Mathématiques DAEU-B

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

2021

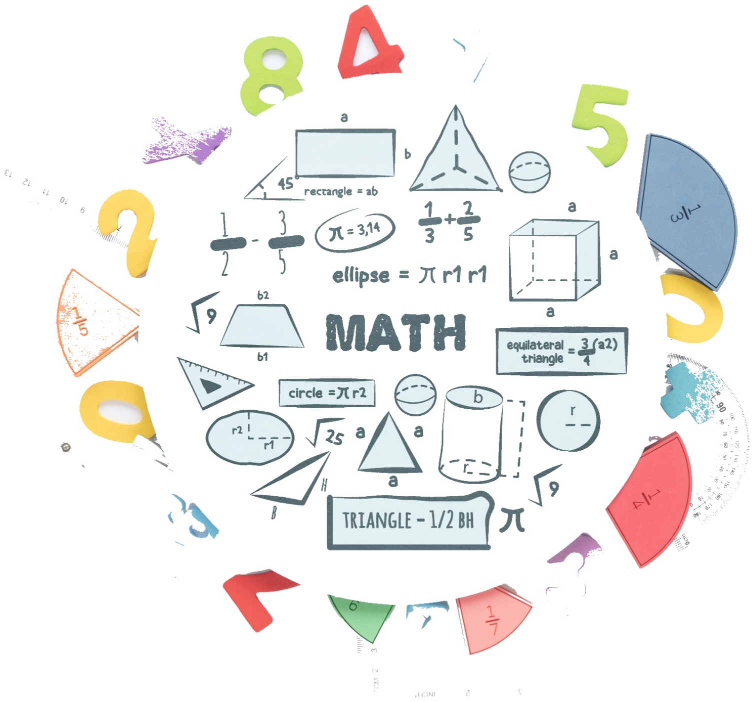


Table des matières

Partie 1

Consolidation des acquis

1. Les nombres entiers

Introduction

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}} = \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2}$$

Vous sentez votre sang ne faire qu'un tour, une goute de sueur froide coule le long de votre dos et vous vous demandez qu'est-ce que c'est que ce charabia. Commencez par respirer calmement et allégez votre esprit de la torpeur de cette phrase mathématique. Commençons par enfoncer des portes ouvertes

Oui, c'est ça des math.

Oui, vous pourrez comprendre ce que ça veut dire.

Non, c'est pas au contrôle !

Il faut vivre les math comme un jeu vidéo. L'équation écrite plus haut c'est le boss de fin. Et là vous commencer la partie, sans arme et sans expérience. Petit à petit nous allons nous attaquer à des problèmes qui vont affiner vos compétences et vous permettre d'affronter des monst... des problèmes de plus en plus difficile et vous finirez peut-être par vaincre ce démon. Mais pas d'inquiétude, ça sera pas dure (peut-être un peu douloureux).

Avant tout, il faut s'assurer que nous parlons le même langage. Celui des mathématiques !

Pour commencer laissons les lettres de l'alphabet dans notre poche et jouons avec nos chers nombres

$$0, 1, 2, 3...$$

Pour faire les choses bien, tous ces nombres naturels, on les range dans une boite. Cette boite s'appelle, **l'ensemble des entiers naturel** et est noté

$$\mathbb{N}$$

c'est un 'N' majuscule avec une barre plus épaisse au début de la lettre. C'est à un mathématicien italien du nom de Giuseppe Peano que l'on doit cette belle notation (le 'N' est celui de *naturale* le mot italien pour "naturel").

Donc dans cette boite on range tous les nombres entiers naturels (et positifs ou nuls)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 22, 2\ 019, 1\ 234\ 567\ 890, ...\}$$

Cette boite, bon disons le vrai mot : ensemble. Cet ensemble donc, est très grand, il y a TOUS les nombres entiers (ne confondez pas nombre et chiffre - chez nous il y a 10 chiffres et un nombre est composé de chiffre). Il y a une *infinité* d'entier naturel.

L'addition

La première chose que l'on peut faire avec les entiers c'est les additionner. Mais ça vous savez déjà comment ça marche !

Alors bien sur on peut utiliser une calculatrice pour faire des additions, mais on peut aussi les poser *à l'ancienne* en alignant en colonne les entiers sur la droite comme ceci :

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

On additionne par la droite en colonne. Ainsi la première opération à poser est $2+8+8 = 18$. On écrit que l'unité, c'est à dire le chiffre le plus à droite, de ce résultat. Mais pour ne pas oublier le 1, on met le met en **retenue** sur la colonne suivante.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \hline = & & & & & & & 8 \end{array}$$

La deuxième opération à faire est celle de la colonne suivante sans oublier de prendre la retenue : $1+7+9+2 = 19$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \hline = & & & & & & 9 & 8 \end{array}$$

Et on continue comme ça jusqu'à tout calculer !

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \hline = & 9 & 8 & 0 & 8 & 9 & 9 & 8 \end{array}$$

Pour finir le résultat est 9 808 998.

La multiplication

Une autre chose que l'on peut faire avec les nombres c'est les multiplier. Et comme avec les additions on pose une multiplication :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & & \end{array}$$

La première opération à faire est $7 \times 3 = 21$. On inscrit le 1 et on met le 2 en retenue.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2^2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & & \boxed{2}1 \end{array}$$

Puis ensuite on fait le 7×2 en ajoutant la retenue au résultat soit 16. On note le 6 et on met le 1 en retenue.

$$\begin{array}{cccc} & 1^1 & 2^2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & \boxed{1}6 & 1 \end{array}$$

Et pour finir

$$\begin{array}{cccc} & 1^1 & 2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & 8 & 6 & 1 \end{array}$$

Une multiplication facile est celle par dix. Multiplier par 10 reviens à ajouter un 0 à droite. D'ailleurs multiplier par 100 reviens à ajouter deux 0 à droite ; multiplier par 1 000 à ajouter 3 zéros ; multiplier par $1\underbrace{0...0}_{952 \text{ zéros}}$ reviens à ajouter 952 zéros à droite.

- $123 \times 10 = 1\ 230$
- $98\ 760 \times 1\ 000 = 98\ 760\ 000$
- $67\ 89 \times 1\underbrace{0...0}_{\text{314 zéros}} = 678\ 91\underbrace{0...0}_{\text{314 zéros}}$

Comment faire pour multiplier par 20 par exemple ? Il suffit de multiplier par 2 puis par 10 car, comme tout le monde le sait $20 = 2 \times 10$.

Ainsi pour calculer 17×20, on fait $17 \times 2 = 34$ et on rajoute un 0 : $17 \times 20 = 340$.

Il en va de même pour 45×120. On fait 45×12 auquel on ajoute un 0 : $45 \times 120 = 5\ 400$.

On peut bien sur combiner et *oublier les* 0 pour les remettre à fin du calcul. Ainsi pour faire $12\ 300 \times 9\ 870$ on fait 123×987 auquel on rajouter trois 0 à droite. Finalement $12\ 300 \times 9\ 870 = 121\ 401\ 000$.

On peut aussi faire *à l'ancienne* et poser la multiplication. Et justement on se sert de cette règle de 0 avec un autre principe qui est la **distributivité**[1].

On remarque que $987 = 7 + 80 + 900$ c'est à dire $987 = 7 + 8 \times 10 + 9 \times 100$. Ainsi pour faire 123×987 on va faire 123×7 puis 123×8 et rajouter un 0 puis 123×9 puis rajouter deux 0. Finalement on additionne les trois chiffres pour avoir le résultat.

$$\begin{aligned} 123 \times 987 &= 123 \times (7 + 80 + 900) \\ &= 123 \times 7 + (123 \times 8)0 + (123 \times 9)00 \end{aligned}$$

Bon ça à l'air compliqué raconter comme ça mais en définitive c'est très simple et ça se pose dans un joli tableau

$$\begin{array}{cccccl} & & 1 & 2 & 3 & \\ & \times & 9 & 8 & 7 & \\ \hline & & & & & \leftarrow 123 \times 7 \\ + & & & & 0 & \leftarrow 123 \times 8 \\ + & & & 0 & 0 & \leftarrow 123 \times 9 \\ \hline \end{array}$$

Ce qui fini par

$$\begin{array}{cccccccl} & & & & 1 & 2 & 3 & \\ & & & \times & 9 & 8 & 7 & \\ \hline & & & & 8 & 6 & 1 & \leftarrow 123 \times 7 \\ + & & & 9 & 8 & 4 & 0 & \leftarrow 123 \times 8 \\ + & 1 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & \leftarrow 123 \times 9 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & \end{array}$$

L'addition et la multiplication

A présent mélangeons un peu les opérations !

Que fait $1 + 2 \times 3$? C'est là que les choses se "compliquent". Tout comme me monde physique est régie par des lois (comme la gravité), le monde mathématiques est lui aussi soumit à un ensemble de lois dont voici la première :

L'opération de multiplication est prioritaire sur l'opération d'addition !

Cela signifie que pour faire $1 + 2 \times 3$, on réalise d'abord la multiplication ; on obtient $1 + 6$ qui fait 7.
Si il y a plusieurs multiplication dans une expression, on les calculs en premier peut importe l'ordre.

$$1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 = 1 + 6 + 20 = 27$$

Si on veut jouer avec les priorités on utilise les parenthèses.

Les opérations dans les parenthèses sont prioritaires sur celles qui n'y sont pas.

Ainsi $(1 + 2) \times 3 = 3 \times 3 = 9$.
On peut bien sur combiner ces deux règles !

1. On reviendra dessus plus tard.

$$
\begin{aligned}
(1+2\times(3+4))\times((5+6)\times 7) &= (1+2\times 7)\times((5+6)\times 7)\\
&= (1+14)\times((5+6)\times 7)\\
&= 15\times((5+6)\times 7)\\
&= 15\times(11\times 7)\\
&= 15\times 77\\
&= 1155
\end{aligned}
$$

La soustraction

La soustraction est un peu plus compliquée voir parfois impossible... dans la boite où l'on vit. En effet dans notre boi... ensemble $\mathbb{N}$, l'opération $4-7$ n'existe pas. Vous devinez que la réponse est -3 mais ce nombre n'est pas dans $\mathbb{N}$. Il est dans un ensemble un peut plus grand appelé **l'ensemble des entiers relatifs** noté

$$\mathbb{Z}$$

Notation introduit par M. Dedekind, mathématicien allemand (le 'Z' c'est pour *zahl*, 'nombre' en allemand).

Cet ensemble est le même que $\mathbb{N}$ sauf que chaque entier peut être positif, précédé par un $+$, ou négatif, précédé par un $-$.

$$\mathbb{Z} = \{... -2019, ... -2, -1, 0, +1, ..., +12\ 345, ...\}$$

Dans la pratique on n'écrit pas le $+$ pour le nombre positif.

Pour poser une soustraction on fait comme pour l'addition sauf que pour chaque colonne, au lieu d'additionner, on soustrait (élémentaire !) :

$$
\begin{array}{cccc}
 & 9 & 3 & 9 \\
- & 3 & 9 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Dans la première colonne on fait donc $9-3=6$.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 9 & 3 & 9 \\
- & 3 & 9 & 3 \\
\hline
 & & & 6
\end{array}
$$

Dans la seconde colonne on fait $3-9=-6$ sauf qu'on ne peut pas mettre de nombre négatif dans la dernière ligne. On va appliqué le même principe de retenue au lieu de faire $3-9$ on va faire $13-9$ et rajouter une retenue au nombre soustrait

$$
\begin{array}{cccc}
 & 9 & {}_1\underline{3} & 9 \\
- & 3_{+1} & 9 & 3 \\
\hline
 & & 4 & 6
\end{array}
$$

A la colonne suivante, on réalise encore la dernière opération $9-3$ mais on soustrait la retenue, on fait donc $9-(3+1)=9-4=5$

$$
\begin{array}{cccc}
 & 9 & {}_1\underline{3} & 9 \\
- & 3_{+1} & 9 & 3 \\
\hline
 & 5 & 4 & 6
\end{array}
$$

Comment poser $123-456$? Tout simplement en soustrayant le plus petit au plus grand, c'est à dire en posant $456-123=333$ ce qui est possible, puis de changer le signe du résultat :

$$123-456=-333$$

Multiplication et soustraction

Pour les règles de priorité, la soustraction se comporte comme l'addition. Dans ce cas rien de nouveau et donc rien de plus difficile... sauf que... comment multiplier deux nombres qu'ils aient ou non le même signe !

Pour multiplier deux nombres relatifs, on réalise le produit des nombres et le signe est obtenu par la règle des signes :

$$+\times+=+ \qquad +\times-=- \qquad -\times+=- \qquad -\times-=+$$

Par exemple $(-6)\times 2=-12$, $(-1)\times(-3)=3$.

La quatrième opération élémentaire

Il est temps de parler de la quatrième opération élémentaire : la division que l'on note $\div$.

D'un coté du miroir nous avons l'addition et la soustraction qui ont quelques propriétés partagées ou complémentaire :

— L'addition $123 + 456$ est pareil que $456 + 123$. On dis que l'addition est *commutative.*

— La soustraction $123 - 456$ n'est pas pareil que $456 - 123$. Mais les deux résultats sont *opposés.*

De l'autre coté du miroir la division aura le même rôle que la soustraction mais pour la multiplication :

— La multiplication 123×456 est pareil que 456×123.

— La division $123 \div 456$ n'est pas pareil que $456 \div 123$. Mais les deux résultats sont *inverses.*

La division de 456 par 123 reviens à se demander combien de paquet de 123 on peut former avec 456. Pour répondre à cette question on utilise la multiplication. On observe que $123 \times 3 = 369$ mais que $123 \times 4 = 492$. On peut donc mettre 3 paquet de 123 dans 456 mais pas 4 (car le résultat 492 est plus grand que 456).

Mais (oui il y a un "mais", sinon ça serait trop facile). Il y a un reste car 3 paquets de 123 font 369. On peut rajouter 87 pour arriver à 456. Ce 87 est le résultat de $456 - 123 \times 3$.

Au final

$$456 = 123 \times 3 + 87$$

On parle de *division euclidienne.*

Rappelons comment poser une division et divisons 2019 par 19.

On représente la situation dans un tableau

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline &&&&&\\ &&&&&\\ &&&&&\end{array}$$

On commence par la droite en se demandant combien de paquet de 19 on peut mettre dans 20.

$$\begin{array}{cccc|cc} \underline{2}&\underline{0}&1&9&1&9\\ \hline &&&&&\\ &&&&&\\ &&&&&\end{array}$$

La réponse est évidement 1

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline &&&&1&\\ &&&&&\\ &&&&&\end{array}$$

Sous le 20 on note le résultat de 19×1

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&\\ &&&&&\\ &&&&&\end{array}$$

On réalise la différence dans la partie gauche du tableau.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&\\ &1&&&&\\ &&&&&\end{array}$$

On *fait descendre* le prochain chiffre qui compose le nombre 2019 à savoir le 1 puisque le 2 et le 0 ont été traité.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&\\ &\underline{1}&\underline{1}&&&\\ &&&&&\end{array}$$

On se demande alors combien de paquet de 19 on peut mettre dans 11 et on note le résultat dans la partie droite du tableau.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&0\\ &1&1&&&\\ &&&&&\end{array}$$

Comme précédemment on note le résultat de 19×0 sous le 11 et on réalise la différence

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&0\\ &1&1&&&\\ &&0&&&\\ &1&1&&&\end{array}$$

On fait descendre le prochain chiffre

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&0\\ &1&1&&&\\ &&0&&&\\ &\underline{1}&\underline{1}&\underline{9}&&\end{array}$$

et on se demande combien de paquet de 19 on peut mettre dans 119. La réponse est 6.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2&0&1&9&1&9& \\ \hline 1&9&&&1&0&6\\ &1&1&&&&\\ &&0&&&&\\ &1&1&9&&& \end{array}$$

On note le résultat de 19×6 sous le 119

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2&0&1&9&1&9& \\ \hline 1&9&&&1&0&6\\ &1&1&&&&\\ &&0&&&&\\ &1&1&9&&&\\ &1&1&4&&& \end{array}$$

Et on fait la différence

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2&0&1&9&1&9& \\ \hline 1&9&&&1&0&6\\ &1&1&&&&\\ &&0&&&&\\ &1&1&9&&&\\ &1&1&4&&& \end{array}$$

Il n'y a plus de chiffre *à faire descendre*. Donc on s'arrête ici.

Au final $2019 = 19 \times 106 + 5$.

Des virgules ... mais pas trop !

La division euclidienne est une pierre angulaire de nombreux concepts et central en théorie des nombres. Nous n'allons pas prolonger dans cette direction. Nous allons nous diriger vers un nouvel ensemble de nombre : celui des nombres à virgules !

Reprenons une division $1234 \div 5$

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1&2&3&4&5&& \\ \hline 1&0&&&2&4&6\\ &2&3&&&&\\ &2&0&&&&\\ &&3&4&&&\\ &&3&0&&&\\ &&&4&&& \end{array}$$

Une fois qu'on arrive à la fin d'une division on peut la continuer en rajoutant une virgule et en faisant descendre des 0. Dans l'exemple précédent on poursuivrait de la manière suivante :

On commence par faire apparaitre une virgule et en faisant tomber un 0 :

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1&2&3&4&&5&& \\ \hline 1&0&&&&2&4&6,\\ &2&3&&&&&\\ &2&0&&&&&\\ &&3&4&&&&\\ &&3&0&&&&\\ &&&4&0&&& \end{array}$$

et on continue jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de reste (ou plus précisément que le reste devienne nul).

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 1&2&3&4&&5&&& \\ \hline 1&0&&&&2&4&6,&8\\ &2&3&&&&&&\\ &2&0&&&&&&\\ &&3&4&&&&&\\ &&3&0&&&&&\\ &&&4&0&&&&\\ &&&4&0&&&&\\ &&&&0&&&& \end{array}$$

On parle de *nombres décimaux* les nombres s'écrivant avec des virgules. La partie avant la virgule est appelée *la partie entière* et la partie après la virgule est *la partie décimale*. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Il y a des divisions qui sont plus facile que d'autre, exactement comme les multiplications. En effet nous avons vu que multiplier par 10 revenait à ajouter des 0 à droite.

Diviser par 10 reviens à déplacer la virgule à gauche d'un cran comme dans $123 \div 10 = 12,3$ ou dans $45,6 \div 10 = 4,56$.

