

Algorithme des deux phases

Première phase. On met le problème sous forme phasée en modifiant la fonction objectif :

	X	E _I	E _{II}	α _{II}	α _{III}	
E _I	A _I	Id	0	0	0	B _I
α _{II}	A _{II}	0	-Id	Id	0	B _{II}
α _{III}	A _{III}	0	0	0	Id	B _{III}
	0	0	0	-1	-1	0

- On actualise la fonction objectif en faisant apparaître 0 pour les variables artificielles (en sommant les blocs de ligne des variables artificielles dans la fonction objectif).

	X	E _I	E _{II}	α _{II}	α _{III}	
E _I	A _I	Id	0	0	0	B _I
α _{II}	A _{II}	0	-Id	Id	0	B _{II}
α _{III}	A _{III}	0	0	0	Id	B _{III}
	*	0	-1	0	0	ϑ

- On applique la méthode du simplexe avec le tableau précédent.
- Si $\vartheta \neq 0$ après l'application de l'algorithme du simplexe ou si au moins une variable artificielle est non nul alors le problème initial n'admet pas de solution. Sinon on élimine les variables artificielles et on passe à la phase 2.

Seconde phase. On récupère un tableau sans variable artificielle. On modifie la fonction objectif :

	X	E _I	E _{II}	
*	*	*	*	*
*	*	*	*	*
*	*	*	*	*
	C	0	0	0

- On actualise la fonction objectif : on soustrait de la fonction objectif les lignes apparaissant dans le tableau.
- On applique la méthode du simplexe.

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_3 \geq 15 \\ x_2 + x_3 = 20 \\ \text{Max}(x_1 + x_2 + x_3) \end{array} \right.$$

Première phase : Initialisation :

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	a ₁	a ₂	
e ₁	1	1	0	1	0	0	0	10
a ₁	1	0	1	0	-1	1	0	15
a ₂	0	1	1	0	0	0	1	20
Max	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Première phase : Mise à jour :

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	a ₁	a ₂	
e ₁	1	1	0	1	0	0	0	10
a ₁	1	0	1	0	-1	1	0	15
a ₂	0	1	1	0	0	0	1	20
Max	1	1	2	0	-1	0	0	35

Première phase : Simplexe :

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	a ₁	a ₂	
e ₁	1	1	0	1	0	0	0	10
x ₃	1	0	1	0	-1	1	0	15
a ₂	-1	1	0	0	1	-1	1	5
Max	-1	1	0	0	1	-2	0	5

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	a ₁	a ₂	
e ₁	2	0	0	1	-1	1	-1	5
x ₃	1	0	1	0	-1	1	0	15
x ₂	-1	1	0	0	1	-1	1	5
Max	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Seconde phase : Initialisation :

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	
e ₁	2	0	0	1	-1	5
x ₃	1	0	1	0	-1	15
x ₂	-1	1	0	0	1	5
Max	1	1	1	0	0	0

Seconde phase : Mise à jour :

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	
e ₁	2	0	0	1	-1	5
x ₃	1	0	1	0	-1	15
x ₂	-1	1	0	0	1	5
Max	1	0	0	0	0	-20

Seconde phase : Simplexe :

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	
x ₁	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x ₃	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{25}{2}$
x ₂	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
Max	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{45}{2}$

	x ₁	x ₂	x ₃	e ₁	e ₂	
x ₁	1	1	0	1	0	10
x ₃	0	1	1	0	0	20
e ₂	0	2	0	1	1	15
Max	0	-1	0	-1	0	-30

Conclusion : la solution du problème est $(x_1, x_2, x_3) = (10, 0, 20)$ pour un optimum de 30.