, il existe une autre méthode de résolution, basée sur l'étude récursif du graphe.

4.2 Algorithme de Ford-Fulkerson

Voici l'algorithme de Ford-Fulkerson permettant d'exhiber un bon candidat pour la fonction de flot de flux maximal.

§4.2.1 : Algorithme de Ford-Fulkerson.

Étape 0. `Initialisation.`

- `La fonction de flot vaut 0 sur chaque arc.`
- `Le flux est nul.`

Étape 1. `Recherche d'un chemin améliorant. Marquage + ou −.`

1. `On marque + la source.`
2. `On marque + un sommet qui est extrémité d'un arc dont l'origine est déjà marqué + ou − et sur lequel le flux peut augmenter.`

3. On marque $-$ un sommet qui est origine d'un arc dont l'extrémité est déjà marqué $+$ ou $-$ et sur lequel le flux peut diminuer.
4. On recommence le point précédent tant que le puits n'est pas marqué.
   - Lorsque le puits est marqué on passe à l'étape 2.
   - S'il n'est plus possible de marquer le puits on s'arrête.

Le processus de marquage permet de déterminer un chemin entre la source et le puits (en ne considérant pas l'orientation des arcs). C'est ce que l'on appel le chemin améliorant.

Étape 2. Amélioration du flux.

Flux $+$. Pour chaque arc du chemin améliorant dans le sens direct (respectant l'orientation des arc ; ou : dont l'origine est marqué $+$), on calcul la différence entre la valuation et le flot de l'arc.

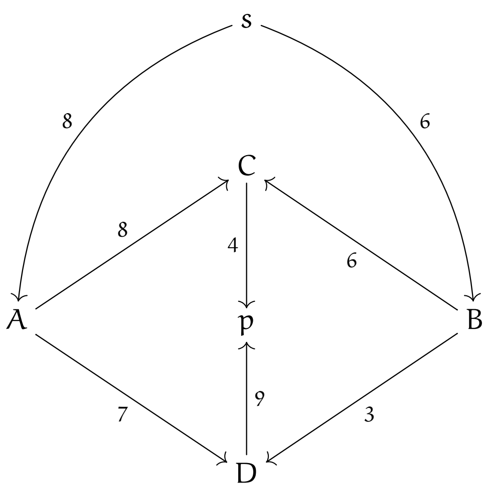
Flux $-$. Pour chaque arc du chemin améliorant dans le sens indirect (ne respectant pas l'orientation des arc ; ou : dont l'origine est marqué $-$), on considère la valeur du flot de l'arc.

Valeur améliorante du flux. On prend le plus petit des flux $+$ et $-$.

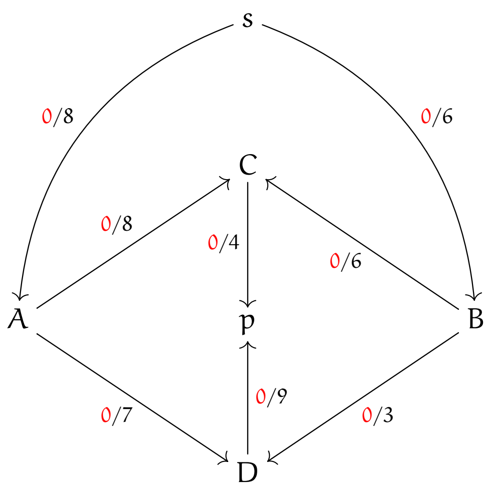
Étape 3. Pour chaque arc du chemin améliorant dont le l'origine est marqué $+$ on incrémente le flot de la valeur améliorante du flux et pour les arcs dont l'origine est marqué $-$ on décrémente le flot de la valeur améliorante du flux.

Détaillons un exemple.

Considérons le réseau suivant :

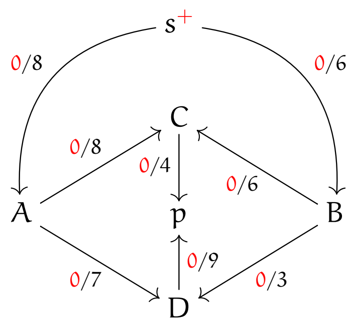


Commençons par l'initialisation.