On devine aisément que diviser par 100 revient à déplacer la virgule de deux crans et diviser par $1\underbrace{0...0}_{314}$ reviens à décaler de 314 cran vers la gauche. Bien sur lorsqu'il n'y a plus de chiffre à gauche on ne rajoute rien, et rien en mathématique c'est 0.

$$123 \div 100\ 000 = 0,001\ 23$$

De la même manière multiplier un nombre à virgule par 10 reviens à déplacer la virgule à droite comme dans $12,34 \times 10 = 123,4$ et dans $456,789 \times 100 = 45\ 678,9$.

Des fractions !

Il arrive parfois que les divisions ne s'arrête pas comme par exemple

$$\begin{array}{cccc|cccc}
4 & & & & 3 & & & \\
\hline
3 & & & & 1, & 3 & 3 & 3 \\
1 & 0 & & & & & & \\
 & 9 & & & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & 9 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 9 & & & & \\
 & & & 1 & & & &
\end{array}$$

Alors attention ! Jamais, ô grand jamais nous n'écrirons $4 \div 3 = 1,3333.....$ D'une part les points de suspension sont à bannir, car on ne sait jamais ce qu'ils peuvent cacher. D'autre part, il ne s'agit en aucun cas d'une égalité. A la limite on pourra écrire $4 \div 3 \simeq 1,333$ pour *a peu prés égale*.

Alors pourquoi se prendre la tête pour des centièmes de décimale ?

Pour la simple raison que les mathématiques sont une science exacte et que les approximation numérique sont davantage du monde physique que mathématique. D'un point de vue physique il est impossible qu'une voiture aille à une vitesse de 50 km/h. Car en math, $50 = 50$ mais pour la physique 49,99 km/h ... on est d'accord c'est 50km/h (même pour les radars). Bref, en math on est précis et exacte. On laisse l'approximation aux humains.

Bien acceptons cette magnifique réalité (qui n'existe donc aucunement dans la nature) et tentons de donner la valeur exacte de $4 \div 3$. Voici la réponse : $4 \div 3$.

On ne peut pas faire mieux que cette division, on la laisse donc en l'état. Bon pas tout à fait, on va plutôt noter $\frac{4}{3}$ et on va parler de *fraction* plutôt que de division.

D'ailleurs depuis le début nous aurions pu deviner que cela finirait de la sorte. Regarder de plus prés le symbole de division $\div$. Un point au dessus et en dessous d'une barre horizontale. C'est la notation générique d'une fraction.

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des fractions (cela viens de *quotiente* pour préciser qu'il s'agit en fait de division)

En fait, on va oublier $\mathbb{D}$

Oui ! Cet ensemble, $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres à virgule. Mais comme nous l'avons observer $1,5 = 15 \div 10 = \frac{15}{10}$. Donc du coup c'est plus du tout marrant de manipuler des nombres à virgules (puis c'est pas beau) !

Mais là on se retrouve avec un nouveau problème. Si on pose l'opération $3 \div 2$ on obtient $1,5$. On arrive alors à la drôle d'égalité :

$$\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1,5 = 15 \div 10 = \frac{15}{10}$$

Deux fractions, qui ont l'air différente... sont égales... oula, vite un théorème pour régler ce problème !

Les lois du monde des fractions

Dans une fraction, on appel *numérateur* le nombre du haut et *dénominateur* le nombre du bas. L'entier 4 est le numérateur de $\frac{4}{3}$ et 3 est le dénominateur.

Règle 0 : Pas par zéro ! C'est pas vraiment une règle, mais disons une erreur à ne surtout jamais commettre !

Il n'est pas possible de diviser par 0.

Diviser par 0 n'a pas de sens commun. D'un point de vu fractionnaire il n'est pas possible d'avoir de 0 au dénominateur (en bas).

Règle 1 : Par un ! Diviser par 1 reviens à ne rien faire (comme multiplier par 1). Avec une formule :

$$\frac{a}{1} = a$$

Règle 2 : Égalité de fraction. Deux fractions sont égales si il y a un même coefficient multiplicateur pour numérateur et dénominateur. Avec une jolie formule on a :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

Il suffit de remplacer a, b et k par n'importe quel nombre (sans mettre de 0 au dénominateur). L'important dans cette formule c'est de bien s'assurer qu'il s'agisse de multiplication et en aucun cas d'addition ou de soustraction. Ainsi $\frac{15}{10} = \frac{5 \times 3}{5 \times 2} = \frac{3}{2}$. On dis que le numérateur et le dénominateur on un *facteur commun*. Voici d'autre exemple d'égalité : $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{24} = \frac{120}{240}$, $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Règle 3 : Additionner c'est pas toujours possible mais en fait si ! Il n'est possible d'additionner des fractions uniquement lorsqu'elles ont le même dénominateur en additionnant leur numérateur. Précisément $\frac{11}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11+2}{3} = \frac{13}{3}$.

Il n'est pas possible d'additionner $\frac{11}{3}$ et $\frac{5}{6}$ car ce deux fractions n'ont pas le même dénominateur. MAIS on peut faire en sorte qu'ils aient le même pour les deux fractions en utilisant la règle 2. En effet si dans la fraction $\frac{11}{3}$ on multiplie en haut et en bas par 2 on arrive à $\frac{11}{3} = \frac{11 \times 2}{3 \times 2} = \frac{22}{6}$. Ainsi $\frac{11}{3} + \frac{5}{6} = \frac{22}{6} + \frac{5}{6} = \frac{22+5}{6} = \frac{27}{6}$.

Règle 4 : Le signe peut se balader !

$$\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Dans la pratique, on évite autant que possible les nombres négatifs au dénominateur. En particulier, on peut simplement soustraire les fraction en jouant avec le signe et en se ramenant à une addition : $\frac{11}{3} - \frac{5}{6} = \frac{11}{3} + \frac{-5}{6} = \frac{22}{6} + \frac{-5}{6} = \frac{22+(-5)}{6} = \frac{17}{6}$. Attention à ne pas oublier la règle des signes : $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Règle 5 : Multiplier c'est facile. Numérateur avec numérateur et dénominateur avec dénominateur ! Avec une jolie formule on a $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Par exemple : $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$.

Règle 6 : Pour inverser, on inverse ! L'inverse de la fraction $\frac{3}{2}$ est la fraction $\frac{2}{3}$. On a inverser numérateur et dénominateur. En particulier, en jouant avec la règle 1, l'inverse de 14 est $\frac{1}{14}$. Ne pas confondre avec l'opposé. L'opposé de 14 est -14.

Règle 7 : Diviser des divisions c'est multiplier ! Diviser par une fraction reviens à multiplier par son inverse. En formule :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

On peut en particulier, additionner ou multiplier les nombres à virgule en utilisant les règles précédentes accompagner des remarques sur la division par 10. Par exemple :

$$12,34+5,678 = \frac{1234}{100} + \frac{5\ 678}{1\ 000} = \frac{1\ 234 \times 10}{100 \times 10} + \frac{5\ 678}{1000} = \frac{12\ 340}{1\ 000} + \frac{5\ 678}{1\ 000} = \frac{12\ 340 + 5\ 678}{1\ 000} = \frac{18\ 018}{1\ 000} = 18,018$$

Des pourcentages ?

Un pourcentage n'est rien d'autre qu'une fraction avec 100 au dénominateur. Il faut "juste" retenir que lorsqu'en français on prononce le mot "de" cela correspond à une multiplication dans le monde des mathématiques. Ainsi 30% de 90€ correspond à l'opération $\frac{30}{100} \times 90$. Il suffit d'utiliser les lois du monde des fractions pour faire ce calcul :

$$\frac{30}{100} \times 90 = \frac{30}{100} \times \frac{90}{1} = \frac{30 \times 90}{100 \times 1} = \frac{2\ 700}{100} = \frac{27 \times 100}{1 \times 100} = \frac{27}{1} = 27$$

Ainsi si une paire de chaussure coûte 90€ mais que vous avez une réduction de 30% vous paierez $90-27 =$ 63€.

Si maintenant je revend cette paire de chaussure 30% plus chers que ce que je l'ai achetée, combien vais-je la vendre ?

Vous devinez bien que cette question en apparence facile cache un beau piège comme nous (les prof de math) en avons le secret !

Il serait prématuré de répondre le prix de 90€ a été raboter de 30% puis on le revend 30% de plus donc on reviens à 90€. Laissons nous porter par les calculs : le prix d'achat était de 63€ que vaut 30% de 63€ ? Réponse :

$$\frac{30}{100} \times 63 = \frac{30}{100} \times \frac{63}{1} = \frac{30 \times 63}{100 \times 1} = \frac{1\ 890}{100} = 18,9$$

Le nouveau prix de vente sera alors $63 + 18,9 = 81,9$.

Quelle est alors le pourcentage de perte entre le prix de vente sans réduction (90€) et le nouveau prix de vente (81, 9€) ?

La différence de prix est de 8, 1€ $(90 - 81,9)$. Le pourcentage associé est donc $\frac{8,1}{90} \times 100$ (la différence par rapport au prix initial que l'on multiplie par 100 pour avoir un pourcentage).

$$\frac{8,1}{90} \times 100 = \frac{\frac{81}{10}}{\frac{90}{1}} \times \frac{100}{1} = \frac{81}{10} \times \frac{1}{90} \times \frac{100}{1} = \frac{81 \times 1 \times 100}{10 \times 90 \times 1} = \frac{9 \times 9 \times 10 \times 10}{10 \times 9 \times 10} = \frac{9}{1} = 9$$

Ainsi la perte est de 9% du prix de départ. Attention les pourcentage sont des fractions et les règles d'addition et de soustractions sont très strictes !

Autre exemple : vous bénéficier de 1000€ de bourse. On vous annonce une augmentation de 20% en 2020 mais deux réductions successives en 2021 et 2022 de 9%. On vous souligne donc qu'une augmentation de 20% suivit de deux diminution de 9% font qu'au bout de trois ans, la bourse sera augmenter de $20 - 9 - 9 = 2\%$.

Réalisons les calculs !

En 2020 vous recevrez $1000 + \frac{20}{100} \times 1000 = 1200$€.

En 2021 vous recevrez $1200 - \frac{9}{100} \times 1200 = 1092$€.

En 2022 vous recevrez $1092 - \frac{9}{100} \times 1092 = 993.72$€.

Ce qui correspond au final à une diminution de $\frac{1000 - 993.72}{1000} \times 100 = 0,628\%$ de la bourse...

Puissances de 10

Comme nous l'avons remarqué au chapitre précédent, les points de suspension sont à bannir car ils peuvent cacher bien des problèmes.

Si vous avez été attentif aux précédent chapitre, nous avons tout de même utiliser ces fameux points de suspension : $3 \times 1\underbrace{0...0}_{314} = 3\underbrace{0...0}_{314}$.

Les puissances vont pouvoir régler ce problème !

La puissance se note en exposant et un petit peu plus petit et correspond au produit du nombre autant de fois que la puissance (l'exposant) est indiquée : $10^2 = 10 \times 10 = 100$.

Précisément $10^{machin} = 1\underbrace{0...0}_{machin}$.

Bien sur la notion de puissance a un sens lorsque l'exposant est un entier positif. Mais il est également possible de donner un sens aux puissances négatives en utilisant les fractions $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\ 000} = 0,001$.

Précisément $10^{-machin} = \frac{1}{10^{machin}} = \frac{1}{1\underbrace{0...0}_{machin}} = \underbrace{0,0...0}_{machin}1$.

Les puissances de 10 respectent quelques petites règles :

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$
- $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$
- $(10^n)^m = 10^{nm}$

Attention, les puissances sont en fait des multiplications cachées. il n'existe donc pas de formule permettant de calculer simplement $10^n - 10^m$!

Puissances de pas 10

En fait que ça soit 10 ou 42 ça ne change rien ! On peut jouer avec n'importe quel nombre x et y !

- $x^0 = 1$
- $x^1 = 10$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$. Il est important ici que ça soit le même nombre x. Par exemple $3^2 \times 3^7 = 3^9$ mais $3^2 \times 4^9 = ?$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$. Même remarque que précédemment : il faut que ça soit le même x.
- $(x^n)^m = x^{nm}$
- $(xy)^n = x^n \times y^n$

Voici un exemple d'utilisation de ces règles permettant de simplifier des expression rationnelle (c'est le mot pompeux pour parler de fraction) :

$$\frac{9^2 \times 10}{3^3 \times 8} = \frac{(3^2)^2 \times (2 \times 5)}{3^3 \times 2^3} = \frac{3^{2\times 2} \times (2 \times 5)}{3^3 \times 2^3} = \frac{3^4 \times 2^1 \times 5^1}{3^3 \times 2^3} = \frac{3^{4-3} \times 5^1}{2^{3-1}} = \frac{3^1 \times 5^1}{2^2} = \frac{15}{4} = 3,75$$

La réciproque du carré

Lorsque l'on met un nombre à la puissance 2 on dit qu'il est *au carré*.

La *racine carré* d'un nombre, est un nombre dont le carré vaut le nombre de départ.

Par exemple la racine carré de 9 est un nombre dont le carré vaut 9. Le nombre 3 répond à la question. On note la racine carré d'un nombre x par $\sqrt{x}$. Le symbole $\sqrt{}$ viens d'une déformation de la lettre r pour *radical* signifiant racine carré.

Autre exemple : $\sqrt{16} = 4$ car le carré de 4 donne 16. De même $\sqrt{25} = 5$.

Il n'est pas toujours possible de déterminer la racine carré d'un nombre. Par exemple que vaut $\sqrt{2}$? On cherche un nombre qui au carré, donne 2. On peut démontrer non sans peine qu'il n'existe aucun nombre fractionnaire égale à la racine carré de 2. Ce nombre $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction ! Il n'est pas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$. Il appartient à un ensemble plus grand : celui des nombres réels qui est noté $\mathbb{R}$. Il n'est pas possible de calculer $\sqrt{2}$ sans calculatrice.

La calculatrice donne $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ et plein d'autre chiffre après la virgule. Dans ce cas, on pourrait imaginer que $\sqrt{2}$ est un élément de $\mathbb{D}$, mais il s'avère que les décimales ne répondent à aucune règle de répétition. Il ne s'agit que d'une approximation numérique.

Comme il y a quelques règles avec les puissances (donc donc avec les carré), il y a quelques règles avec les racines carrées.

Tout d'abord, rappelons-nous la règle des signes. Quel est le signe de x^2 ? Si x est de signe + alors la règle des signes donne que $x^2 = x \times x$ est de signe +. Si x est de signe − alors $x^2 = x \times x$ est de signe + aussi.

A quoi correspond alors le nombre $\sqrt{-1}$? Par définition c'est un nombre dont le carré donne -1 c'est à dire un carré qui est de signe −... IMPOSSIBLE ! Car comme nous venons de le signaler, un carré est toujours de signe +.

Bon en fait, on verra biiiiiien plus tard que l'on peut donner un sens à la racine carré des nombres négatifs mais il faudra se placer dans un autre ensemble. Pour l'instant gardons en tête que la racine carré ne peut prendre que des nombres positifs !

Puisqu'une racine carré viens de la puissance 2, elle hérite de certaine règle avec des nombres réels positifs x et y :

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{x^2} = x$
- $\sqrt{x}^2 = x$
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
- $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Attention il n'existe pas de formule permettant de calculer simplement $\sqrt{x+y}$.

On peut combiner ces règles, et les règles des puissances, pour réaliser des calculs :

$$\sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \times 10^1} = \sqrt{10^2} \times \sqrt{10^1} = 10 \times \sqrt{10}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3}$$

La réciproque du cube ? Sérieusement ?

Lorsqu'un nombre est à la puissance 3, on dis qu'il est *au cube*.

La racine cubique d'un nombre x est un nombre, noté $\sqrt[3]{x}$ appelé la racine cubique de x, qui mit au cube donne x. Comme par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

N'ayez pas peur, ce n'est pas du tout au programme et il n'y aura aucune question sur la racine cubique. L'idée ici est de montrer que le 2 de la racine carré peut être remplacé par n'importe quel nombre entier et que les propriétés et formules restent globalement les même. Bref, aux exos !

4. Calculs littéraux

Expressions littérales

Voilà ça commence ! Les mathématiques où il y a plus de lettre que de chiffre. On parle d'une *expression littérale* (littérale = avec des lettres). Commençons avec un exemple simple : $E = x^2 + x$. On va rendre aux mathématiques leur lettre de noblesse (calcul littéral, lettre de noblesse... on pourrait croire que c'est fait exprès dis donc).

Les mathématiques ont de ça de difficile que pendant de nombreuse années, on faisait un peu ce qu'on voulait avec les nombres et expressions et du coup on arrivait à des résultats très étranges dont vous pourrez trouver de nombreux exemples sur le web (on parle souvent de paradoxe, mais c'est un abus de langage). On va commencer tout en douceur en précisant que dans l'expression E écrite plus haut, la variable c'est le x. Pour cela on va dire que l'expression E *dépend* de x pour cela on note

$$E(x) = x^2 + x$$

C'est une notation, il n'y a pas plus de cérémonie à faire. C'est comme ça, c'est tout. Donc que l'on écrive $E(x)$ ou $x^2 + x$ c'est la même chose.

Ah ! Le mot est lâché ! *Variable.* On ne vas pas s'aventurer a essayer de définir ce qu'est une variable (c'est vraiment très difficile, pour de vrai). C'est tout de même assez intuitif : une variable est une grandeur qui varie, qui peut prendre des valeurs différentes... Donc lorsque l'on écrit $E(x) = x^2 + x$, on précise que l'expression s'appelle E et que ce qui varie c'est x.

Evaluer

Reprenons l'exemple de l'expression $E(x) = x^2 + x$. Que se passe-t-il si on donne à x une valeur précise comme par exemple 5. Cela reviens à se demander ce qu'est $E(5)$. On dit que l'on évalue l'expression en $x = 5$. Tout simplement dans l'expression $E(x)$, il faut remplacer tous les x et uniquement les x par 5. On a ainsi $E(5) = 5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$.

On peut aussi calculer d'autre valeur de l'expression pour d'autre valeur de x. En prenant un papier et un crayon (et une gomme), vous pourrez vérifier que $E(1) = 2$, $E\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$, $E(2\sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2}$ etc...

Réduire

Prenons un autre exemple et considérons l'expression $F(x) = x^3 + 3x^2 + x - x^2 + 2x - 2x^3 - 5$.

Avant de commencer à parler de réduction il nous faut un peu de vocabulaire. Dans cette expression tout ce qui est séparé par des $+$ ou des $-$ s'appelle un *monôme* ou *terme*.

Ainsi $3x^2$ est un monôme de $F(x)$ comme $-x^2$ ou -5. Attention, on se souviendra que le signe d'un terme est celui qui est devant et non derrière lui (précisons : dans le sens de lecture européen).

