Algorithme du grand M

On met le problème sous forme phasée en introduisant pour les variables artificielle un grand M

	X	E_I	E_{II}	α_{II}	α_{III}	
E_I	A_I	Id	0	0	0	B_I
α_{II}	A_{II}	0	$-Id$	Id	0	B_{II}
α_{III}	A_{III}	0	0	0	Id	B_{III}
	C	0	0	$-M$	$-M$	0

On actualise la fonction objectif en faisant apparaitre 0 pour les variables artificielles (le grand M apparaitra dans la fonction objectif).

	X	E_I	E_{II}	α_{II}	α_{III}	
E_I	A_I	Id	0	0	0	B_I
α_{II}	A_{II}	0	$-Id$	Id	0	B_{II}
α_{III}	A_{III}	0	0	0	Id	B_{III}
	$*$	0	$-M$	0	0	$\vartheta(M)$

On applique la méthode du simplexe avec le tableau précédent. L'optimum $\vartheta(M)$ est une fonction polynomiale en M.

- Si au moins une variable artificielle est non nul alors le problème n'a pas de solution.
- Si $\vartheta(M)$ dépend de M alors le problème n'a pas de solution.
- Sinon la solution trouvée est une solution.

$$\begin{cases} x+2y & \leqslant & 4 \\ x+y & \geqslant & 1 \\ 3x+y & = & 6 \\ Max(2x+y) & & \end{cases}$$

Initialisation :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	2	1	0	0	$-M$	$-M$	0

Mise à jour :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	$2+4M$	$1+2M$	0	$-M$	0	0	$7M$

Simplexe :

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	1	2	1	0	0	0	4
α_1	$\boxed{1}$	1	0	-1	1	0	1
α_2	3	1	0	0	0	1	6
	$2+4M$	$1+2M$	0	$-M$	0	0	$7M$

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	0	1	1	1	-1	0	3
x	1	1	0	-1	1	0	1
α_2	0	-2	0	$\boxed{3}$	-3	1	3
	0	$-1-2M$	0	$2+3M$	$-2-4M$	0	$-2+3M$

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
e_1	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	2
x	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	2
e_2	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	-1	$\frac{1}{3}$	1
	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-M$	$-\frac{2}{3}-M$	-4

	x	y	e_1	e_2	α_1	α_2	
y	0	1	$\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
x	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
e_2	0	0	$\frac{2}{5}$	1	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-M$	$-\frac{3}{5}-M$	$\frac{22}{5}$

<u>Conclusion :</u> la solution du problème est

$$(x,y) = (8/5, 6/5)$$

pour un optimum de 22/5.