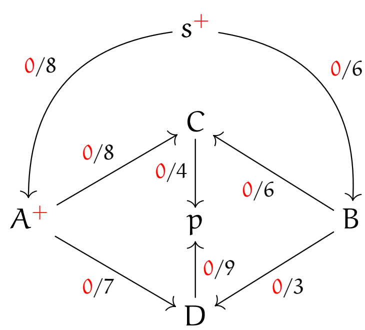


Dans ce cas $\mathsf{Flux}(f) = 0$.

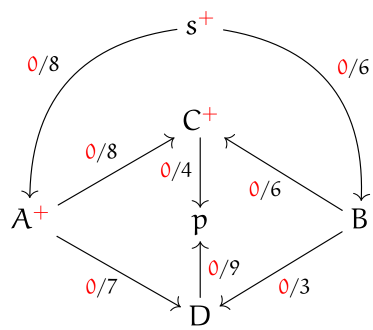
On marque la source.



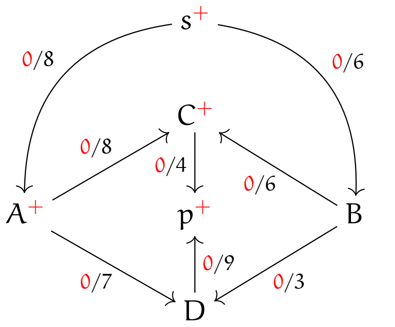
Puisqu'on cherche à maximiser le flux, on va choisir les arcs de flot le plus grand possible. On marque A.



Puis on marque C.



Et finalement on marque le puits.



Nous avons donc déterminer un chemin améliorant : $sACp$.

Arc (s, A)**.** L'origine (s) est marqué $+$. On calcul donc la différence entre la valuation et le flot : $8 - 0 = 8$.

Arc (A, C)**.** L'origine (A) est marqué $+$. On calcul $8 - 0 = 8$.

Arc (C, p)**.** L'origine (C) est marqué $+$. On calcul $4 - 0 = 4$.

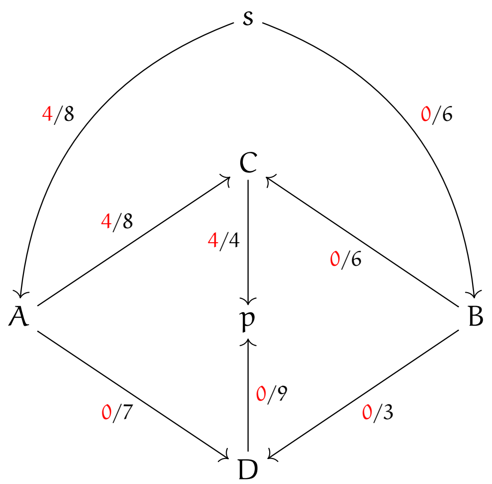
Le plus petit nombre est 4. On modifie le flot :

Flot de l'arc (s, A)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

Flot de l'arc (A, C)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

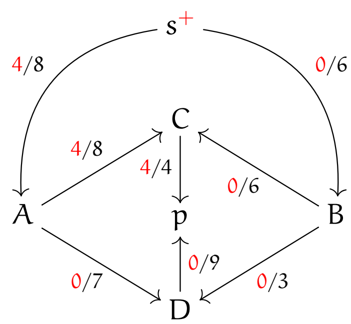
Flot de l'arc (C, p)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

Flux. On augmente la valeur du flux de 4.

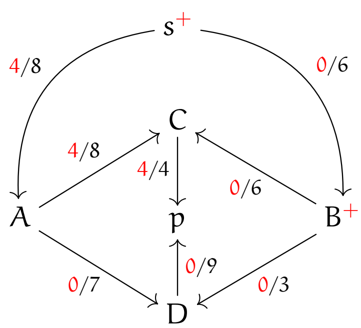


A la fin de cette itération, nous avons augmenter la valeur du flux : $\mathrm{Flux}(f) = 4$.

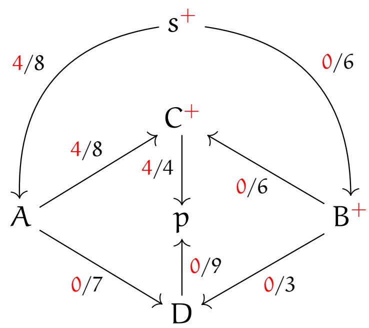
On marque s.



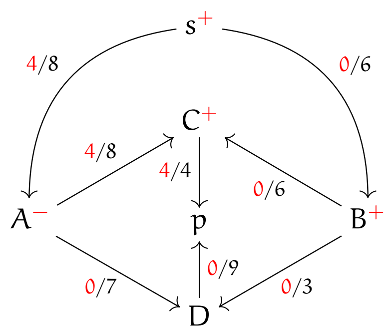
On marque B.