Lorsque l'on considère un monôme, la puissance apparaissant s'appelle le *degrés* du monôme. Ainsi le degré du monôme $3x^2$ est 2, le degrés du monôme $2x$ est 1 (car $x = x^1$) et le degrés du monôme -5 est 0 car $-5 = -5 \times 1 = -5 \times x^0$.

La *réduction* d'une expression littérale consiste à "ranger" les monômes en fonction de leur degrés. Dans l'exemple de $F(x)$, nous pouvons commencer par utiliser ce que nous avions observé lorsque nous travaillions sur l'addition et la soustraction : on peut "bouger" les termes (rappelez-vous, ç'est la commutativité). Puis nous pouvons, lorsque les monômes sont de même degrés ne considérer que l'opération sur leur nombre.

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 + 3x^2 + x - x^2 + 2x - 2x^3 - 5 \\ &= x^3 - 2x^3 + 3x^2 - x^2 + x + 2x - 5 \\ &= -1x^3 + 2x^2 + 3x - 5 \\ &= -x^3 + 2x^2 + 3x - 5 \end{aligned}$$

A la seconde ligne nous avons déplacer les termes. A la troisième ligne nous avons fait les calculs sur les monômes de même degrés : $x^3 - 2x^3 = 1x^3 - 2x^3 = (1-2)x^3 = -1x^3 = -x^3$, le monôme de degrés

2 reste tout seul (le pauvre) comme le monôme de degrés 0 tandis que pour le monôme de degrés 1 : $x + 2x = 1x + 2x = (1+2)x = 3x$.

Bon en fait caché derrière tout ça c'est de la factorisation mais nous n'en parlerons pas ici... pour l'instant.

On garde en mémoire que *réduire* reviens à ranger les monômes de même degrés. Dans la pratique, on range également les monômes par ordre décroissant de degrés. C'est à dire que l'on préférera écrire $F(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ plutôt que $F(x) = 3x + 2x^2 - 5 - x^3$

Développer

Nous avons déjà un peu fait de développement lorsque nous avons réintroduit la posee de multiplication.

Commençons par des formules :

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Dans ces formules vous pouvez remplacer k, a, b, c et d par a peu près n'importe quoi : nombres, variables, expressions...

La notation $k(a+b)$ correspond à la multiplication de k par $(a+b)$. Nous aurions pu écrire $k \times (a+b)$ mais cette notation peu à la longue amener à incompréhension lié à notre inconnue préférée : x (à ne pas confondre donc avec $\times$). Lorsque l'on veut mettre l'accent sur la multiplication sans utiliser $\times$ on utilise le point. Dans ce cas il faut bien faire attention entre la notation 2.3 et $2,3$. Pour nous, le premier correspondra à la multiplication de 2 par 3 et le second au nombre décimale deux virgule trois. Nous éviterons de vous embrouiller avec ces notations (enfin c'est tentant quand même hi hi).

Un petit mot de vocabulaire. Dans l'expression $k(a+b)$, k et $(a+b)$ sont appelé des *facteurs* de l'expression.

Voici un exemple de développement : $67 \times 99 = 67(100-1) = 6700 - 67 = 6633$. Cette petite opération permet d'ailleurs d'en déduire une petite astuce de calcul sur la multiplication par 99 : on multiplie par 100, ce qui correspond à l'ajout de deux 0 à la fin puis on soustrait par le nombre. On vérifie facilement que si on replace le 67 par 482, 2019 ou n'importe quel autre nombre c'est la même règle. Justement appelons ce "n'importe quel nombre" x. On a alors

$$99x = x99 = x(100-1) = x100 - x1 = 100x - x$$

(on préfère mettre la variable à la fin du monôme).

A votre avis quelle est sont possibles règles de multiplication par 11, par 101 ou simplement par 9 ?

Développer s'accompagne assez souvent de *réduire* comme dans l'exemple suivant :

$$(2x-1)(3-x) = 2x.3 + 2x.(-x) - 1.3 - 1.(-x) = 6x - 2x^2 - 3 + x = -2x^2 + 7x - 3$$

On peut aussi combiner les développement comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}
\underbrace{3x(2x-1)}(x+1)(x-1) &= (3x.2x - 3x.1)(x+1)(x-1) \\
&= \underbrace{(6x^2-3x)(x+1)}(x-1) \\
&= (6x^2.x + 6x^2.1 - 3x.x - 3x.1)(x-1) \\
&= (6x^3 + 6x^2 - 3x^2 - 3x)(x-1) \\
&= \underbrace{(6x^3 + 3x^2 - 3x)(x-1)} \\
&= 6x^3.x + 6x^3.(-1) + 3x^2.x + 3x^2.(-1) - 3x.x - 3x.(-1) \\
&= 6x^4 - 6x^3 + 3x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 3x \\
&= 6x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x
\end{aligned}$$

Identités remarquables

Elles sont aux nombres de trois et formes un beau bouquet de formules :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Par exemple : $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + (3)^2$. N'ayez pas peur de mettre des parenthèses c'est gratuit ! En réduisant cette expression on arrive à $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$. De même $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.

Factoriser

Factoriser revient à trouver un facteur commun ou à identifier une identité remarquable. Inutile de donner des formules puisqu'il s'agit des formules précédentes à lire dans l'autre sens : au lieu de lire $k(a+b) = ka+kb$ il faut lire $ka + kb = k(a+b)$.

Factorisons l'expression $2x^3 - 3x^2$. Dans cette expression nous avons deux termes : $2x^3$ qui rappelons-le est $2.x.x.x$ et l'autre termes est $-3x^2 = -3.x.x$. Qu'y a-t-il en commun dans chacun des termes de cette expressions : $x.x$ c'est à dire x^2. Dans chacun des termes on va "retirer" $x.x$ et le placer une et une seule fois tout devant

$$2x^3 - 3x^2 = x^2(\text{exactement ce qu'il reste lorsqu'on retire } x^2)$$

Dans $2x^3$ lorsqu'on "retire" x^2 il reste simplement $2x$ car $2x^3 = 2.x.x.x = (2x)x^2$. De même $3x^2 = (3)(x^2)$. Donc sans les x^2 on arrive à $x^2(2x-3)$. BOUM ! Voila une factorisation !

Autre exemple : $x(x-1) - 3x(x+1) - 6x$. Cette expression est composé de trois terme. Dans chacun des terme il y un x que l'on peut mettre en facteur. On arrive alors à la factorisation suivante :

$$\begin{aligned}
x(x-1) - 3x(x+1) - 6x &= x((x-1) - 3(x+1) - 6) \\
&= x(x - 1 - 3x - 3 - 6) \\
&= x(-2x - 10) \\
&= x((-1).2x + (-1).10) \\
&= x.(-1).(2x + 1 \\
&= -x.(2x + 10)
\end{aligned}$$

Factorisons $4x^2 - 9$. Cette expression est composée de deux termes : $4x^2$ et -9. Il n'est pas évident de trouver un facteur commun à chacun de ces termes. il faut alors chercher du coté des identitées remarquable. On observe en effet que $4x^2 = 4.x.x = 2.2.x.x = 2.x.2.x = (2x)^2$ et naturellement $9 = 3^2$ ainsi $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$ ce qui donne, d'après la dernière identité remarquable : $(2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$.

5. Équations

Un problème

> Vous êtes le gérant d'un petit commerce de chaussure et vous voulez "profiter" des soldes en vendant pendant les soldes une paire de chaussure à 30€ en faisant croire que le prix à bénéficier d'une réduction de 15%. A quel prix doit être affichée la paire de chaussure non soldée pour que sa valeur soldée de 15% soit de 30€ ?

Tous les problèmes se résolvent en suivant le schéma suivant :

1. Identifier et nommer la ou les inconues.
2. Modéliser le problème pour *mettre* en équation.
3. Résoudre le problème.
4. Conclure en répondant à la question posée.

Suivons ce schéma pour notre problème.

1. Notons x le prix de la paire de chaussure non soldée.
2. Une baisse de 15% d'un prix de x euros correspond à l'opération $x - \frac{15}{100}x$. Suite à cette diminution, la paire coûte 30€ ainsi $x - \frac{15}{100}x = 30$.
3.

$$\begin{aligned}
x - \frac{15}{100}x = 30 &\iff x\left(1 - \frac{15}{100}\right) = 30 \\
&\iff x\left(\frac{1}{1} - \frac{15}{100}\right) = 30 \\
&\iff x\left(\frac{1 \times 100}{1 \times 100} - \frac{15}{100}\right) = 30 \\
&\iff x\left(\frac{100}{100} - \frac{15}{100}\right) = 30 \\
&\iff x\left(\frac{100}{100} - \frac{15}{100}\right) = 30 \\
&\iff x\left(\frac{100 - 15}{100}\right) = 30 \\
&\iff x.\frac{85}{100} = 30 \\
&\iff x\frac{17}{20} = 30 \\
&\iff x\frac{17}{20} \times \frac{20}{17} = 30 \times \frac{20}{17} \\
&\iff x\frac{17 \times 20}{17 \times 20} = 30 \times \frac{20}{17} \\
&\iff x\frac{1}{1} = 30 \times \frac{20}{17} \\
&\iff x.1 = 30 \times \frac{20}{17} \\
&\iff x = 30 \times \frac{20}{17} \\
&\iff x = \frac{30}{1} \times \frac{20}{17} \\
&\iff x = \frac{30 \times 20}{1 \times 17} \\
&\iff x = \frac{600}{17}
\end{aligned}$$

4. Le prix de vente non soldé à afficher est de $\frac{600}{17}$ €, ce qui correpond à environ $35,30$€.

Bon alors dans cet exemple on a vraiment pris notre temps pour détailler toutes les étapes du calcul, il est bien évidement permis d'aller plus vite et de sauter des étapes. Quelques informations supplémentaires :

— La double flèche $\Longleftrightarrow$ est un symbole mathématiques pour dire *est pareil que* ou plus savament *si et seulement*.

— Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs possibles de la ou des inconnues faisant que l'égalité soit vrai. Cela signifie dans notre exemple que si on évalue l'expression $x - \frac{15}{100}x = 30$ pour $x = 18$ alors cette égalité sera fausse (ça fini par $15,3 = 30$ ce qui est bien sûre faux). Tandis que si l'on évalue pour $x = \frac{600}{17}$ alors on a bien 30 à gauche et à droite de l'égalité.

— Lorsque l'on fait une opération d'un coté de l'égalité, on doit la faire de l'autre coté. Comme dans l'exemple lorsque nous avons multiplié par $\frac{20}{17}$; nous l'avons fait des deux cotés.

Plus de problème, juste une équation

Considérons l'équation $3x - 4 = 19$. La résoudre c'est trouver l'inconnue qui est ici x. Trouver l'inconnue c'est l'isoler seul d'un coté de l'égalité. On garde en mémoire la règle fondamentale de la résolution de tel équation : si on fait une opération d'un coté de l'égalité on la fait ausi de l'aure coté et on arrive alors :

$$\begin{aligned}
3x - 4 = 19 &\Longleftrightarrow 3x - 4 + 4 = 19 + 4 \\
&\Longleftrightarrow 3x = 23 \\
&\Longleftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{23}{3} \\
&\Longleftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{23}{3} \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

Et voilà, la solution de l'équation est $\frac{23}{3}$.

Encore un exemple où l'on va développer et réduire avant de résoudre :

$$\begin{aligned}
x(x-1) + x^2 = 2x^2 + x + 1 &\Longleftrightarrow x^2 - x + x^2 = 2x^2 + x + 1 \\
&\Longleftrightarrow x^2 - x + x^2 - 2x^2 - x = 2x^2 + x + 1 - 2x^2 - x \\
&\Longleftrightarrow -2x = 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{1}{-2} \\
&\Longleftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{-2} \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{1}{-2} \\
&\Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

L'unique solution de cette équation est $-\frac{1}{2}$.

Juste une équation bizarre

Résolvons l'équation $x(x+2) + x^2 + 2 = 2x^2 + 2x + 2$.

$$\begin{aligned}
x(x+2) + x^2 + 2 = 2x^2 + 2x + 2 &\Longleftrightarrow x^2 + 2x + x^2 + 2 = 2x^2 + 2x + 2 \\
&\Longleftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 2x^2 + 2x + 2 \\
&\Longleftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 - 2x^2 - 2x = 2x^2 + 2x + 2 - 2x^2 - 2x \\
&\Longleftrightarrow 2 = 2
\end{aligned}$$

Ah ! L'inconue à disparu... mais qu'à cela ne tienne. Résoudre une équation revient à trouver tous les x tel que $2 = 2$. Si $x = 18$ est-ce que $2 = 2$? Oui ! Si $x = \dfrac{2019}{\sqrt{1+\sqrt{2020}}}$ est-ce que $2 = 2$? Oui ! Bref quelque soit la valeur que l'on prend pour x alors $2 = 2$. Donc pour n'importe quelle valeur de x nous avons bien que $2 = 2$. C'est à dire que pour n'importe quelle valeur de x nous avons bien $x(x+2)+x^2+2 = 2x^2+2x+2$. Evaluons cette expression pour par exemple, $x = 5$. On a à gauche de l'égalité $5(5+2)+5^2+2 = 5.7+25+2 = 35+25+2 = 62$. Tandis qu'à droite de l'égalité on arrive à $2.5^2+2.5+2 = 2.25+10+2 = 50+10+2 = 62$. Incroyable ! Du coup tous les nombres réels sont solutions. On dit que $\mathbb{R}$ est l'ensemble solution de cette équation.

Une autre équation bizarre

Résolvons l'équation $x(x+2)+x^2+1 = 2x^2+2x+2$.

$$\begin{aligned}
x(x+2)+x^2+1 = 2x^2+2x+2 &\iff x^2+2x+x^2+1 = 2x^2+2x+2 \\
&\iff 2x^2+2x+1 = 2x^2+2x+2 \\
&\iff 2x^2+2x+1-2x^2-2x = 2x^2+2x+2-2x^2-2x \\
&\iff 1 = 2
\end{aligned}$$

Bon, l'inconnue a encore disparue... Mais c'est la même question qui se pose : si $x = 18$ est-ce que $1 = 2$? Non ! Si $x = \dfrac{2019}{\sqrt{1+\sqrt{2020}}}$ est-ce que $1 = 2$? Non ! Bref quelque soit la valeur que l'on prend pour x il ne sera jamais vrai que $1 = 2$. Cette équation n'a pas de solution. On dit que son ensemble solution est vide. On note $\varnothing$ l'ensemble vide.

Équation au produit nul

Les équations qui font peur comme $(x-1)(2x+4) = 0$ on une faiblesse remarquable : elles sont des facteurs de 0. Lorsque l'on regarde les tables de multiplication le seul moyen qu'un résultat donne 0 c'est que l'un de ses facteurs soit lui même 0. Cela signifie que $(x-1)(2x+4) = 0$ est équivalent à soit $x-1 = 0$ soit $2x+4 = 0$. On vérifie sans trop souffrir que la première équation a pour solution 1 et la seconde -2. Du coup l'équation $(x-1)(2x+4) = 0$ a deux solutions 1 et -2. On note $\{-2; 1\}$ l'ensemble solution.

De la même manière résolvons l'équation $4x - x(2x+4) = x$. Commençons pas faire apparaitre un 0 en faisant $-x$ des deux cotés de l'égalité pour arriver à $4x-x(2x+4)-x = 0$. Mettons un peu d'ordre en réglant le cas des x pour aboutir à $3x-x(2x+4) = 0$. Il ne s'agit pas encore d'une équation produit nul. On a bien le "nul" avec l'apparition du 0 mais pas le "produit". Pour y arriver nous allons mettre x en facteur dans l'expression de droite. On arrive donc à $x(3-(2x+4)) = 0$ ce qui équivaut à $x(-2x-1) = 0$. A présent il s'agit d'une équation produit nul qui se résout en soit $x = 0$ soit $-2x-1 = 0$ c'est à dire $x = -\dfrac{1}{2}$.

Bref, la factorisation est un outil très puissant de la résolution des équations.

Traitons un dernier exemple :

$$\begin{aligned}
(6x-3)(x+18)-(6x-3)(7x+1)+2(x+1)(6x-3) = 0 &\iff \underbrace{(6x-3)}(x+18)-\underbrace{(6x-3)}(7x+1)+2(x+1)\underbrace{(6x-3)} = 0 \\
&\iff (6x-3)\left((x+18)-(7x+1)+2(x+1)\right) = 0 \\
&\iff (6x-3)\left(x+18-7x-1+2x+2\right) = 0 \\
&\iff (6x-3)\left(-4x+19\right) = 0
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à soit $6x-3 = 0$ c'est à dire $x = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, soit $-4x+19 = 0$ c'est à dire $x = \dfrac{-19}{-4} = \dfrac{19}{4}$. En conclusion l'ensemble solution de cette équation est $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{19}{4}\right\}$.

6. Systèmes d'équations

Un problème

> En vous rendant à la boulangerie lundi matin vous achetez deux croissants et trois pains au chocolat que payez au total $5,60$€. Mardi matin, vous prenez un pain au chocolat et quatre croissants et vous payez $5,20$€. Mercredi vous achèterez deux croissants et deux pains au chocolat. Combien paierez-vous ?

Comme pour les équations avec une inconnue, le schéma de résolution est le même : identifier les inconnues, mettre en équation, résoudre puis conclure.

La différence ici est qu'il n'y a pas une mais deux inconnues : le prix du croissant que nous noterons x et le prix du pain au chocolat que nous noterons y. Les informations sur le lundi nous indique que $2x+3y=5,60$ tandis que les informations sur le mardi donnent $y+4x=5,20$. Nous sommes ici en présence d'un *système* de deux équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 5,60 \\ 4x & + & y & = & 5,20 \end{array}\right.$$

Bien que cela ne soit pas du tout un indispensable pour comprendre les méthodes de résolution que nous allons aborder, il est préférable d'adopter tout de suite les bons réflexe : aligner les inconnues correctement lorsque l'on écrit le système !

Détaillons à présent les trois différentes méthodes de résolution d'un tel système

Méthode de substitution

Dans cette méthode on choisit (en fonction de notre plaisir) une équation et une variable et on substitue dans l'autre équation.

Dans notre exemple, choisissons la seconde équation et isolons y. On a $4x+y=5,20$ c'est à dire $y=5,20-4x$. Nous venons d'exprimer y en fonction de x (nous reparlerons de *fonction* plus en détail très vite !). La première équation est $2x+3y=5,60$ sauf que nous venons d'observer que $y=5,20-4x$, remplaçons alors y par $5,20-4x$ dans cette seconde équation :

$$2x+3y=5,60 \iff 2x+3(5,20-4x)=5,60 \iff 2x+15,60-12x=5,60 \iff -10x=-10 \iff x=1$$

Nous avons ainsi trouvé x et puisque $y=5,20-4x$ alors $y=5,20-4.1=1,20$. Ainsi le croissant coute 1€ et le pain au chocolat $1,20$€.

Nous aurions pu choisir une autre équation ou une autre variable. Nous n'aurions pas les même calcul mais bien le même résultat.

Pour l'exemple : prenons la première équation et exprimons x en fonction de y. Nous avons $2x+3y=5,60$. Cela équivaut à $2x=5,60-3y$ soit en divisant par deux des deux cotés $x=\frac{2x}{2}=\frac{5,60-3y}{2}$.

A présent nous avons $4x+y=5,20$ donc en remplaçant la valeur de x par l'expression trouvé plus haut nous arrivons à

$$4x+y=5,20 \iff 4\left(\frac{5,60-3y}{2}\right)+y=5,20 \iff 11,20-6y+y=5,20 \iff -5y=-6 \iff y=1,20$$

Puis en substituant cette valeur dans la formule $x=\frac{5,60-3y}{2}$ on (re)trouve $x=\frac{5,60-3.1,20}{2}=1$.

On note $\{(1;1,20)\}$ l'ensemble solution. Attention aux notations : $\{\}$ pour l'ensemble solution et $(...;...)$ pour le *couple* solution.

L'inconvénient de cette méthode est que si on se trompe dans le calcul d'une inconnue alors la seconde sera aussi fausse. La prochaine méthode va régler ce problème.

Méthode de combinaison ou méthode de Gauss

Carl Gustav Friedrich Gauss (1777-1855) est un mathématiciens allemand particulièrement prolifique. Si vous prenez quelques minutes pour découvrir sa biographie (n'importe où sur le web) vous prendrez vite conscience de la profondeur du personnage par le nombre impressionnant de résultat qui lui sont du. Son surnom en est la preuve indirect : le prince des mathématiques.

Gauss s'intéressait non pas à résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues mais des systèmes de 487 équations à 487 inconnues et la méthode que nous allons détailler ici s'applique dans un cadre beaucoup plus générale. Nous ne saurions que trop vous conseiller de maîtriser cette technique qui ne sera qu'une révision lorsque, dans vos poursuites d'étude, vous rencontrerez des systèmes de 3, 4 voir plus d'inconnues et d'équations. Bref, soyez attentif mais ne paniquer pas, nous n'irons pas plus loin que deux équations à deux inconnues.

Le principe de la méthode de Gauss est non pas de manipuler les inconnues mais directement les lignes. Le but étant de trouver un moyen, en manipulant les lignes, de faire disparaitre une inconnue pour revenir à une simple équation à une (simple) inconnue.

Reprenons notre exemple

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 5,60 \\ 4x & + & y & = & 5,20 \end{cases}$$

et multiplions la première ligne par 2 : $2(2x{+}3y) = 2(5,60)$. Jusque là pas de problème, nous avons fait une opération des deux cotés de l'égalité. Nous avons respecter les lois du monde mathématiques. Développons : $4x + 6y = 11,20$. Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} 4x & + & 6y & = & 11,20 \\ 4x & + & y & = & 5,20 \end{cases}$$

L'intérêt de cette opération est qu'a présent dans les deux équations nous avons la même quantité de x. Soustrayons à la première équation la seconde

$$(4x + 6y) - (4x + y) = (11,20) - (5,20) \Longleftrightarrow 4x + 6y - 4x - y = 6 \Longleftrightarrow 5y = 6 \Longleftrightarrow y = 1,20$$

Par cette astuce de calcul nous nous sommes ramené à une équation à une inconnue.

A ce niveau là, nous pouvons prendre n'importe laquelle des deux équation et substituer $1,20$ à y pour trouver x mais si nous avons fait une erreur de calcul sur y alors nous aurons une erreur de calcul sur x. A la place nous pouvons reprendre le problème depuis le début et essayer de multiplier les lignes par un nombre permettant de faire disparaitre cette fois le y. Multiplions la seconde ligne par 3 :

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 5,60 \\ 12x & + & 3y & = & 15,60 \end{cases}$$

Réalisons la différence des deux lignes pour arriver à

$$(2x + 3y) - (12x + 3y) = 5,60 - 15,60 \Longleftrightarrow 2x + 3y - 12x - 3y = -10 \Longleftrightarrow -10x = -10 \Longleftrightarrow x = 1$$

Nous venons donc de trouver la valeur de x indépendamment de la valeur trouvée pour y.

Formalisons un peu tout cela. Considérons un système

$$\begin{cases} ax & + & by & = & \alpha \\ cx & + & dy & = & \beta \end{cases}$$

Ceci est la forme générale d'un système. Attention, même s'il n'y a aucune valeur, les inconnues sont x et y. Dans la pratique vous connaissez a, b, c, d, α et β (d'ailleurs connaissez-vous ces deux dernière lettres ? Il s'agit des deux première lettre de l'alphabet grec. Le *alpha* noté donc α équivalent de la lettre *a* et le *beta* β correspondant au *b*. D'ailleurs le mot *alphabet* est la concaténation de ces deux premières lettres).

Notons L_1 la première ligne et L_2 la seconde ligne alors en faisant $cL_1 - aL_2$ on obtient une équation à une inconnue en x. L'opération $dL_1 - bL_2$ permet quant à elle d'aboutir à une équation à une inconnue en x.

Méthode par les formules ou méthode de Cramer

Puisque nous sommes avec des formules, poursuivons par celle déterminer par Gauss mais qui avaient été trouvée bien avant par un mathématicien suisse du nom de Gabriel Cramer (1704-1752).

Sans plus de cérémonie les formules :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & \alpha \\ cx & + & dy & = & \beta \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{\alpha d - b\beta}{ad - bc}, \quad y = \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc}$$

Dans notre exemple nous avons $x = \dfrac{5,60.1 - 3.5,20}{2.1 - 3.4} = \dfrac{-10}{-10} = 1$ et $y = \dfrac{2.5,20 - 5,60.4}{2.1 - 3.4} = \dfrac{-12}{-10} = 1,20$.

Ces formules font apparaitre un problème : que se passe-t-il lorsque le dénominateur $ad - bc$ est nul ? Ce cas particulier peut avoir deux issue que nous allons détailler sur des exemples dans la dernière partie.

Deux cas particuliers

Considérons le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array}\right.$$

La méthode de Cramer ne s'applique pas puisque le dénominateur de la formule $ad - bc = (2)(2) - (-4)(-1) = 0$. Appliquons la méthode de Gauss et multiplions la première ligne par 2

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & - & 2y & = & 2 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array}\right.$$

Si on additionne les deux lignes on arrive à $0 = 0$. Dans ce cas il n'y a pas de problème et il y a donc une *infinité* de solution. Nous n'entrerons pas plus dans le formalisme de la solution.

Même problème avec une petite différence :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -1 \end{array}\right.$$

En raisonnant exactement de la même manière (multiplier la première ligne par 2 et faire la somme) on arrive à $0 = 1$ et ça c'est impossible il n'y a donc aucune solution au problème.

En définitive, lorsque $ad - bc = 0$ il y a soit une infinité de solution si on tombe sur une trivialité (comme $0 = 0$, $15 = 15$, ...) soit aucune solution si on trouve une absurdité (comme $0 = 1$ etc).

7. Polynômes de degrés 2

Polynôme

Nous avons déjà rencontré les polynômes, plus exactement les monômes lorsque que nous cherchions à factoriser. Précisons cela avec une définition :

Un monôme est une expression littérale de la forme

$$ax^n$$

où x est l'inconnue, a le coefficient du monôme et l'entier n, toujours positif, la puissance du monôme.

Par exemple

1. L'expression $3x^2$ est monôme de puissance 2.
2. Le coefficient du monôme $\sqrt{2}x^7$ est $\sqrt{2}$.
3. L'expression $x^2 + 3$ n'est pas un monôme.

Sur ce dernier exemple, on observe que x^2 est un monôme de puissance 2 et de coefficient 1 et le nombre 3 peut lui aussi être vu comme un monôme. En effet en jouant un peu avec lui on peut dire que $3 = 3x^0$ de sorte que 3 est un monôme de coefficient 3 et de puissance 0.

- Une expression composée d'une somme de monôme est appelée un *polynôme*.
- La plus grande puissance des monômes composant un polynôme est appelée le *degrés* du polynomes
- Le coefficient du monôme de puissance 0 est appelée le coefficient (ou terme) *constant*. Il peut être nul.
- Le coefficient non nul du monôme de plus grande puissance est appelée le coefficient (ou terme) *dominant*.

Par exemple :

1. Le polynôme $3x^2 - 4x + 1$ est un polynôme de degrés 2 de coefficient constant 1 et de coefficient dominant 3.
2. Le polynôme $3x$ est de degré 1, de coefficient constant nul et de coefficient dominant nul.
3. L'expression $\sqrt{x} + 1$ n'est pas polynôme

Le but de ce chapitre est de percer le secret des polynômes de degrés 2 !

Le discriminant

Nous souhaitons résoudre l'équation $3x^2 + 3x - 6 = 0$. Pour cela nous allons essayer de nous ramener à des équations de degrés 1.

Pour commencer on factorise le polynôme par 3 : $3x^2 + 3x - 6 = 0 \Longleftrightarrow 3\left(x^2 + x - 2\right) = 0$. Ce produit de facteur est nul si et seulement si $x^2 + x - 2 = 0$. On tripote un peu l'expression (cela s'appelle la forme *canonique* - pour nous on dira seulement *une idée super astucieuse*) :

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 2 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \quad \text{Identité remarquable} \\
&= (x - 1)(x + 2)
\end{aligned}$$

Ainsi résoudre l'équation $3x^2 + 3x - 6 = 0$ reviens à résoudre l'équation $(x - 1)(x + 2) = 0$ qui est une bien gentille équation au produit nul. On vérifie aisément que $\{-2; 1\}$ est l'ensemble solution.

Faisons des généralité avec de belles formules : résolvons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On supposera que $a \neq 0$ (sinon ce n'est pas un polynôme de degré 2).

Pour commencer on factorise le polynôme par a, ce qui est permit puisque $a \neq 0$:

$$ax^2+bx+c=0 \iff a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

Puisque $a \neq 0$ ce produit de facteur est nul si et seulement si $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. On utilise *une idée super astucieuse* pour observer que $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a} \\ &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2} \\ &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

où on a posé $\Delta = b^2-4ac$

Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$. Il est donc impossible de résoudre $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

Si $\Delta = 0$ alors l'équation deviens $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Or ce carré est nul si et seulement si $x+\frac{b}{2a}=0$ soit encore si $x=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$. On identifie l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ à l'identité remarquable $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ où $A=\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ et $B=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le $\pm$ viens du fait que $\sqrt{a^2}$ vaut a si $a>0$ et $-a$ sinon. Le signe dépend du signe de a. Nous allons traiter le cas où a est positif. Le cas $a \leqslant 0$ se traitant de la même manière (et aboutira aux mêmes solutions). Ainsi $B=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Ainsi résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre $\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$. Or ce produit de facteur est nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nul ; c'est à dire soit $x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ c'est à dire $x=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ c'est à dire $x=-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

En math, rien de magique ou de sorti du chapeau (mais il est vrai que cette science est gorgée d'*idées astucieuses*). Tout se démontre, se prouve. Nous venons là de faire une démonstration d'un théorème. Le "théorème" c'est ce qui résume tout le charabia qu'on viens d'écrire. Connaitre la *démonstration* c'est connaitre le pourquoi du comment, car encore une fois, rien de magique tout est logique. Si certain point vous ont échappé dans cette démonstration, pas d'inquiétude, c'est normal. A la fin de l'année quand vous relirez ces lignes elles seront d'une simplicité écœurante. Pour l'instant ce qu'il faut retenir c'est ce que nous venons de démontrer le théorème suivant.

Théorème 7.0.1

Soient ax^2+bx+c un polynôme réel de degré 2 et Δ son discriminant.

Si $\Delta < 0$. L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réel.

$$S=\varnothing$$

Si $\Delta = 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

Si $\Delta > 0$. L'équation $ax^2+bx+c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$S = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

On a même démontré un peu plus [2] :

Corollaire 7.0.2

Soient $ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.

Si $\Delta < 0$. Le polynôme ne se factorise pas en produit de polynôme à coefficient réel.

Si $\Delta = 0$. Le polynôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Si $\Delta > 0$. Le polynôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Deux petits exemples pour comprendre la mise en pratique.

1. Factorisons, si possible, le polynôme $3x^2 - 9x + 6$. Commençons par calculer son discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4.(3).(6) = 81 - 72 = 9$. Puisque $\Delta > 0$, nous avons deux solutions $x_1 = \frac{-(-9)+\sqrt{9}}{2.(3)} = \frac{9+3}{6} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-9)-\sqrt{9}}{2.(3)} = \frac{9-3}{6} = 1$. D'après le corolaire on en déduit que

$$3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$$

ce qui peut se vérifier en développant l'expression de droite.

2. Déterminons toute les solutions de l'équation $x^3 - x = 0$. Nous commençons par observer qu'il est possible de factoriser par x pour avoir $x^3 - x = x(x^2 - 1)$. Factorisons le polynôme de degrés 2 $x^2 - 1$. On a $\Delta = (0)^2 - 4.(1).(-1) = 4$. Nous avons donc, d'après le cours, deux solutions $x_1 = \frac{-(0)+\sqrt{4}}{2.(1)} = 1$ et $x_2 = \frac{-(0)-\sqrt{4}}{2.(1)} = -1$. Ceci permet de conclure que $x^2 - 1 = 1(x-1)(x+1)$ (ce que nous aurions pu obtenir en utilisant une identité remarquable). Finalement l'équation $x^3 - x = 0$ deviens l'équation produit nul $x(x-1)(x+1) = 0$ ce que nous pouvons résoudre rapidement pour conclure que l'ensemble solution de cette équation est $\{-1; 0; 1\}$.

2. Lorsqu'un résultat se déduit d'un théorème on parle d'un *corollaire*

8. Inéquations

Symboles

Voici venir quatre symboles (mais vous les connaissez déjà) : $<$, $\leqslant$, $>$ et $\geqslant$ qui se prononce respectivement strictement plus petit (ou juste plus petit), plus petit ou égale, strictement plus grand (ou juste plus grand) et plus grand où égale.

Ces symboles servent à comparer les nombres réels : 3 est plus grand que 1. Comme c'est trop facile à comprendre pour le commun des mortels, on brouille la lecture de cette phrase en écrivant $3 > 1$. D'ailleurs 1 est plus petit que 3, en brouillé ça fait $1 < 3$. Tiens on a aussi que 1 et plus petit ou égale à 3 (si si, puisqu'il est écrit plus petit <u>ou</u> égale) donc $1 \leqslant 3$.

Infinis

Lorsqu'on travail avec les nombres réel, il est d'accoutumé de les voir sur une droite. On parle d'ailleurs de l'axe des nombres réel. Comme n'importe quelle droite elle est *infini*, c'est à dire elle n'a pas de fin. C'est même pire elle n'a pas de début. On a deux infini : l'infini du début des nombres et l'infini de la fin des nombres.

Puisque les nombres réels sont rangés du plus petit au plus grand, l'infini du début, le plus petit des nombres est noté $-\infty$ (prononcé moins l'infini) et le plus grand de tous les nombres réels est noté $+\infty$ (prononcé plus l'infini). Ce drôle de petit symbole pour symboliser l'infini est bien un 8 couché.

Symbole... encore, mais au singulier !

Pour pouvoir aller un peu plus loin dans le formalisme mathématiques nous allons avoir besoin d'un symbole. Il s'agit de $\in$. Dès que vous rencontrez ce *e* rond, il vous faut prononcer *appartenant à* ou *appartient à* ou plus vulgairement *dans*.

Ainsi écrire $\sqrt{\dfrac{-1}{3-2019}} \in \mathbb{R}$ reviens à lire *l'opposé de la racine carré de l'inverse de la différence de* 3 *par* 2019 *est dans l'ensemble des nombres réels.* Avouez qu'il est quand même plus confortable d'écrire $\sqrt{\dfrac{-1}{3-2019}} \in \mathbb{R}$

Intervalles

Maintenant que nous avons plein d'outils mathématiques, nous pouvons parler d'intervalles.

Les intervalles permettent de préciser des morceaux de l'axe des nombres réels. Introduisons cette notion sur un exemple : l'intervalle $[2;3]$ représente tous les nombres réels compris entre 2 et 3.

N'importe quel nombre, appelons x ce *n'importe quel nombre* ; donc n'importe quel nombre x dans l'intervalle $[2;3]$ est plus petit ou égale à 3 mais aussi supérieur ou égale à 2. Qu'est-ce que c'est long tout ce charabia. Écrivons cela avec nos nouveaux super pouvoir... pardon ; notations, nos nouvelles notations : dire que $x \in [2;3]$ reviens à dire que $x \leqslant 3$ et $x \geqslant 2$. On peut d'ailleurs faire plus condensé pour rendre tout cela encore plus savant : $2 \leqslant x \leqslant 3$. Jusque là pas de problème non ! ?

Dire $\sqrt{123} \in \left[\dfrac{1}{10^{-1}};12\right]$ (n'ayez pas peur !) reviens exactement à dire $\dfrac{1}{10^{-1}} \leqslant \sqrt{123} \leqslant 12$.

Ça serait beau si ça s'arrêtait là mais malheureusement, ça se complique parce que comme nous l'avons vu, il y a des symboles pour dire *strictement* plus grand et *strictement* plus petit mais aussi les infinis.

Lorsque l'on a un [2 avec les crochets de l'intervalle dans le nombre alors cela signifie que l'on peut toucher le 2 (il est prit par le [). De la même manière dans la notation 17] le crochet de l'intervalle est dirigé vers le nombre pour signaler que l'on peut toucher le 17. A cela s'oppose des notations comme]2 où les crochets de l'intervalle ne sont pas dirigé vers le nombre. Cela traduit une inégalité large.

Ah oui ! Il est bien sûre impossible de toucher l'infini (dans notre monde pour l'instant, quand vous serez plus grand vous verrez que les mathématiciens ont transcendé la réalité, mais ça c'est complètement hors de propos). Donc des intervalles du genre $[2;+\infty]$ n'ont (pour le moment) aucun sens !