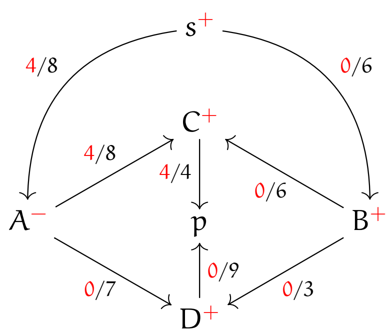
On marque C.



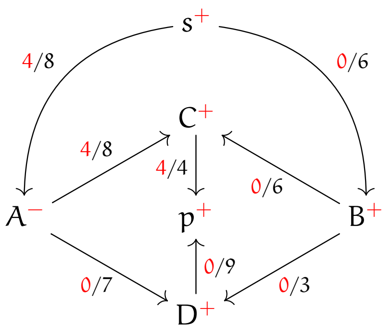
On ne peut pas marquer le sommet p car l'arc (C, p) a déjà un flot maximal ; on dit que l'arc est saturé. Mais on peut marquer A d'un $-$ car le flot de l'arc (C, A) est strictement positif (il est de 4) et peut donc diminuer. On marque A.



On marque D.



On marque p.



Le chemin améliorant est : $sBCADp$.

Arc (s, B)**.** L'origine est marqué $+ : 6 - 0 = 6$.

Arc (B, C)**.** L'origine est marqué $+ : 6 - 0 = 6$.

Pour (C, A) Il s'agit en fait de l'arc (A, C). L'origine est marqué $-$: on regarde quelle quantité peut être enlever au flot : 4.

Arc (A, D)**.** L'origine est marqué $+ : 7 - 0 = 7$.

Arc (D, p)**.** L'origine est marque $+ : 9 - 0 = 9$.

Le plus petit nombre est 4.

Flot de l'arc (s, B)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

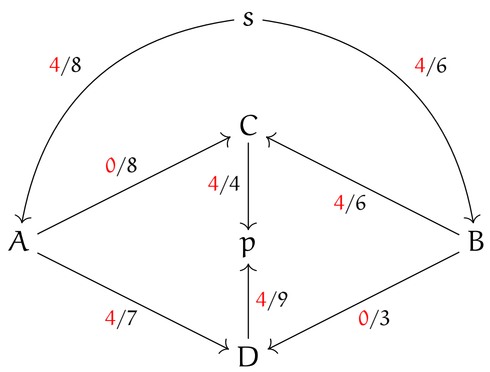
Flot de l'arc (B, C)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

Flot de l'arc (C, A)**.** L'origine est marqué $-$, on décrémente le flot de 4 : $4 - 4 = 0$.

Flot de l'arc (A, D)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

Flot de l'arc (D, p)**.** L'origine est marqué $+$, on incrémente le flot de 4 : $0 + 4 = 4$.

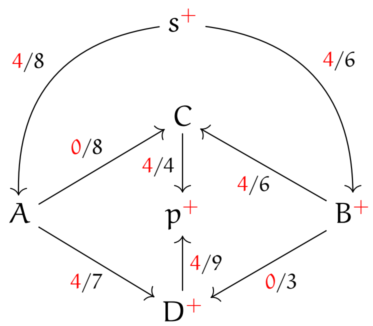
Flux. Le flux augmente de 4.



A la fin de cette itération, nous avons augmenter la valeur du flux : $\mathsf{Flux}(f) = 4 + 4 = 8$.

Continuons en éludant certaines étapes.

Marquage



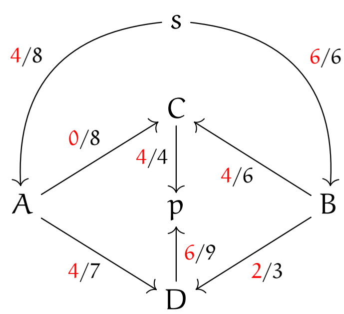
Chaine améliorante : $sBDp$.