En résumé :

Intervalle	Inégalité
$x \in [2;3]$	$2 \leqslant x \leqslant 3$
$x \in]2;3]$	$2 < x \leqslant 3$
$x \in [2;3[$	$2 \leqslant x < 3$
$x \in]2;3[$	$2 < x < 3$
$x \in [2;+\infty[$	$x \geqslant 2$
$x \in]2;+\infty[$	$x > 2$
$x \in]-\infty;3]$	$x \leqslant 3$
$x \in]-\infty;3[$	$x < 3$
$x \in]-\infty;+\infty[$	$x \in \mathbb{R}$

L'union c'est un *OU*

Imaginons que l'on a un x qui se balade sur la droite des nombres réels et que nous savons que $x \leqslant 3$ ou $x > \sqrt{123}$. En français cela fait que le x doit être plus petit ou égale à 3 ou alors strictement plus grand que $\sqrt{123}$. Le premier intervalle est $]-\infty;3]$ et le second $]\sqrt{123};+\infty[$. Mais quel est l'intervalle traduisant une union ? Simplement $]-\infty;3]$ ou $]\sqrt{123};+\infty[$. Pour faire plus savant on utilise un symbole pour dire *OU*, c'est $\cup$ qu'il faut prononcer en général *union* (mais ce n'est pas faux de dire *OU* non plus) et on note alors $]-\infty;3]\cup]\sqrt{123};+\infty[$.

Il arrive parfois que l'on puisse simplifier des unions comme dans $[2;3] \cup \left]1;\frac{5}{2}\right] =]1;3]$.

Autre exemple : $[-1;+\infty[\cup]-\infty;1[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.

L'intersection c'est un *ET*

Imaginons que l'on a un x qui se balade sur la droite des nombres réels et que nous savons que $x \geqslant 3$ et $x < \sqrt{123}$. En français cela fait que le x doit être plus grand ou égale à 3 et strictement plus petit que $\sqrt{123}$. Le premier intervalle est $[3;+\infty[$ et le second $]-\infty;\sqrt{123}[$. Mais quel est cet intervalle ? Simplement $[3;+\infty[$ et $]-\infty;\sqrt{123}[$. Pour faire plus savant on utilise un symbole pour dire *ET*, c'est $\cap$ qu'il faut prononcer en général *inter* pour intersection (mais ce n'est pas faux de dire *ET* non plus) et on note alors $[3;+\infty[\cap]-\infty;\sqrt{123}[$.

Il arrive parfois que l'on puisse simplifier des intersections comme dans dans l'exemple précédent $[3;+\infty[\cap]-\infty;\sqrt{123}[=[3;\sqrt{123}[$

Autre exemple : $[2;3] \cap \left]1;\frac{5}{2}\right] = \left[2;\frac{3}{2}\right]$.

Il arrive qu'il n'y ai rien dans l'intersection comme dans l'exemple $[1;2[\cap[2;3]$. Pour dire *rien* en mathématiques on utilise le symbole de l'*ensemble vide* : $\varnothing$.

Ainsi on note $[1;2[\cap[2;3] = \varnothing$.

Vous avez dis "domaine de définition" ?

Lorsque l'on travail avec une expression littérale on ne peut pas donner à x n'importe quelle valeur. Comme dans l'expression $E(x) = \frac{1}{x}$, où l'on ne peut pas prendre $x = 0$ car il est interdit de diviser par 0. Autre exemple, dans l'expression $F(x) = \sqrt{x+1}$, il n'est pas possible de prendre $x = -10$ car nous n'avons pas le droit de mettre des nombre négatif sous la racine carrée (dans l'univers où l'on travail à savoir $\mathbb{R}$).

Toutes les valeurs possibles dans une expression littérale sont rangées dans une même boite que l'on appel *ensemble de définition*. Il n'y a pour l'instant que deux questions à se poser lorsque l'on est face à une expression littérale :

— Est-ce qu'il y a une fraction ? Si oui alors il faut s'interdire les valeurs de x qui pourraient faire apparaitre un zéros au dénominateur.
— Est-ce qu'il y a une racine carré ? Si oui alors il faut s'interdire les valeurs de x qui pourraient faire apparaitre des nombres négatifs sous la racine.

Prenons l'expression $E(x) = \dfrac{x^{4096} - \sqrt{2020}x^5 - 1}{x - 10}$. Pour que cette expression soit permise, il faut que $x - 10$ ne soit pas nule ce que l'on peut écrire $x - 10 \neq 0$ (ce nouveau symbole $\neq$ n'en est pas vaiment un, c'est pour dire *n'est pas égale à*. Lorsqu'on barre un symbole c'est pour dire qu'il n'est pas. Autre exemple : $x \notin [2;3]$ pour dire que x n'appartient pas à l'intervalle $[2;3]$). Pour faire plus simple et coïncider avec ce que nous avons vu, nous allons plutôt nous demander pour quelle valeur de x a-t-on $x - 10 = 0$. Cette équation a pour solution 10. En conclusion pour que l'expression $E(x) = \dfrac{x^{4096} - \sqrt{2020}x^5 - 1}{x - 10}$ ai un sens il faut que x évite le nombre 10 ce qui correspond à l'intervalle $]-\infty;10[\cup]10;+\infty[$ ce que l'on note souvent $\mathbb{R} - \{10\}$ et qui se prononce $\mathbb{R}$ privé de 10.

Dans cet exemple on dit que le domaine de définition de l'expression est $\mathbb{R} - \{10\}$. On a ce qu'il faut pour parler des inéquations.

Inéquations

Une inéquation est une expression littérale qui fait intervenir une inégalité ($<$, $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$). Pour résoudre une inéquation on applique les même règles de calcul que pour une équation à ceci près qu'il y a une loi supplémentaire :

Lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif on change le sens de l'inégalité.

Déterminons les solutions de l'inéquation $3x - 4 > 0$. Imaginons qu'au lieu du $>$ nous ayons un $=$. En passant le 4 de l'autre coté et en divisant par 3 nous obtiendrons $x = \dfrac{4}{3}$. Pour une inégalité on fait la même chose en respectant la loi supplémentaire.

$$3x - 4 > 0 \Leftrightarrow 3x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$$

En conclusion, en isolant x d'un coté de cette inégalité, on détermine que $x > \dfrac{4}{3}$. Avec les notions d'intervalle que nous avons développé nous arrivons à ce que l'ensemble solution soit $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.

Résolvons l'inéquation $1 - \dfrac{1}{2}x > 0$.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}x \leqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant (-1) \times (-2) \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 2 \end{aligned}$$

Ceci correspond à l'intervalle $[2;+\infty[$.

Les polynôme de degrés 2

Pour les polynômes de degrés 2, nous pouvont utiliser le discriminant pour déterminer les solutions d'une inéquations. Précisons avec une proposition :

Proposition 8.0.1

Soient a, b et c des nombres réels où $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$. Le polynôme $ax^2 + bx + c$ a le même signe que a et ne s'annule jamais.

Si $\Delta = 0$. Soit x_0 la racine du polynôme $ax^2 + bx + c$. Alors ce polynôme a le même signe que a et ne s'annule qu'une et une seule fois en x_0.

Si $\Delta > 0$. Soient x_1 et x_2 les deux racines de $ax^2 + bx + c$ tel que $x_1 < x_2$. Sur les intervalles $]-\infty;x_1]$ et $[x_2;+\infty[$ le polynôme a le même signe que a et entre x_1 et x_2 a le signe opposé de a.

Par exemple résolvons l'inéquation $x^2 + 2x + 1 > 0$. On vérifie sans peine que le discriminant est nul. D'après la proposition, on en déduit que ce polynôme est du signe du coefficient dominant qui est positif (puisque c'est 1) donc pour tous $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, $x^2 + 2x + 1 > 0$ où $x_0 = 1$.

Autre exemple : résolvons l'inéquation $-x^2 + 3x - 2 > 0$. Le discriminant $\Delta = 1$ ce qui permet de déterminer les deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. D'après la proposition on en déduit que sur l'intervalle $]1;2[$ on a $-x^2 + 3x - 2 > 0$.

Comment faire pour démontrer cette proposition ou se priver de l'apprendre mais être capable de trouver les solutions de tels inéquations, ou tout simplement résoudre des inéquations de degrés plus que 2 ? Une seule et même réponse à toutes ces questions : les tableaux de signe.

Les tableaux de signe

Imaginons que nous souhaitons résoudre une inéquation de la forme $(x-1)(2-x)(x-3) \geqslant 0$. Si nous raisonnons comme avec des équations, nous aurions une équation au produit nul. C'est à dire que nous finirions par dire que soit $x - 1 = 0$, soit $2 - x = 0$ ou soit $x - 3 = 0$. Par analogie, nous pourrions être tenté de conclure que déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x-1)(2-x)(x-3) \geqslant 0$ reviens à chercher les x tel que $x - 1 \geqslant 0$, $2 - x \geqslant 0$ et $x - 3 \geqslant 0$. Bien sur cela est vrai ! Malheureusement ce n'est pas tout, il manque des solutions. En effet pour que ce produit de trois expressions soit positif (parce que $\geqslant 0$ est juste une manière de dire *positif (ou nul)*) il suffit que les trois expressions soit positif mais ce n'est pas nécessaire. Par exemple $x - 1$ peut être positif et $x - 2$ ainsi que $x - 3$ tout deux négatifs. Dans ce cas la règle des signes stipule que le produit est positif (on rappel que $-$ par $-$ donne $+$). Lorsque l'on est amené à résoudre une inéquation de nature à déterminer un signe, c'est à dire de la forme $\mathtt{blabla} < 0$, on compile les données dans un tableau simplement appelé tableau de signe. La première ligne représente toutes les valeurs de x classées dans l'ordre croissant (c'est la première source d'erreur dans un tableau de signe). Chacune des autres lignes représente un facteur de l'expression. Finalement dans la dernière ligne on compile les données en réalisant, en colonne, le produit des signes.

Détaillons le tableau de signe de l'inéquation $(x-1)(2-x)(x-3) \geqslant 0$. Cette expression fait apparaitre trois facteurs. Chaque facteur s'annule en 1, 2 et 3 qui sont donc les nombres à faire apparaitre dans la première ligne.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x - 1$					
$2 - x$					
$x - 3$					
$(x-1)(2-x)(x-3)$					

Bien sur on n'omet pas les infinis car le domaine de définition de cette inéquation est $\mathbb{R}$ (puisqu'il n'y a aucune contrainte - ni fraction, ni racine carré). Pour chaque valeur spéciale apparaissant dans la première ligne, qui sont les valeurs annulant les facteurs **classer dans l'ordre croissant**, on tire un trait jusqu'à la dernière ligne qui est l'expression dont on cherche le signe. On va faire apparaitre un 0 sur ces traits verticaux lorsque les valeurs associées annulent les facteurs :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$			0						
$2 - x$					0				
$x - 3$							0		
$(x-1)(2-x)(x-3)$									

On donne ensuite le signe de chaque facteur. Pour y arriver on peut retenir que dans une expression de la forme $ax+b$ qui s'annule en $-\dfrac{b}{a}$ le signe à inscrire à droite de cette valeur est celui de a (et donc son opposé à droite). Pour le premier facteur de notre exemple puisque $x-1$ s'annule en 1 et que son coefficient de degré 1 est positif alors on inscrit un $+$ dans toutes les case à droite du 1 et un $-$ par ailleurs.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2 - x$					0				
$x - 3$							0		
$(x-1)(2-x)(x-3)$									

De la même manière pour le facteur $2-x$ qui s'annule en 2. Puisque son coefficient de degrés 1 est négatif, on inscrit un $-$ à droite du 2 et un $+$ à gauche.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 3$							0		
$(x-1)(2-x)(x-3)$									

En faisant de même pour le dernier facteur on arrive au tableau

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(2-x)(x-3)$									

Finlament, une fois fait, il faut compiler les informations dans la dernière ligne en lisant colonne par colonne.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(2-x)(x-3)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Pour conclure il ne faut *faire tomber les* 0. Le tableau final est

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(2-x)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Le problème de départ était de résoudre l'inéquation $(x-1)(2-x)(x-3) \geqslant 0$ ce qui peut se lire : trouver les valeurs de x pour lesquelles $(x-1)(2-x)(x-3)$ est positif ou nul soit encore les valeurs de x pour lesquelles des $+$ (positifs) apparaissent dans la dernière ligne du tableau. Par simple lecture on en déduit que l'ensemble solution est $]-\infty;1] \cup [2;3]$.

Les valeurs interdites

On rappel qu'a notre niveau, lorsque nous disposons d'une expression littérale, deux contraintes peuvent apparaitre :

— Si il y a des fractions, il faut interdire les valeurs qui annulent les dénominateurs

— Si il y a des racines carrés, il faut interdire que leur paramètre soit négatifs.

Ces valeurs à interdire sont simplement appelées les *valeurs interdites*. Comme dans l'exemple que nous avons déjà traiter de l'expression $\dfrac{x^{4096}-\sqrt{2020}x^5-1}{x-10}$ ou la valeur à interdire est 10. Nous avions conclut que le domaine de définition était $\mathbb{R}-\{10\}$.

De même si nous cherchons le domaine de définition de l'expression $\sqrt{x-10}$, il faut que $x-10 \geqslant 0$ soit encore $x \geqslant 10$ ce qui correspond à l'intervalle $[10;+\infty[$.

Détaillons un dernier exemple un peu plus complexe et résolvons l'inéquation $\dfrac{2x-1}{x-1} < \dfrac{1}{x+1}$. Pour commencer on observe que cette expression fait apparaitre deux fractions. Il faut donc interdire l'annulation des dénominateurs. Sans plus de détail on pourrait aisément vérifier que 1 annule le dénominateur de la fraction de gauche et -1 celle de droite. En conclusion le domaine de définition est $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. Passons à présent à la résolution. L'erreur à ne surtout pas commettre ici est de faire un produit en croix. En effet faire un produit en croix c'est avant tout faire un produit et lorsque l'on multiplie une inégalité par un nombre négatif on change le sens de l'inégalité et qui est ici un problème puisque ce produit dépend de la variable x dont on ne connait pas (encore) le signe. Moralité, le produit en croix est à bannir pour résoudre des inéquations. Nous allons faire des manipulations algébrique simple pour faire apparaitre une étude de signe (faire apparaitre un 0 d'un coté de l'inégalité).

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x-1} < \frac{1}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} - \frac{1}{x+1} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2+2x-x-1-x+1}{(x-1)(x+1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} < 0
\end{aligned}$$

L'objectif étant d'utiliser un tableau de signe il ne faut surtout pas développer ! Au contraire, le but est de faire apparaitre des facteurs qui correspondront aux lignes du tableau. Dans cette exemple, l'expression est simplifiée et nous avons 3 facteurs. Nous arrivons alors au tableau suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$		$+$		$-$		$-$		$+$	

Avant de faire descendre les 0 il ne faut pas oublier que -1 et 1 sont des valeurs interdites. Pour conserver cette information dans le tableau, nous le signalons par deux traits. Pour les autres valeurs, qui ne sont pas interdites, on fait comme d'habitude.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Finalement les solutions de l'inéquation $\frac{2x-1}{x-1} < \frac{1}{x+1}$ correspondent aux valeurs de x pour lesquelles $\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$ est strictement négatif soit, par lecture du tableau à l'ensemble solution $]-1;0[\cup]0;1[$.

Un exemple qui résume tout

Résolvons l'inéquation $\frac{1-2x}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}$. Comme dans le dernier exemple le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. Faisons apparaitre un 0 pour pouvoir réaliser un tableau de signe.

$$\begin{aligned}
\frac{1-2x}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(1-2x)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(1-2x)(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+1-2x^2-2x-x+1}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x^2-2x+2}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Déterminons, si possible, les racines du polynôme de degrés 2 apparaissant au numérateur : $\Delta = (-2)^2 - 4.(-2)(2) = 4 + 16 = 20$. On a alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{20}}{2.(-2)} = \frac{2-\sqrt{4\times 5}}{-4} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Par les même manipulation algébrique on trouve que $x_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A l'aide de la calculatrice on observe que $x_2 < -1 < x_1 < 1$. Le tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2-2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-2x^2-2x+2}{(x-1)(x+1)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Pour conclure la solution de l'inéquation est $\left]-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left]-1; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup]1; +\infty[$.

9. Statistiques descriptives

Introduction

Voici une définition de statistique :

> La statistique est d'un point de vue théorique une science, une méthode et une technique. La statistique comprend : la collecte des données, le traitement des données collectées, l'interprétation des données et la présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous.

Dans ce cours nous nous intéresserons à un type de statistique en particulier : celle qui n'étudie qu'un caractère ou qu'une variable à la fois ; on parle alors de statistique unidimensionnelle.

Définition

Une étude statistique unidimensionnelle porte sur une caractéristique bien définie que l'on désigne par **caractère** ou **variable** et qui est présente chez chacun des éléments ou individus d'un ensemble donné appelé **population**.

Par exemple la population peut être les étudiants d'une classe et le caractère peut être les notes à l'examen de fin d'année.

On distingue deux types de caractères.

Définition

Une variable, ou caractère, statistique est dite **qualitative** si ses valeurs s'expriment de façon littérale ou par un codage sur lequel les opérations arithmétiques n'ont pas de sens.

Par exemple le sexe des personnes interrogées, le numéro de leur département de naissances (bien que cela soit des nombres et que les opérations arithmétiques usuelles soient valides, il n'y a aucun sens à considérer la somme de numéro de département ou la moyenne de ces numéros ; il s'agit ici d'un codage), leur situation familiale, la mention recalé, passable, assez bien, bien et très bien que peut avoir un étudiant à un examen. Dans ce dernier exemple on dit que le caractère est *ordinal* car on peut tout de même ordonner les valeurs du caractères. Dans les autres exemples, on parle de caractère, ou variable, *nominale* (ne sont décrit que par leur nom).

Définition

Une variable, ou caractère, statistique est dite **quantitative** si ses valeurs sont des nombres sur lesquels les opérations arithmétiques ont un sens. Elle peut être de deux formes :

- **Discrète :** si elle ne prend qu'un nombre fini de valeur. Ces valeurs sont appelées des **modalités**.
- **Continue :** si elle prend ses valeurs dans un intervalle. Ces intervalles sont appelées des **classes**.

Définition

Une série statistique est l'ensemble des modalités ou classes correspondant à tous les individus de la population considérée.

Série statistique à caractère discret

Dans la suite de ce chapitre, on fixe une série statistique à caractère discret S. Cela signifie que S est un ensemble fini de nombres réels. Il existe donc des nombres $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$

On note k le nombre de modalité différente et $x_1, x_2, ..., x_k$ ces différentes modalités ordonnées dans l'ordre permettant au mieux d'observer la série (dans la plupart des cas c'est dans l'ordre croissant).

Pour illustrer les définitions et notions nous utiliserons l'exemple suivant jusqu'à la fin du chapitre :

- La population étudiée est un groupe de TD de 30 étudiants.

- Le caractère étudié est les résultats obtenus à l'examen de mathématiques. Les notes, sur 20, sont les suivantes :

12	11	7	10	9	3
12	15	8	8	14	11
7	2	0	18	11	14
16	11	9	12	11	11
15	10	15	7	14	10

Le nombre de modalité différente est de 13 (*i.e.* $k = 13$ tandis que $n = 30$) et les différentes modalités sont $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$, $x_5 = 8$, $x_6 = 9$, $x_7 = 10$, $x_8 = 11$, $x_9 = 12$, $x_{10} = 14$, $x_{11} = 15$, $x_{12} = 16$, $x_{13} = 18$. A noter que toute modalité est une valeur mais toute valeur n'est pas une modalité. Par exemple 12 est une valeur et aussi une modalité mais 17 est une valeur sans être une modalité ; 17 est une valeur pour le caractère (une note) mais n'est pas une modalité de la série statistique car aucun des x_i ne vaut 17.

Effectif et fréquence

Définition

Le nombre d'élément de la série S est appelé **l'effectif total** de la série statistique S.

Définition

Soit x_i une modalité de la série statistique S. Le nombre n_i de répétition de x_i dans la série S est appelé **l'effectif** de x_i.

Dans la pratique, on représente ces résultats dans un tableau :

Caractères	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Effectifs	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Dans notre exemple, l'effectif total vaut 30 et les effectifs sont :

Notes	0	2	3	7	8	9	10	11	12	14	15	16	18
Effectifs	1	1	1	3	2	2	3	6	3	3	3	1	1

Par construction on a la proposition suivante.

Proposition

Notons n_i l'effectif de la modalité x_i.

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

On vérifie en effet que dans notre exemple $1+1+1+3+2+2+3+6+3+3+3+1+1 = 30$.

Définition

Soit x_i une modalité de la série statistique S. On appelle **fréquence** relative à la modalité x_i le rapport de l'effectif de la modalité x_i avec l'effectif total.

$$f_i := \frac{n_i}{n}$$

Naturellement puisque la somme des effectifs vaut l'effectif total, la somme des fréquence, vaut 1 :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

Ce dernier résultat montre en fait que la somme des $p_i = 100 f_i$ fait 100 et donc que les p_i décrivent le pourcentage de l'effectif total ayant x_i pour caractère. On complète alors le tableau :

Caractères	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Effectifs	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
Fréquences	f_1	f_2	$\cdots$	f_k
Pourcentages	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

Ce qui donne dans notre exemple :

Notes	0	2	3	7	8	9	10	11	12	14	15	16	18
Effectifs	1	1	1	3	2	2	3	6	3	3	3	1	1
Fréquences	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
Pourcentages	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$	10%	$\frac{20}{3}\%$	$\frac{20}{3}\%$	10%	20%	10%	10%	10%	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$

On interprète cela en observant, par exemple, que 20% des étudiants on obtenu un $11/20$ à leur examen.

Définition

L'**effectif cumulé** croissant (resp. décroissant) pour la modalité x_i est la somme des effectifs qui lui sont inférieurs (resp. supérieurs).

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$$

$$(\text{resp.} \qquad N_i = \sum_{j=i}^{k} n_j)$$

On observe en particulier que $N_k(\text{resp. } N_1) = \sum_{j=1}^{k} n_j = n$ (l'effectif total). On complète le tableau :

Caractères	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Effectifs	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
Effectifs cumulés croissants	n_1	$n_1 + n_2$	$\cdots$	$n_1 + \cdots + n_k$
Effectifs cumulés décroissants	$n_1 + \cdots + n_k$	$n_2 + \cdots + n_k$	$\cdots$	n_k

Avec notre exemple :

Notes	0	2	3	7	8	9	10	11	12	14	15	16	18
Effectifs	1	1	1	3	2	2	3	6	3	3	3	1	1
Effectifs cumulés croissants	1	2	3	6	8	10	13	19	22	25	28	29	30
Effectifs cumulés décroissant	30	29	28	25	23	21	18	12	9	6	3	2	1

On peut interpréter ces résultats en observant, par exemple, que 10 étudiants ont obtenu une note strictement inférieure à 10.

Définition

La **fréquence cumulée** croissante (resp. décroissante) pour la modalité x_i est la somme des fréquences qui lui sont inférieures (resp. supérieures).

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

$$(\text{resp.} \qquad N_i = \sum_{j=i}^{k} f_j)$$

En générale on considèrera davantage les pourcentages que les fréquences en posant $P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$ (resp. $P_i = \sum_{j=i}^{K} p_j$). On les représente de même dans le tableau ce qui donne dans notre exemple :

Notes	0	2	3	7	8	9	10	11	12	14	15	16	18
Effectifs	1	1	1	3	2	2	3	6	3	3	3	1	1
Fréquences	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
Pourcentages	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$	10%	$\frac{20}{3}\%$	$\frac{20}{3}\%$	10%	20%	10%	10%	10%	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$
Effectifs cumulés croissants	1	2	3	6	8	10	13	19	22	25	28	29	30
Fréquences cumulés croissantes	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{29}{30}$	1
Pourcentages cumulés croissants	$\frac{10}{3}\%$	$\frac{20}{3}\%$	10%	20%	$\frac{80}{3}\%$	$\frac{100}{3}\%$	$\frac{130}{3}\%$	$\frac{190}{3}\%$	$\frac{220}{3}\%$	$\frac{250}{3}\%$	$\frac{280}{3}\%$	$\frac{290}{3}\%$	100%
Effectifs cumulés décroissant	30	29	28	25	23	21	18	12	9	6	3	2	1
Fréquences cumulés décroissantes	1	$\frac{29}{30}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$
Pourcentages cumulés décroissants	100%	$\frac{290}{3}\%$	$\frac{280}{3}\%$	90%	80%	$\frac{220}{3}\%$	$\frac{200}{3}\%$	$\frac{170}{3}\%$	$\frac{110}{3}\%$	$\frac{80}{3}\%$	$\frac{50}{3}\%$	$\frac{20}{3}\%$	$\frac{10}{3}\%$

On interprète cela en observant, par exemple, que 80% des étudiants on obtenu une note supérieur ou égale à 8.

Représentation des données

Il existe plusieurs manière de représenter une série statistique à caractère discret.

Diagramme en bâtons. On trace les segments $\left\{[(x_i, n_i); (x_i, 0)]\right\}_{i \in [\![1;k]\!]}$ où les x_i désignent les modalités et n_i les effectifs associés. Avec notre exemple cela donne :

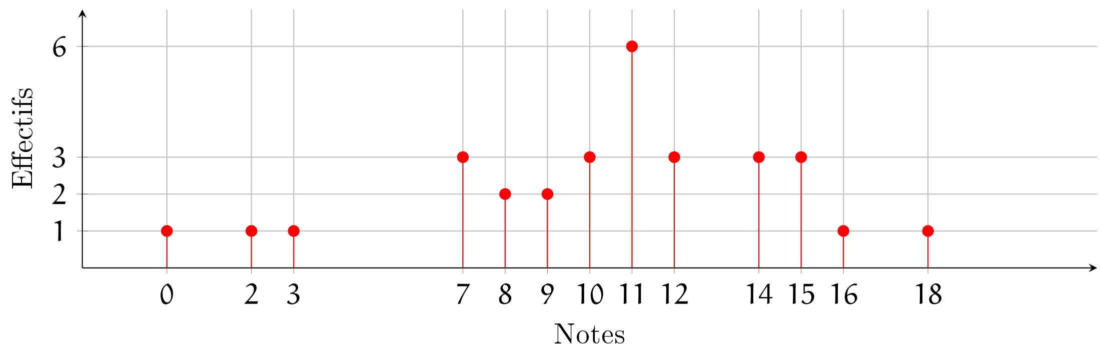


Diagramme en tuyau d'orgue. On procède comme le diagramme en bâtons à ceci près que l'on dessine des rectangles pour chaque modalité ; pour ne pas confondre avec les histogrammes (dont nous parlerons plus loin) on marque un espace entre chaque rectangle. Pour mieux illustrer la statistique, on peut indiquer les effectifs au dessus des rectangles. Dans notre exemple cela donne :

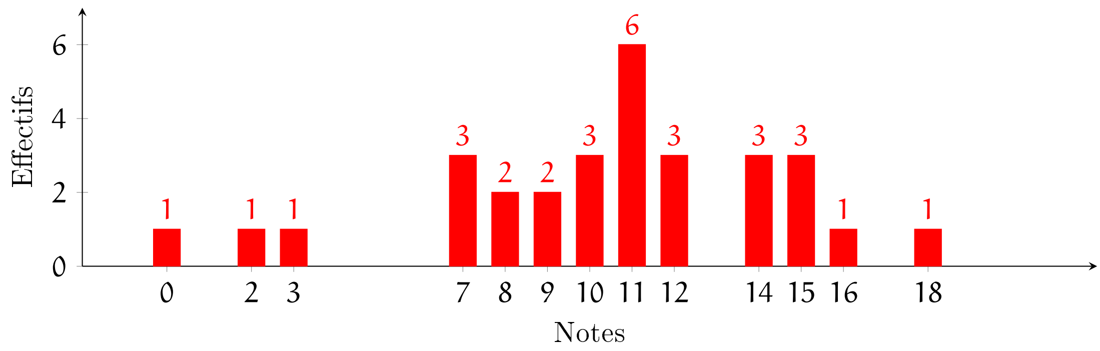


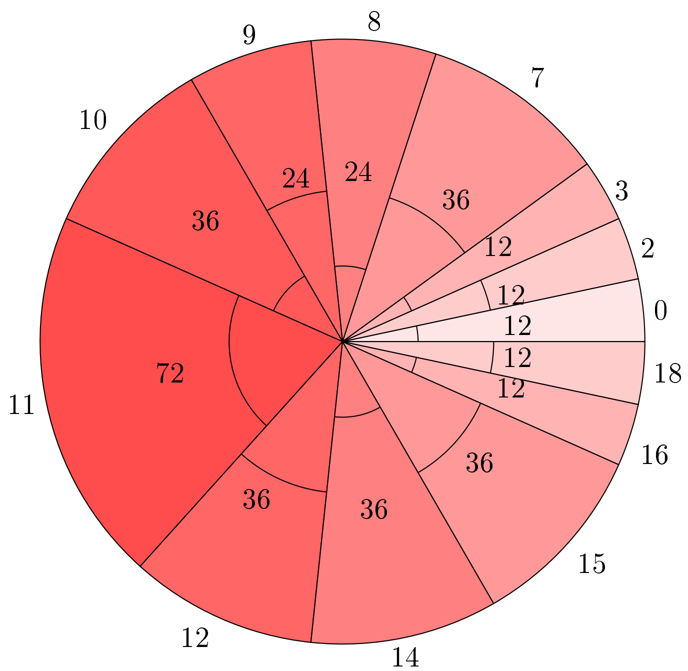
Diagramme circulaire. Pour chaque modalité x_i, on détermine l'angle en degré correspondant par la formule $\vartheta_i = n_i \dfrac{360}{n}$ où n désigne l'effectif total et n_i l'effectif de la modalité x_i.

Puisque la somme des ϑ_i vaut 360 chaque angles correspond à une partie d'un disque. On représente alors ces angles dans un disque en indiquant à quelle modalité correspond l'angle.

Dans notre exemple, on commence tout d'abord à déterminer les angles, en arrondissant à l'unité (et en s'arrangeant pour la somme des angles fasses bien 360 degrés).

Notes	0	2	3	7	8	9	10	11	12	14	15	16	18
Effectifs	1	1	1	3	2	2	3	6	3	3	3	1	1
Angles	12	12	12	36	24	24	36	72	36	36	36	12	12

Le diagramme circulaire correspondant est alors :



Caractéristiques de position

Le mode.

Définition

Le **mode** de S est la modalité avec le plus grand effectif.

Dans notre exemple le mode vaut 11.

La moyenne.

Définition

La **moyenne** de S, notée $\overline{S}$, est définie par la formule

$$\overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

où les n_i désignent l'effectif de la modalité x_i et n l'effectif total.

Dire qu'une statistique a $\overline{S}$ pour moyenne s'interprète en observant que c'est comme si tous les individus de la population étudiée avaient pour modalité $\overline{S}$.

Dans notre exemple, la moyenne vaut $\dfrac{313}{30} = 10.4\underline{3}$

La médiane. La médiane est la modalité qui sépare l'effectif en deux.

Définition

Soit $i_2 \in [\![1;k]\!]$ l'indice tel que $N_{i_2-1} < \frac{n}{2} \leqslant N_{i_2}$ où n désigne l'effectif total et N_i l'effectif cumulé croissant de la modalité x_i. La modalité x_{i_2} est appelé la **médiane** de la série S.

Il se peut que la médiane soit exactement entre deux modalités ; dans ce cas, on définit la médiane comme étant la valeur moyenne de ces deux modalités.
Dans notre exemple la médiane vaut 11. Cela s'interprète en observant que environ (c'est en effet une approximation car plusieurs individu peuvent avoir la modalité de la médiane) la moitié des étudiants ont obtenus une note inférieur à 11 et l'autre moitié supérieur à 11.

Les quantiles. La médiane sépare l'effectif en deux. On peut généraliser cette décomposition en remplaçant 2 par un autre nombre.

Définition

Soient $Q \in \mathbb{N}_{>1}$ et $q \in [\![1;Q-1]\!]$. Le $q^{\text{ième}}$ **quantile d'ordre Q** est la modalité x_{i_q} dont l'indice est tel que $N_{i_q-1} < \frac{n}{Q} \leqslant N_{i_q}$ où n désigne l'effectif total et N_i l'effectif cumulé croissant de la modalité x_i.

Dans la pratique trois quantiles sont étudiés :

La médiane. C'est le premier quantile d'ordre 2.

Les quartiles. On choisit de séparer l'effectif en quatre ($Q = 4$). Dans ce cas, le second quantile d'ordre 4 est la médiane. On s'attarde alors à calculer le premier quantile et le troisième quantile d'ordre 4 respectivement nommé **premier quartile** et **troisième quartile**. On représente généralement les quartiles dans un **diagramme en boîte** (également appelé boîte à moustache) : sur un axe représentant les modalités, on trace un rectangle dont deux des cotés opposés marquent respectivement le premier et le dernier quartile. On marque aussi la médiane.

Dans notre exemple, le premier quartile vaut 8 et le troisième 14.

Les déciles. On prend $Q = 10$.

Caractéristiques de dispersion

L'étendue.

Définition

L'**étendue** et_S d'une série statistique S est la différence entre la plus grande modalité et la plus petite.

$$et_S = \mathrm{Max}(x_i | x_i \in S) - \mathrm{Min}(x_i | x_i \in S).$$

L'étendue permet de mesurer si la série statistique est concentrée autour de sa moyenne ou plutôt dispersée : plus l'étendue est petite plus la série est concentré autour de sa moyenne et inversement. Dans notre exemple l'étendue est de 18. Cette série est donc dispersée autour de sa moyenne.

L'intervalle inter-quartile. Dans notre exemple, l'étendue de 18 nous indique que la série statistique est dispersée autour sa moyenne. L'intervalle inter-quartile permet de savoir s'il y a plus de modalité au dessus de la moyenne ou en dessous.

Définition

L'**intervalle inter-quartile** d'une série statistique est la différence entre le troisième et le premier quartile.

La variance et l'écart-type. Pour mieux observer la dispersion des modalités, on calcul l'écart-type. On va étudier les écarts entre chaque modalité avec la moyenne.

Définition

La **variance** d'une série statistique S est le nombre

$$v_S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{S})^2$$

Dans la pratique on calcul la variance à l'aide de la formule suivante.

Proposition

Soit S une série statistique. Considérons S^2 la série ou toutes les modalités sont mis au carré. Alors

$$v_S = \overline{S^2} - \overline{S}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\right) - \overline{S}^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
v_S &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{S})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i^2 - 2x_i\overline{S} + \overline{S}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i 2x_i\overline{S} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{S}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\overline{S}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \overline{S}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\overline{S}\overline{S} + \overline{S}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{S}^2.
\end{aligned}$$

□

Pour "renormaliser" cette donnée (le passage au carré), on considère plus souvent l'écart-type.

Définition

L'**écart-type** d'une série statistique est définie comme la racine carré de la variance :

$$\sigma_s = \sqrt{\nu_s}$$

Série statistique à caractère continue

En général, les deux raisons principales qui peuvent amener à considérer comme continue une variable sont le grand nombre d'observation distinctes (trop grand pour une étude discrète) ou le caractère sensible d'une variable (salaire, age d'une femme, etc).

Dans ce chapitre on fixe une série statistique à caractère continue S. On note k le nombre de classe et chaque classe sera noté $[b_i; b_{i+1}[$ (les intervalles pouvant être fermés ou ouverts ; la seule règle à respecter est qu'une valeur ne peut être considérée que dans une seule classe). Pour illustrer les notions de ce chapitre nous considèrerons l'age des 121 employés d'une entreprise

26	22	41	43	18	31	34	28	26	21	44
52	60	62	34	38	23	31	40	58	60	33
33	26	28	30	29	29	29	29	33	35	33
26	42	24	22	44	41	47	30	49	32	37
26	51	28	55	52	61	47	22	19	27	25
35	33	25	34	43	42	41	30	29	27	51
52	31	32	29	25	21	31	41	21	31	51
32	22	42	52	23	44	50	51	29	29	29
28	27	29	35	43	49	57	57	57	31	33
33	48	49	22	18	19	20	21	22	23	23
23	19	44	55	33	48	28	42	54	25	29

Le nombre de modalité étant grand, on choisit une étude continue. On représente alors les données dans un tableau.

Classe	$[18;23[$	$[23;28[$	$[28;33[$	$[33;38[$	$[38;43[$	$[43;48[$	$[48;53[$	$[53;58[$	$[58;63]$
	16	18	28	15	10	9	14	6	5

Liens avec le cas discret

Définition

Soit S une série statistique à caractère continue.

- La **borne inférieur** de la classe $[b_i; b_{i+1}[$ est b_i.
- La **borne supérieur** de la classe $[b_i; b_{i+1}[$ est b_{i+1}.
- Le **centre de classe** de $[b_i; b_{i+1}[$ est $\dfrac{b_i + b_{i+1}}{2}$.
- L'**amplitude** de la classe $[b_i; b_{i+1}[$ est $b_{i+1} - b_i$.

Dans la pratique, on complète le tableau en rajoutant le centre des classes.