Arc (s, B)**.** $6 - 4 = 2$

Arc (B, D)**.** $3 - 0 = 3$

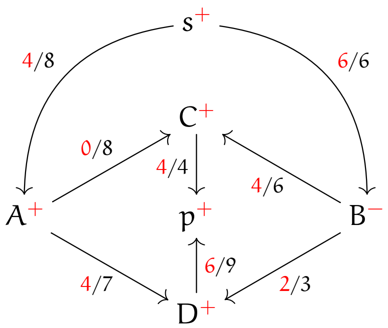
Arc (D, p)**.** $9 - 4 = 5$

Flot améliorant : 2



$\mathsf{Flux}(f) = 8 + 2 = 10$

Marquage



Chaine améliorante : $sACBDp$.

Arc (s, A)**.** $8 - 4 = 4$

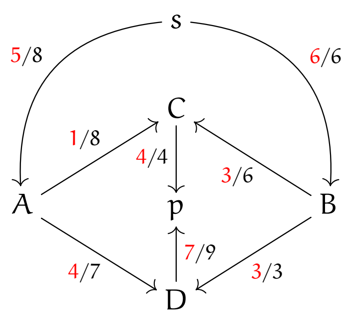
Arc (A, C)**.** $8 - 0 = 8$

Pour (C, B)**.** 4

Arc (B, D)**.** $3 - 2 = 1$

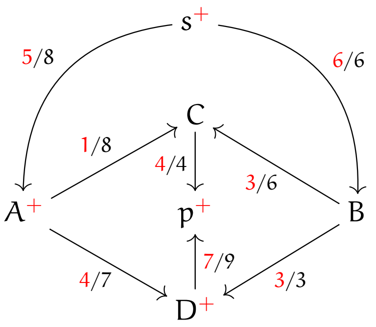
Arc (D, p)**.** $9 - 6 = 3$

Flot améliorant : 1



$\mathrm{Flux}(f) = 10 + 1 = 11$

Marquage



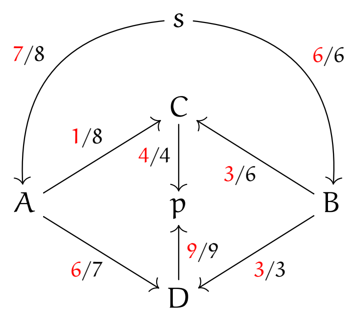
Chaine améliorante : $sADp$.

Arc (s, A). $8 - 5 = 3$

Arc (A, D). $7 - 4 = 3$

Pour (D, p). $9 - 7 = 2$

Flot améliorant : 2



$\mathrm{Flux}(f) = 11 + 2 = 13$

L'algorithme s'achève ici. On observe en effet que tous les arcs aboutissants au puits sont saturés il sera donc impossible de déterminer une chaine améliorante.

Comment s'assurer que le flot trouvé est maximal ?

Définition 4.2.2

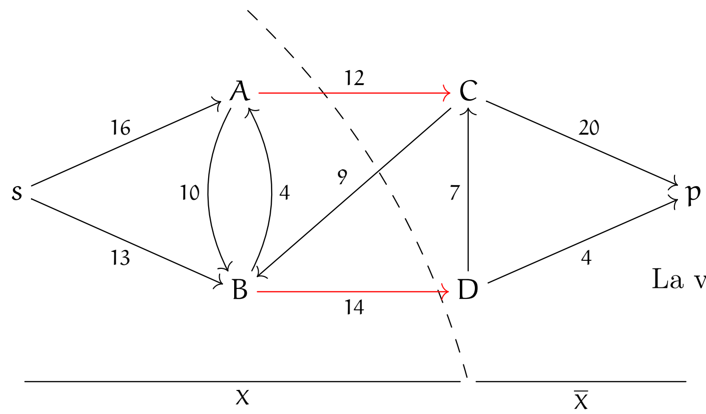
Soit (G, λ) un réseau de source s et de puits p. Une **coupe** de $\mathcal{G}$ est la donné de deux sous-ensembles X, $\overline{X}$ de $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ satisfaisant :

(i) $s \in X$, $p \in \overline{X}$.

(ii) $X \cup \overline{X} = \mathbf{Som}(\mathcal{G})$, $X \cap \overline{X} = \varnothing$.

Pour toute coupe $(X, \overline{X})$, on définit la **valeur de la coupe** comme le nombre

$$\lambda(X, \overline{X}) = \sum_{x \in X, y \in \overline{X}} \lambda(x, y)$$



La valeur de cette coupe est $\lambda(X, \overline{X}) = 12 + 14 = 26$

Théorème 4.2.3 Ford-Fulkerson

Pour tout flot f et toute coupe $(X, \overline{X})$ d'un réseau

$$\mathrm{Flux}(f) \leqslant \lambda(X, \overline{X})$$

Corollaire 4.2.4

S'il existe un flot f et une coupe $(X, \overline{X})$ tel que $\mathrm{Flux}(f) = \lambda(X, \overline{X})$ alors le flot est de flux maximal.

Dans la pratique, lorsqu'on dispose d'un candidat au flot de flux maximal, obtenu par l'algorithme de Ford-Fulkerson par exemple, il suffit de trouver une coupe de la valeur du flux pour conclure qu'il est maximal.

Dans notre exemple, si on considère $X = \{s, A, B, C, D\}$ et $\overline{X} = \{p\}$ alors $(X, \overline{X})$ est une coupe de valeur 13. Puisque le flot trouvé est de flux 13, il de flux maximal.

5. Problème d'affectation

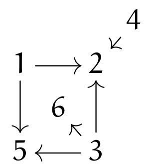
5.1 Outils de la théorie des graphes

Définition

On dira qu'un graphe orienté $\mathcal{G}$ est *biparti* si il existe deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$ vérifiant :

1. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \mathbf{Som}(\mathcal{G})$
2. $\forall (x, y) \in \mathbf{Arc}(\mathcal{G}), \quad (x \in A \wedge y \in B)$.

Le graphe ci-contre est biparti. En effet en posant $A = \{1; 3; 4\}$ et $B = \{2; 5; 6\}$ on observe que les conditions précédentes sont vérifiées.



Définition

On défini le graphe *biparti complet* $\mathcal{K}_{n,m}$ comme le graphe avec sa première partie A de cardinalité n, sa seconde partie B de cardinalité m et tel que pour chaque sommet de A il existe un arc vers n'importe quel sommet de B.

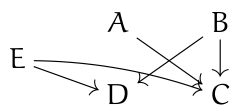
Considérons la matrice booléenne M d'un graphe biparti. Notons A sa première partie et B sa seconde partie. En réordonnant les sommets, précisément en plaçant les sommets de A d'abord et les sommets de B ensuite on peut se ramener à une matrice triangulaires blocs stricte. Précisément, puisque qu'il n'y a pas d'arc de A vers A, de B vers B et de B vers A, il est toujours possible de se ramener à une matrice de la forme

$$\begin{array}{c||ccc|ccc}
 & \cdots & A & \cdots & \cdots & B & \cdots \\
\hline\hline
\vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \ddots & \vdots & \iddots \\
A & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & * & \cdots \\
\vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \iddots & \vdots & \ddots \\
\hline
\vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \ddots & \vdots & \iddots \\
B & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \iddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Définition

Soit $\mathcal{G}$ un graphe biparti de première partie A et de seconde partie B. On appel *matrice réduite* la matrice booléenne M de $\mathcal{G}$ où l'on a supprimé les colonnes des sommets de A et les lignes des sommets de B.

La matrice réduite associé au graphe biparti dont une représentation sagittale est



est

	C	D
A	1	0
B	1	1
E	1	1

5.2 Algorithme hongrois

L'entreprise *Lune Nette* fabrique des lunettes astronomiques et pour ce faire utilise trois types de matière premières : du métal (M), du plastique (P) et du verre (V). *Lune Nette* fait appel à trois usines pour se fournir. Chaque usine affiche des prix différents résumés dans le tableau suivant en millier d'euro par kilogramme

	1	2	3
M	3	5	3
P	1	2	2
V	2	2	1

Mais les lois sur la compétitivité oblige *Lune Nette* a respecter les règles antitrust : on ne peut commander à une usine qu'une seule matière première. La question qui se pose alors est de savoir comment choisir quelle matière première une usine enverra et ce au cout le plus petit possible ?

Il s'agit d'un problème d'affectation. L'objet que nous manipulons est un graphe biparti (dans notre exemple les usines d'un coté et les matières premières de l'autre) avec autant de sommet dans la première partie que dans la seconde. En d'autre terme la matrice réduite est carré. Il s'agit de plus d'un graphe valué car chaque arc a un poids.

La question est donc de sélectionner les arcs pour que le poids total (c'est à dire la somme des arcs sélectionnés) soit le plus petit possible. Autrement dis : il faut, dans la matrice réduite augmenté par la valuation, sélection une et une seule case par ligne et colonne.

Un outil pour y arriver est *l'algorithme hongrois* (aussi appelé *algorithme de Kuhn-Munkres*) qui permet, en un temps de calcul polynomiale, de déterminer l'affection de poids minimal.