Classe	$[18;23[$	$[23;28[$	$[28;33[$	$[33;38[$	$[38;43[$	$[43;48[$	$[48;53[$	$[53;58[$	$[58;63]$
Centre des classes	20.5	25.5	30.5	35.5	40.5	45.5	50.5	55.5	60.5
	16	18	28	15	10	9	14	6	5

Définition

La **série statistique discrète associé** à S est la série dont les modalités sont les centres de classe et les effectifs correspondant aux classes respectives.

On peut donc appliquer dans ce cadre les définitions d'effectifs, effectif total, effectifs cumulés, fréquences, fréquences cumulées.

Représentations des données

En considérant les statistiques continues de manière discrète, on peut utiliser les représentations introduites dans le précédent chapitre : diagramme en batons, en tuyau d'orgue, circulaire etc.

Il existe également une représentation propre au caractère continue : l'histogramme.

Chaque classe est représenté par un rectangle dont la base est délimitée par les bornes correspondante et dont la hauteur est la densité d'effectif.

Définition

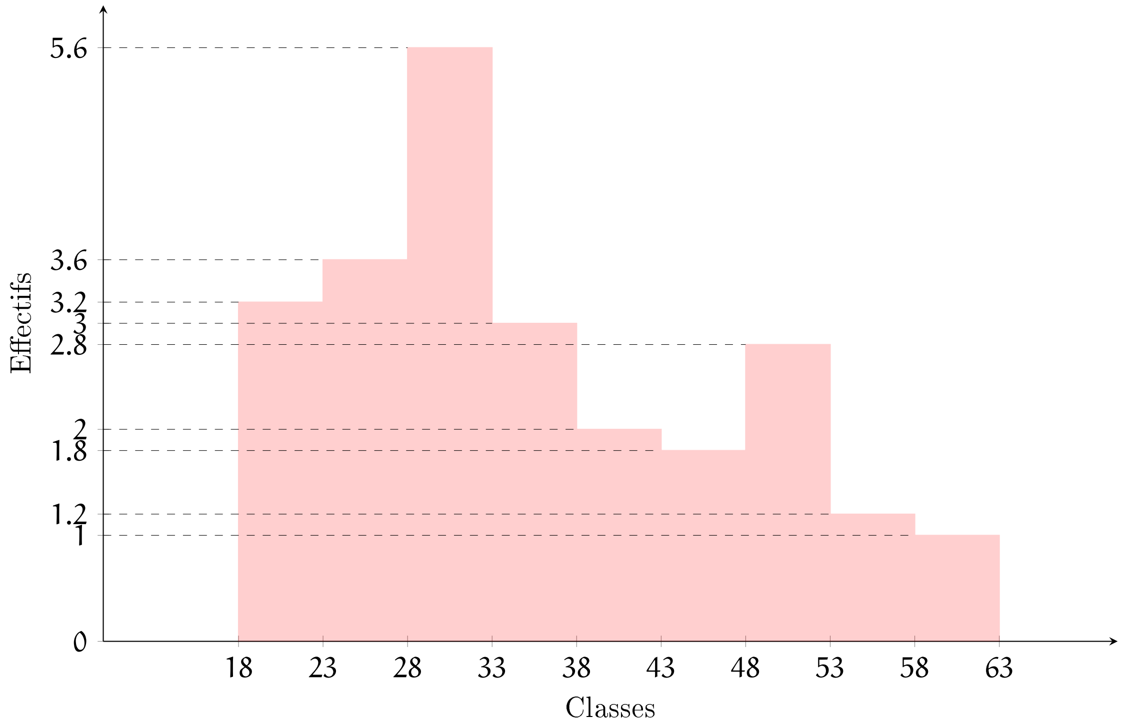
Soit S une série statistique à caractère continue. La **densité d'effectif** de la classe $[b_i; b_{i+1}[$ est le rapport entre l'effectif du centre de classe correspondant par l'amplitude de la classe.

$$\frac{n_i}{b_{i+1} - b_i}$$

Puisque la hauteur d'un rectangle est la densité d'effectif, l'aire d'un rectangle de l'histogramme, qui est le produit de la hauteur $\dfrac{n_i}{b_{i+1} - b_i}$ par la longueur $b_{i+1} - b_i$, est égale à l'effectif ; ceci permet donc une meilleur illustration de la série étudiée.

Avec notre exemple, cela donne :

Classe	$[18;23[$	$[23;28[$	$[28;33[$	$[33;38[$	$[38;43[$	$[43;48[$	$[48;53[$	$[53;58[$	$[58;63]$
Centre des classes	20.5	25.5	30.5	35.5	40.5	45.5	50.5	55.5	60.5
Effectif	16	18	28	15	10	9	14	6	5
Densité d'effectif	3.2	3.6	5.6	3	2	1.8	2.8	1.2	1



Caractéristiques de position et de dispersion liés au cas discret

Classe modale. La version continue du mode est la classe modale.

Définition

La **classe modale** de S est la classe du plus grand effectif.

Dans notre exemple, la classe modale est $[28; 33[$.

De manière équivalente, la classe modale d'une série continue est la classe correspondant au mode de la série discrète associée.

Moyenne, variance et écart-type. La moyenne (resp. la variance, resp. l'écart-type) d'une série statistique continue, est la moyenne (resp. la variance, resp. l'écart-type) de la série statistique discrète associée.

Étendue.

Définition

L'**étendue** de S est la différence entre la plus grande borne supérieur et la plus petite borne inférieur.

$$\mathrm{et}_S = \mathrm{Max}\Big(\mathrm{Sup}([b_i; b_{i+1}[\,\big|\, i \in [\![1; k]\!])\Big) - \mathrm{Min}\Big(\mathrm{Inf}([b_i; b_{i+1}[\,\big|\, i \in [\![1; k]\!])\Big).$$

Médiane et quantiles

Définition

Soient $Q \in \mathbb{N}_{>1}$ et $q \in [\![1; Q-1]\!]$. La $q^{\text{ième}}$ **classe-quantile d'ordre Q** est la classe $[b_{i_q}; b_{i_q+1}[$ dont l'indice i_q est tel que $N_{i_q-1} < \dfrac{n}{Q} \leqslant N_{i_q}$ où n désigne l'effectif total et N_i l'effectif cumulé croissant de la classe $[b_i; b_{i+1}[$.

Avec notre exemple :

Classe	$[18;23[$	$[23;28[$	$[28;33[$	$[33;38[$	$[38;43[$	$[43;48[$	$[48;53[$	$[53;58[$	$[58;63]$
Centre des classes	20.5	25.5	30.5	35.5	40.5	45.5	50.5	55.5	60.5
Effectif	16	18	28	15	10	9	14	6	5
Effectif cumulé croissant	16	34	62	76	87	96	110	116	121

Dans ce cas la classe médiane est $[28;33[$. Le centre de classe étant 30.5, on pourrait dire que la médiane de cette série est 30.5. Nous pourrons raffiner ce résultat à l'aide de l'interpolation linéaire, mais pour cela nous aurons besoin des fonctions.

TO BE CONTINUED

Partie 2

Introduction aux calculs analytiques

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Nous avons déjà rencontré les fonctions auc cours des chapitres précédents. Il s'agit des expressions littérales. Voici ce que Leonhard Euler (mathématicien suisse 1707-1783), l'un des premiers a avoir formalisé la notion de fonction, a dis :

> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autre. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x.

En d'autre terme une fonction est un four qui transforme des nombres en d'autre nombre. Si f est le nom de notre four, alors on note $f(x)$ le résultat de la transformation du nombre x dans le four... par la fonction f. On prendra bien garde au notation. La fonction s'appelle f tandis que $f(x)$ est le résultat de la transformation du réel x par la fonction f ; bref ! C'est un nombre réel.

Par exemple, si on défini la fonction f par la règle $f(x) = 3x + 4$ alors cette fonction transforme tout nombre réel en son triple augmenté de 4.

Quel est alors de résultat de la transformation du nombre -1 par f ? En d'autre terme que se passe-t-il si on remplace x par -1 ? La réponse est des plus savante : il faut remplacer x par -1 dans la règle qui définie la fonction ! En d'autre terme $f(-1) = 3 \times (-1) + 4$ puis de réaliser les opérations ce qui s'achève en $f(-1) = 1$. Ce qui se dit en "la fonction f transforme le nombre réel -1 en 1". Tout ceci semble un peu long ! Introduisons un petit peu de vocabulaire pour simplifier la partie.

Vocabulaire

L'image d'un réel x par une fonction f est le réel $f(x)$. Avec la fonction $f(x) = 3x + 4$ précédente, au lieu de dire "la fonction f transforme le nombre réel -1 en 1" on dira "l'image de -1 par f est 1" ce qui est donc la même chose que d'écrire $f(-1) = 1$.

Un antécédent d'un réel y par une fonction f est un réel x tel que $f(x) = y$. Avec la fonction $f(x) = 3x+4$ précédente, au lieu de dire "la fonction f transforme le nombre réel -1 en 1" on dira "un antécédent 1 par f est -1" ce qui est donc la même chose que d'écrire $f(-1) = 1$.

le domaine de définition est l'ensemble des valeurs possible pour la variable dans la définition de la fonction. A notre niveau, pour l'instant, nous n'avons que deux contraintes : en cas de présence d'une fraction, il faut interdire les valeurs qui annulent le dénominateur et en cas de présence de racine carré, il faut interdire les valeurs qui rendrait négatif l'expression sous la racine.

Dans notre exemple de la fonction $f(x) = 3x + 4$, puisqu'aucune des alertes précédentes n'apparait, il n'y a aucune contrainte et le domaine de définition de la fonction n'est donc pas limité ; c'est $\mathbb{R}$.

Si par exemple $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 10}}{x - 20}$ alors il faut d'une part ne pas annuler le dénominateur, ce qui n'arrive que lorsque $x = 20$ et ne jamais avoir $x - 10<0$ ce qui arrive pour les réels de l'intervalle $]-\infty; 10[$. En définitive il faut enlever à $\mathbb{R}$ ces impossibilités. On en conclut alors que le domaine de définition de cette fonction est $[10; 20[\cup]20; +\infty[$.

Attention ! On parle bien de LA image mais de UN antécédent. En effet, si on prend un nombre réel x dans le domaine de définition alors il a une et une seule image. Tandis que la recherche d'antécédent donne naissance à une équation qui peut avoir aucune, une, voir plusieurs solutions ! Par exemple, si g est une fonction définie par $g(x) = x^2 - 3x$ et que nous cherchons les antécédents (éventuels) de -2 alors nous sommes amené, par définition d'antécédent, à résoudre l'équation $g(x) = -2$ soit encore $x^2 - 3x = -2$ soit encore $x^2-3x+2 = 0$ ce qui se résout à l'aide d'un discriminant et aboutis à 1 et 2 comme solution. D'ailleurs on vérifie sans peine que $g(1) = 1^2 - 3(1) = -2$ et que $g(2) = 2^2 - 3(2) = -2$.

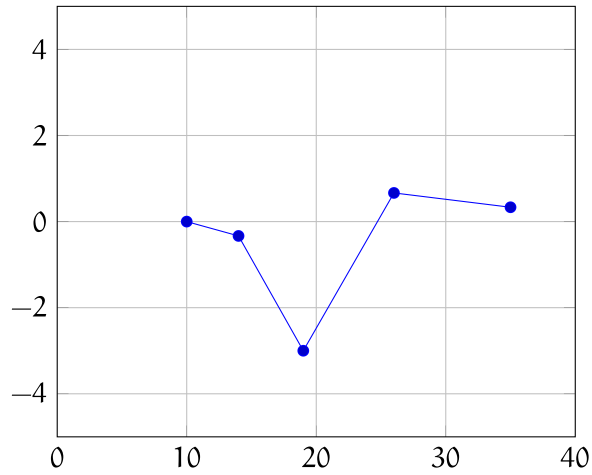
Représentation

Pour travailler avec les fonctions, il est d'accoutumer de les représenter dans un repère cartésien. Pour chaque valeur de x, dans le domaine de définition de la fonction, on marque, d'un point (ou d'une croix ou peu importe) le point du repère de coordonnée $(x, f(x))$ et on relie les points consécutifs.

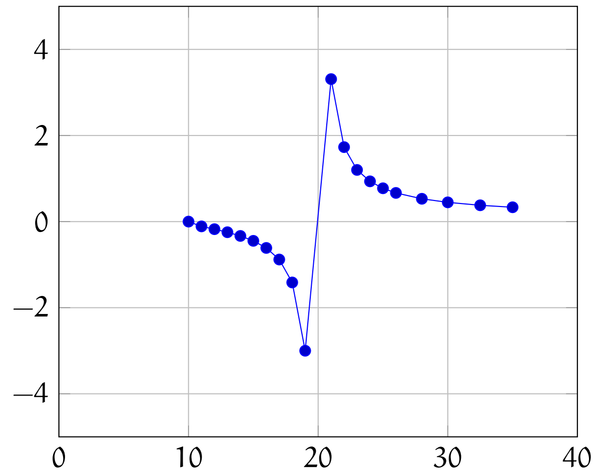
Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-10}}{x-20}$. On prend différente valeur et on place ces valeurs dans le repère :

x	10	14	19	26	35
$f(x)$	0	$-\dfrac{1}{3}$	-3	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

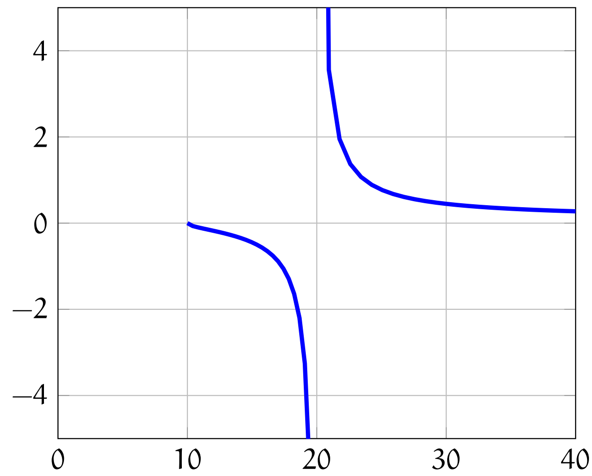
Ce qui correspond aux points suivants :



Plus on va avoir de point, plus la fonction sera dessiner de manière précise.

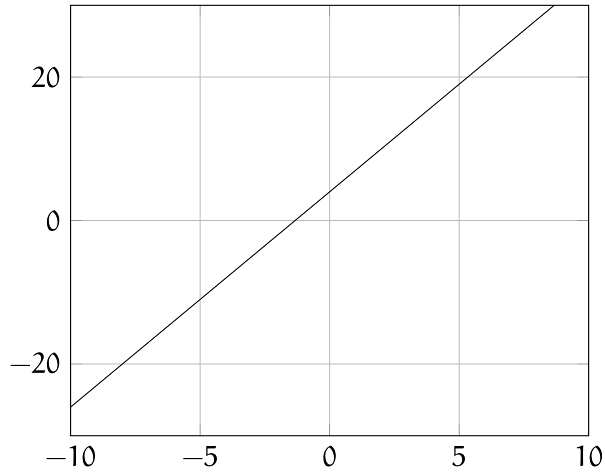


Avec un peu plus de point on arrive à ce qui est appelé le *graphe* de la fonction f ou *courbe représentative de la fonction* f :

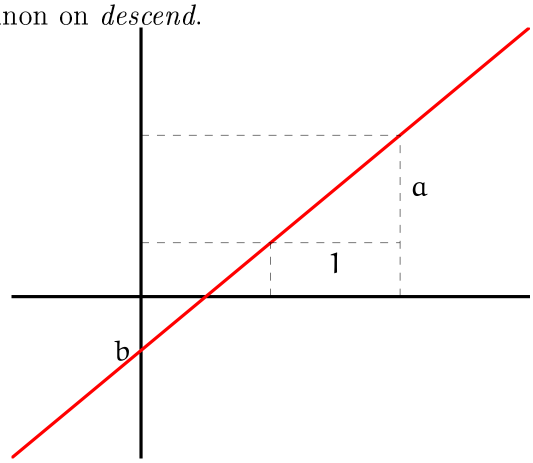


Fonctions de références

La droite est le nom de la courbe représentative de la *fonction affine* définie par $f(x) = ax + b$ sur $\mathbb{R}$. Dans une telle définition de fonction le nombre a est appelé le *coefficient directeur* de la droite tandis que b est appelé *l'ordonnée à l'origine*.



- L'ordonnée à l'origine indique le point d'intersection entre la droite et l'axe vertical appelé axe des ordonnées (d'où le nom *ordonnée à l'origine*). L'axe horizontale est appelé abscisse.
- Le coefficient directeur peu être aussi appelé *pente* de la droite. Si se place n'importe où sur la droite et qu'on se déplace de 1 vers la gauche alors on se trouve à une distance de a de la droite. Si le $a>0$ alors on *monte* sinon on *descend*.



Pour tracer une droite il suffit de calculer deux points. Par exemple si la fonction f est définie par la règle $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ il suffit de prendre deux valeur différentes pour x pour ensuite tracer la droite. Dans la pratique, on prend des valeurs *facile* pour x pour simplifier les calculs. Dans cette exemple on pourrait prendre $x = 0$ et $x = 2$ pour tracer la droite - les deux points seraient alors $(0, 1)$ et $(2, 0)$.

On peut aussi raisonner à l'envers : peut-on déterminer l'équation d'une droite qui passe par deux point du plans ?

Par exemple, si on souhaite déterminer l'équation d'une droite qui passe par $(2; 1)$ et $(1; -1)$, on cherche une fonction affine f, donc de la forme $f(x) = ax + b$ tel que $f(2) = 1$ et $f(1) = -1$. Cela donne naissance à deux équations : $1 = 2a+b$ et $-1 = a+b$. Ce qui est un système de deux équations à deux inconnues que nous pouvons résoudre sans trop de difficulté pour trouver $a = 2$ et $b = -3$. Finalement l'équation de la droite qui passe par $(2; 1)$ et $(1; -1)$ est $f(x) = 2x - 3$. Formalisons cela avec un théorème.