Étape 1 - Apparition de 0. On fait apparaitre un zéro par ligne et par colonne par le procédé suivant :

— Pour chaque ligne on soustrait à tous les coefficients de la ligne sa valeur minimale.

— Pour chaque colonne on soustrait à tous les coefficients de la colonne sa valeur minimale.

On passe ensuite à l'étape 2.

Étape 2 - Sélection de 0.

Si il existe un 0 qui n'est pas sur une ligne ou une colonne d'un 0 sélectionné, on le sélectionne et on recommence l'étape 2.

Sinon

Si toutes les colonnes (ou ligne) possède un 0 sélectionné, l'algorithme prend fin.

Sinon on va à l'étape 3

Etape 3 - Couverture de 0.

Initialisation. On couvre toutes les colonnes avec un 0 sélectionné.

Marquage.

Si il existe un 0 non couvert, on le marque.

Si il existe un 0 sélectionné dans la ligne du 0 marqué on couvre la ligne et on découvre la colonne. On recommence l'étape 3Marquage.

Sinon on procède à la numérotation des 0.

— On note $\mathsf{0}_0$ le dernier 0 marqué.

— On note $\mathsf{0}_1$ le 0 sélectionné sur la même colonne du $\mathsf{0}_0$.

— On note $\mathsf{0}_2$ le 0 marqué sur la même ligne du $\mathsf{0}_1$.

— On note $\mathsf{0}_3$ le 0 sélectionné sur la même colonne du $\mathsf{0}_2$.

— On note $\mathsf{0}_4$ le 0 marqué sur la même ligne du $\mathsf{0}_3$.

— ...

— On note $\mathsf{0}_{2x+1}$ le 0 sélectionné sur la même colonne du $\mathsf{0}_{2x}$.

— ...

— On note $\mathsf{0}_{2y}$ le 0 marqué sur la même ligne du $\mathsf{0}_{2y-1}$.

— ...

Une fois fait tous les $\mathsf{0}_{\mathsf{paire}}$ deviennent des 0 sélectionnés et les $\mathsf{0}_{\mathsf{impaire}}$ deviennent non sélectionnés puis on retourne à l'étape 2.

Sinon on va à l'étape 4.

Etape 4 - Nouveaux 0. Soit $\mathtt{m}$ le plus petit coefficient parmi ceux non couvert à l'étape 3.

- On ajoute $\mathtt{m}$ à toutes les lignes couvertes.
- Puis, on soustrait $\mathtt{m}$ à toutes les colonnes non couvertes.

On retourne à l'étape 2.

Faisons tourner cet algorithme sur la matrice réduite suivante.

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 8 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 3 & 5 & 6 \end{array}$$

Étape 1. Apparition de 0 sur les lignes, en soustrayant de chaque ligne son plus petit coefficient.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

Apparition de 0 sur les colonnes, en soustrayant de chaque colonne son plus petit coefficient.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

Étape 2. Pour signaler la sélection des 0, on les encadres.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & \boxed{0} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

Étape 3. On choisi de marquer les 0 en les soulignant et de couvrir les lignes et colonnes en plaçant une croix devant la ligne ou colonne concernée.

Initialisation.

$$\begin{array}{c||ccccc} & \text{✗} & \text{✗} & & \text{✗} & \\ \hline\hline & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ & \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & 0 \\ & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ & 3 & \boxed{0} & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

Itération 1. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc} & \text{✗} & & & \text{✗} & \\ \hline\hline & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ & \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & 0 \\ & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\ & 0 & 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

Itération 2. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc} & & & & \text{✗} & \\ \hline\hline & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \text{✗} & \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & \underline{\mathbf{0}} \\ & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\ & 0 & 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

Itération 3. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque.

$$\begin{array}{c||ccccc} & & & & \text{✗} & \\ \hline\hline & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \text{✗} & \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & \underline{\mathbf{0}} \\ & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\ & \underline{\mathbf{0}} & 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

Ce dernier 0 marqué n'est pas sur une ligne avec un 0 sélectionné. On procède donc à la numérotation des 0.

Numérotation 0. On note 0_0 le 0 que nous venons de marquer :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & & \text{✗} & \\ \hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
\text{✗} & \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & \underline{\mathbf{0}} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\
 & \underline{\mathbf{0_0}} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

Numérotation 1. On note 0_1 le 0 sélectionné sur la colonne du 0_0 :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & & \text{✗} & \\ \hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
\text{✗} & \boxed{0_1} & 1 & 3 & 4 & \underline{\mathbf{0}} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\
 & \underline{\mathbf{0_0}} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

Numérotation 2. On note 0_2 le 0 marqué sur la ligne du 0_1 :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & & \text{✗} & \\ \hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
\text{✗} & \boxed{0_1} & 1 & 3 & 4 & \underline{\mathbf{0_2}} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\
 & \underline{\mathbf{0_0}} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

Fin de la numérotation. Il n'existe pas de 0 sélectionné dans la colonne du 0_2, on arête la numérotation. Les 0 avec un indice paire deviennent sélectionnés et les 0 avec un indice impaire sont désélectionnés.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & & & \text{✗} & \\ \hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
\text{✗} & 0 & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\
 & \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

On retourne à l'étape 2.

Étape 2. La matrice est

$$\begin{array}{ccccc}
5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \\
1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
3 & \boxed{0} & 0 & 0 & 2 \\
\boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

On ne peut pas sélectionner de nouveau 0. On passe à l'étape 3.

Étape 3.

Initialisation.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \text{✗} & \text{✗} & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
 & 0 & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
 & 3 & \boxed{0} & 0 & 0 & 2 \\
 & \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

Itération 1. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \text{✗} & & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
 & 0 & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 3 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & 2 \\
 & \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

Fin du marquage. Il n'existe plus de 0 dans la partie non couverte. On va à l'étape 4.

Étape 4. Le plus petit coefficient de la partie non couverte est 1.

On ajoute donc 1 à chaque coefficient sur les lignes couvertes :

$$\begin{array}{c||ccccc}
 & \text{✗} & & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline\hline
 & 5 & 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\
 & 0 & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\
 & \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 3
\end{array}$$

Puis on soustrait 1 à tous les coefficients des colonnes non couvertes :

$$\begin{array}{c||ccccc}
 & \text{✗} & & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline\hline
 & 5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
 & 0 & 0 & 2 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & 0 & 1 & 3 \\
 & \boxed{0} & 3 & 0 & 3 & 3
\end{array}$$

On retourne à l'étape 2.

Étape 2. La matrice est

$$\begin{array}{ccccc}
5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 2 & 4 & \boxed{0} \\
1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\
4 & \boxed{0} & 0 & 1 & 3 \\
\boxed{0} & 3 & 0 & 3 & 3
\end{array}$$

On ne peut pas sélectionner de nouveau 0. On passe à l'étape 3.

Étape 3.

Initialisation.

$$\begin{array}{c||ccccc}
 & \text{✗} & \text{✗} & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline\hline
 & 5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
 & 0 & 0 & 2 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\
 & 4 & \boxed{0} & 0 & 1 & 3 \\
 & \boxed{0} & 3 & 0 & 3 & 3
\end{array}$$

Itération 1. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc}
 & \text{✗} & & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline\hline
 & 5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
 & 0 & 0 & 2 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 1 & 3 \\
 & \boxed{0} & 3 & 0 & 3 & 3
\end{array}$$

Itération 2. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc}
 & \text{✗} & & & \text{✗} & \\ \hline\hline
 & 5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 1 & 3 \\
 & \boxed{0} & 3 & 0 & 3 & 3
\end{array}$$

Itération 3. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc}
 & & & & \text{✗} & \\ \hline\hline
 & 5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 4 & \boxed{0} \\
 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 1 & 3 \\
\text{✗} & \boxed{0} & 3 & \underline{\mathbf{0}} & 3 & 3
\end{array}$$

Fin du marquage . Il n'existe plus de 0 dans la partie non couverte. On va à l'étape 4.

Etape 4. Le plus petit coefficient de la partie non couverte est 1.

On ajoute 1 à chaque coefficient sur les lignes couvertes :

$$\begin{array}{c||ccccc} & & & & \text{✗} & \\ \hline\hline & 5 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ \text{✗} & 1 & 1 & 3 & 5 & \boxed{1} \\ & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ \text{✗} & 5 & \boxed{1} & 1 & 2 & 4 \\ \text{✗} & \boxed{1} & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array}$$

Puis on soustrait 1 à tous les coefficients des colonnes non couvertes :

$$\begin{array}{c||ccccc} & & & & \text{✗} & \\ \hline\hline & 4 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ \text{✗} & 0 & 0 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \text{✗} & 4 & \boxed{0} & 0 & 2 & 3 \\ \text{✗} & \boxed{0} & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

On retourne à l'étape 2.

Étape 2. La matrice est

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & \boxed{0} & 0 & 2 & 3 \\ \boxed{0} & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

On ne peut pas sélectionner de nouveau 0. On passe à l'étape 3.

Étape 3.

Initialisation.

$$\begin{array}{c||ccccc} & \text{✗} & \text{✗} & & \text{✗} & \text{✗} \\ \hline\hline & 4 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ & 4 & \boxed{0} & 0 & 2 & 3 \\ & \boxed{0} & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

Itération 1. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc} & \text{✗} & \text{✗} & & & \text{✗} \\ \hline\hline \text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ & 4 & \boxed{0} & 0 & 2 & 3 \\ & \boxed{0} & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

Itération 2. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc} & \text{✗} & & & & \text{✗} \\ \hline\hline \text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\ & \boxed{0} & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

Itération 3. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc} & \text{✗} & & & & \\ \hline\hline \text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\ \text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\ & \boxed{0} & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

Itération 4. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque. Comme ce 0 est sur la même ligne qu'un 0 sélectionné, on couvre la ligne et découvre la colonne de ce 0 sélectionné.

$$\begin{array}{c||ccccc} & & & & & \\ \hline\hline \text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\ \text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\ \text{✗} & \boxed{0} & 3 & \underline{\mathbf{0}} & 4 & 3 \end{array}$$

Itération 5. Il existe un 0 dans la zone de la matrice qui n'est pas couverte. On le marque.

$$\begin{array}{c||ccccc}
\hline\hline
\text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\
 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\
\text{✗} & \boxed{0} & 3 & \underline{\mathbf{0}} & 4 & 3
\end{array}$$

Ce dernier 0 marqué n'est pas sur une ligne avec un 0 sélectionné. On procède donc à la numérotation des 0.

Numérotation 0. On note 0_0 le 0 que nous venons de marquer.

$$\begin{array}{c||ccccc}
\hline\hline
\text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\
 & \underline{\mathbf{0}_0} & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\
\text{✗} & \boxed{0} & 3 & \underline{\mathbf{0}} & 4 & 3
\end{array}$$

Numérotation 1. On note 0_1 le 0 sélectionné sur la colonne de 0_0.

$$\begin{array}{c||ccccc}
\hline\hline
\text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\
 & \underline{\mathbf{0}_0} & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\
\text{✗} & \boxed{0_1} & 3 & \underline{\mathbf{0}} & 4 & 3
\end{array}$$

Numérotation 2. On note 0_2 le 0 marqué sur la ligne de 0_1.

$$\begin{array}{c||ccccc}
\hline\hline
\text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\
 & \underline{\mathbf{0}_0} & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\
\text{✗} & \boxed{0_1} & 3 & \underline{\mathbf{0}_2} & 4 & 3
\end{array}$$

Fin de la numérotation. Il n'existe pas de 0 sélectionné dans la colonne du 0_2, on arête la numérotation. Les 0 avec un indice paire deviennent sélectionnés et les 0 avec un indice impaire sont désélectionnés.

$$\begin{array}{c||ccccc}
\hline\hline
\text{✗} & 4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\
\text{✗} & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\
 & \boxed{0} & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\text{✗} & 4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\
\text{✗} & 0 & 3 & \boxed{0} & 4 & 3
\end{array}$$

On retourne à l'étape 2.

Étape 2. La matrice est

$$\begin{array}{ccccc}
4 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & \boxed{0} & 0 \\
0 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 5 & \boxed{0} \\
\boxed{0} & 2 & 3 & 0 & 1 \\
4 & \boxed{0} & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 3 \\
0 & 3 & \boxed{0} & 4 & 3
\end{array}$$

Il y a exactement un 0 sélectionné sur chaque ligne et chaque colonne. L'algorithme prend fin et on a trouvé l'affection optimale.

Précisément si l'on reprend la matrice initiale en conservant les affectations

$$\begin{array}{ccccc}
9 & 8 & 6 & \boxed{4} & 6 \\
3 & 6 & 6 & 7 & \boxed{4} \\
\boxed{4} & 9 & 8 & 3 & 6 \\
7 & \boxed{6} & 4 & 4 & 7 \\
2 & 8 & \boxed{3} & 5 & 6
\end{array}$$

on trouve que l'affection minimale a un poids de $4+4+4+6+3=21$.