Théorème

Soient A et B deux points du plans de coordonnées respective $(x_A; y_A)$, (x_B, y_B) alors l'équation de la droite qui passe par ces deux points a pour coefficient directeur $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et l'équation de la droite est

$$f(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

Démonstration. On cherche à déterminer deux inconnue a et b tel que $f(x) = ax + b$, $f(x_A) = y_A$

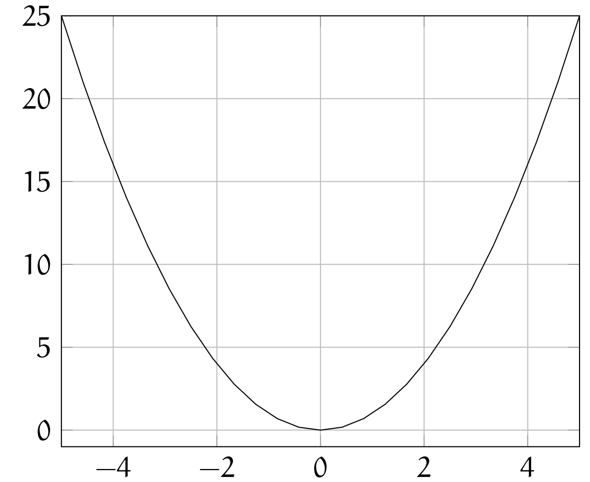
et $f(x_B) = y_B$. Cela donne naissance au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax_A + b & = & y_A \\ ax_B + b & = & y_B \end{array}\right.$$

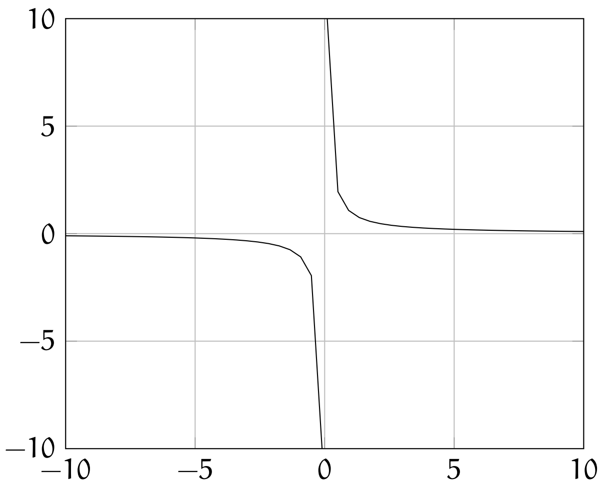
En réalisant la différence des deux lignes on arrive à $ax_B - ax_A = y_B - y_A$ soit encore $a(x_B - x_A) = y_B - y_A$ ce qui implique donc que $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Enfin, avec la première des deux équations on a $b = y_A - ax_A$ donc $f(x) = ax + (y_A - ax_A) = a(x - x_A) + y_A$. En remplaçant la valeur de a par celle déterminer précédemment on trouve la formule du théorème. $\square$

Bien sur si $x_A = x_B$ alors la droite est verticale et n'a donc pas d'expression fonctionnelle au sens où nous les définissons ici.

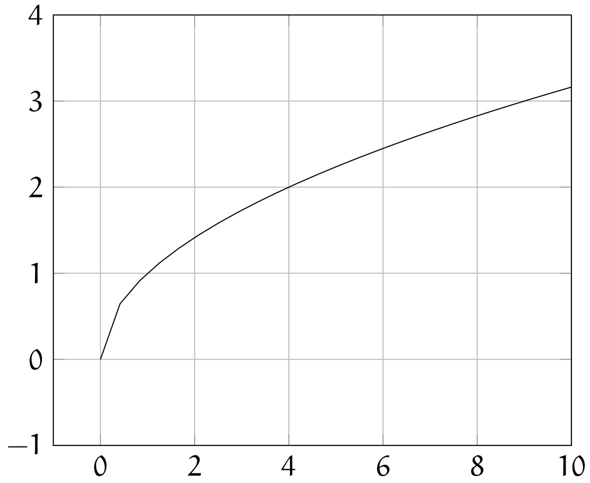
La parabole est le nom de la courbe représentative de la *fonction carré* définie par $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.



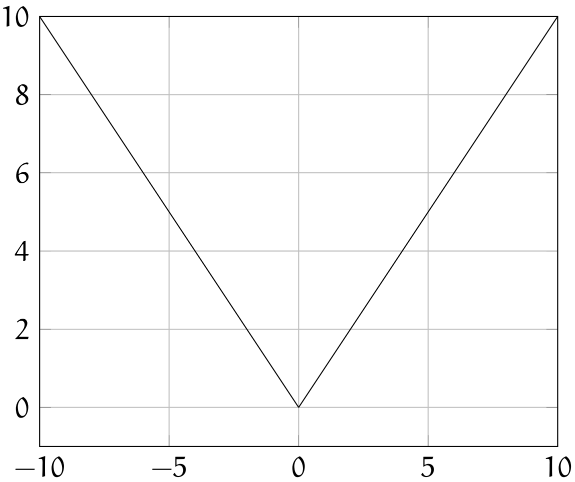
L'hyperbole est le nom de la courbe représentative de la *fonction inverse* définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.



La demi parabole couchée est le nom de la courbe représentative de la *fonction racine carré* définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.



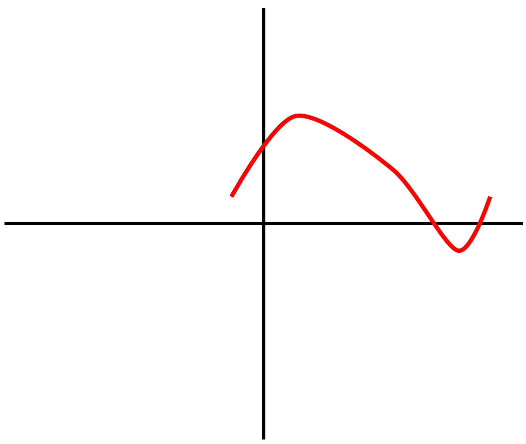
Les deux demi-droites est le nom de la courbe représentative de la *fonction valeur absolue* définie par $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$. La fonction valeur absolue peut formellement être définie à l'aide des autres fonctions de références car $|x| = \sqrt{x^2}$.



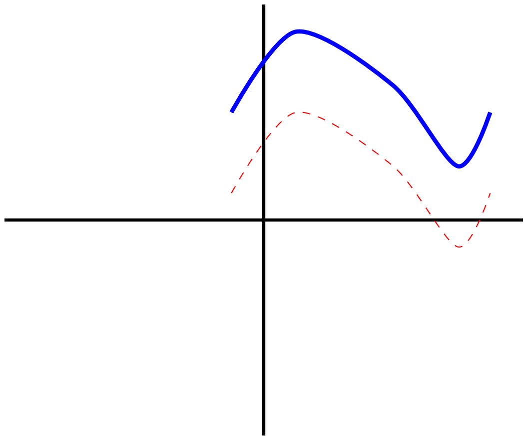
Translation

Si on considère le graphe d'une d'une fonction f on peut la faire glisser. Cela correspond à des opérations mathématiques dis de translation..

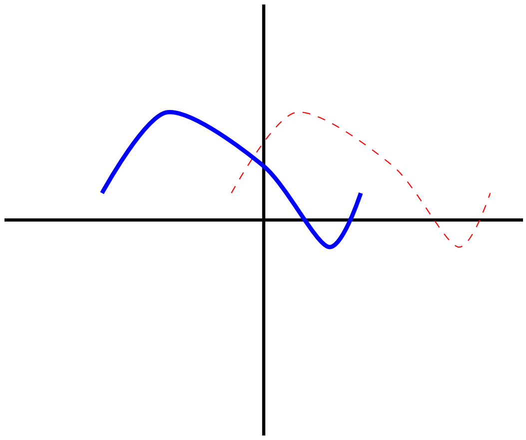
Considérons une fonction f dont le graphe est le suivant :



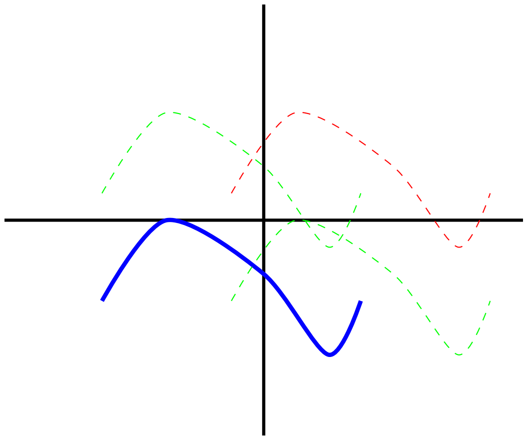
La fonction $g(x) = f(x) + \beta$ pour un certain nombre reél β correspond à un glissement de la courbe de f de β nombre réel le long de l'axe des ordonnées. Si β est positif se déplacement se fait vers le haut sinon vers le bas.



La fonction $g(x) = f(x - \alpha)$ pour un certain nombre reél α correspond à un glissement de la courbe de f de α nombre réel le long de l'axe des abscisses. Si α est positif se déplacement se fait vers la droite sinon vers la gauche.



On peut bien sur s'amuser à combiner les opérations de translations.



L'intérêt est d'essayer de se ramener aux fonctions classique. Par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ est le translaté de 1 vers la droite de la fonction $\dfrac{1}{x}$. Il s'agit donc d'une hyperbole.

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$. On peut observer sans trop de peine que $\dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{2x-2+1}{x-1} = \dfrac{2x-2}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ ce qui correspond au translaté de 1 vers droite et de 2 vers le haut de la fonction inverse. Il s'agit donc bien d'une hyperbole.

Théorème

La courbe représentative d'un polynôme de degrés 2 est, a translation prés, une pararbole.

Démonstration. En effet, d'apres le chapitre sur les polynôme de degrés 2, on a

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ce qui correspond bien au translaté de $\frac{b}{2a}$ vers la droite et de $\frac{\Delta}{4a^2}$ vers le bas de la fonction carré. La multiplication par a va *dilater* la courbe... oublions ça pour le moment. $\square$

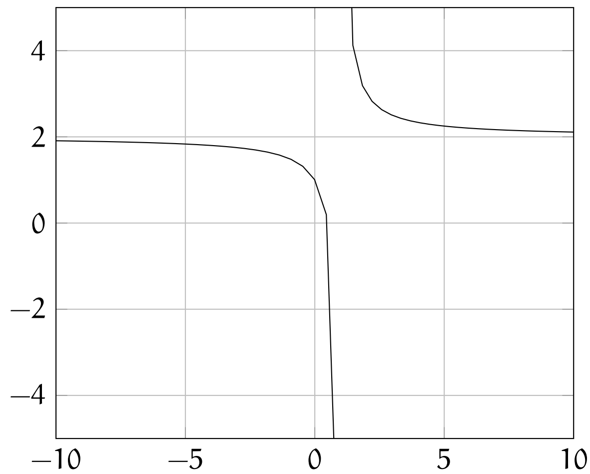
11. Limites

Rapprochons-nous sans toucher !

Reprenons l'exemple de l'une des dernières fonctions vu dans le précédent chapitre

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

Nous avions conclus, par diverse manipulation, que la courbe de la fonction f était une hyperbole. Précisément sa représentation est la suivante :



On observe que son domaine de définition est $\mathbb{R} - \{1\}$. En d'autre terme il est absolument interdit de calculer l'image du nombre réel 1. Par contre on peut essayer d'observer ce qui se passe lorsqu'on va se rapprocher de 1 sans le toucher (car c'est simplement interdit) ! Que vaut f en 0.9 puis en 0.99 puis en 0.999 etc. Ces valeurs sont permises. La seule qui est interdite c'est 1 et, mathématiquement en tout cas, $0.99999999 \neq 1$. Justement observons ces images :

$f(0.9) = -8$ $\quad$ $f(0.99) = -98$ $\quad$ $f(0.999) = -998$ $\quad$ $f(0.99999) = -99998$

Plus on se rapproche de 1, plus l'image est très petite. On devine que si on continue de la sorte on aura un nombre de plus en plus petit. "Au final", c'est à dire si on est juste à coté de 1, on touchera (presque) $-\infty$. Pour traduire cette idée on utilise la notion de limite. On note

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

On lit : *la limite de la fonction* f *lorsque* x *tend vers* 1 *est* $-\infty$.

Il faut bien faire attention : une limite donne l'idée du comportement de la fonction lorsqu'on se rapproche de la valeur mais sans l'atteindre.

Cette définition souffre d'un petit problème de déplacement. La notion de limite c'est "se rapprocher de" mais se rapprocher d'une nombre sur l'axe des réel peut se faire de deux façons : soit on se rapproche par derrière, comme nous l'avons fait dans notre exemple : nous avons observer le comportement de f lorsqu'on se rapprochait de 1 mais en étant toujours derrière 1 (à travers les valeurs 0.9, 0.99 etc.). Il est également possible d'observer ce qui se passe si on se rapproche de 1 par devant c'est à dire à travers l'observation du comportement de f sur des valeurs de la forme 1.01, 1.001 etc. Dans notre exemple on a

$f(1.1) = 12$ $\quad$ $f(1.01) = 102$ $\quad$ $f(1.001) = 1002$ $\quad$ $f(0.00001) = 100002$

Plus on se rapproche de 1 en restant plus grand, plus la fonction f se rapproche de $+\infty$. Ce que nous pouvons noter

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

Pour ne pas confondre les deux calculs, on va noter 1^+ pour signaler que l'on tend vers 1 par valeur supérieur, c'est à dire en étant toujours plus grand que 1 et 1^- pour signaler que la limite est par valeur inférieur. En résumé nous avons montré

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté ou de différence on note simplement $\lim_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x} = 2$. En effet, dans cet exemple que l'on se rapproche de 1 par valeur supérieur ou inférieur on a la même valeur qui est d'ailleurs la valeur de la fonction en 1

Limites usuelles

Si une fonction n'a pas de valeurs interdites alors elle n'a pas de problème pour le calcul de ses limites. La notion qui est caché derrière se *bon comportement* des fonction est la notion de continuité. Nous n'en dirons pas plus. A notre niveau toutes nos fonctions seront continue sur leur domaine de définition.

Théorème

Soit f une fonction définie (et continue) en $a \in \mathbb{R}$ dans le domaine de définition de la fonction, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Comme nous l'avons observer dans le paragraphe précédent $\lim_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x} = 2$.
Les cas problématiques viennent en générale des infinis.

Théorème

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ces 5 résultats suffisent pour calculer toute les limites que nous rencontrerons pour le moment. Mais il faut aussi, et surtout, savoir les manipuler.

Composition des limites

Nous venons de voir que la limite de $\dfrac{1}{x}$ en 0 donne de l'infini (signe à discuter suivant la précision faites dans le calcul de la limite). Comment, à partir de ce résultat pouvons nous calculer la limite de $\dfrac{1}{x-1}$ en 1^+.

La solution est la composition des limites. Lorsque que x se rapproche de 1 en restant supérieur, $x-1$ se rapproche de 0 en restant également supérieur. Autrement dis $\lim_{x \to 1^+} x-1 = 0^+$. Le théorème que nous avons vu au paragraphe précédent nous donne, en résumé, que $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$. On en déduit donc $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

C'est ce qu'on appel la composition des limites.

Traitons un autre exemple et déterminons la limites en 2^+ de $\dfrac{1}{4-2x}$. Lorsque x se rapproche de 2 en lui restant supérieur $2x$ se rapproche de 4 en lui restant également supérieur, donc par les règles sur les inégalités, $-2x$ se rapproche de -4 **en lui étant inférieur** donc $4-2x$ se rapproche de 0 en étant aussi inférieur. En conclusion $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{4-2x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Moralité : il suffit des 5 résultats de limites pour toutes les calculer !

Bon, non en fait on a aussi besoin de savoir additionner, multiplier, inverser etc des limites.

Opérations sur les limites

Inversion de limites. Inverser une limite est relativement facile si on garde en tête que l'inverse de 0 c'est de l'infini et que l'inverse de l'infini c'est 0.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$\pm\infty$	0

Somme de limite. L'addition de limite fait naitre un petit problème. Que donnera $+\infty - \infty$. Ne vous aventurez pas à dire 0. Car jouer avec les infinis est très risqué. C'est une source d'erreur fréquente de manipuler l'infini comme si c'était un nombre (aucun nombre ne vérifier $x+1=x$... sauf peut-être l'infini). Moralité : lorsqu'il y a de l'infini il faut être précautionneux. Certains résultat sont triviaux : $+\infty+\infty=+\infty$ puisque ajouter un "nombre" immensément grand un autre "nombre" immensément grand donne un "nombre" immensément grand.

Que pouvons-nous dire alors de $+\infty-\infty$. Réponse : rien ! Nous ne pouvons pas, uniquement avec ce calcul, déduire la valeur de la limite. On dis qu'il s'agit d'une **forme indéterminée**. Attention *forme indéterminée* n'est pas une réponse. Cela est une alerte dans le calcul pour sous signaler que vous ne pouvez pas utiliser les règles que nous détaillons ici.

Comment résoudre une limite faisant apparaitre une forme indéterminée ? Il faut manipuler l'expression pour lever l'indétermination. Par exemple $f(x)=x$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et la fonction $g(x)=1-x$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. La somme des limites donne une forme indéterminée : il n'est pas possible de dire immédiatement, avec les limites de f et de g la limite de $f+g$. Dans cet exemple ci, nous pouvons observer que $f(x)+g(x)=1$ et donc que la limite tend vers 1.

Mise à part ce problème la somme de limite se passe très bien !

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$
l	l'	$l+l'$
l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit d'une limite par un nombre. Si on multiplie une fonction par un nombre (non nul sinon ça n'a pas d'intérêt) alors la limite est aussi multipliée. Il faut *juste* faire attention à la règle des signes avec les infinis.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \lambda f(x)$
l	λl
$+\infty$	$+\infty$ si $\lambda > 0$
$+\infty$	$-\infty$ si $\lambda < 0$
$-\infty$	$-\infty$ si $\lambda > 0$
$-\infty$	$+\infty$ si $\lambda < 0$

Produit de deux limites. Une nouvelle *forme indéterminée* fait son apparition $0\times\infty$. Si par exemple la fonction $f(x)=x$ et la fonction $g(x)=\frac{42}{x}$ alors la limite en $+\infty$ de f est $+\infty$ et la limite de g est 0. Puisque c'est une forme indéterminée, nous ne pouvons pas en déduire la limite d produit par de simple résultat calculatoire sur les limites. Cependant on observe que $f(x)g(x) = 42$ ainsi la limite tend vers 42.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} f(x) \times g(x)$
l	l'	$l \times l'$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	F.I.

Quotient de deux limites. Un quotient n'est rien d'autre qu'un produit avec un inverse : $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$. Puisque nous savons inverser des limites et faire le produit de limite alors nous savons faire un quotient. Attention cependant cela allonge la liste des formes indéterminées. Deux de plus s'y ajoute. En effet on a

$$\frac{0}{0} = 0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty = \text{F.I.}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \infty \times \frac{1}{\infty} = \infty \times 0 = \text{F.I.}$$

Attention les deux petits calculs précédents sont essentiellement à but pédagogique. D'une part, comme il a déjà été dis, il faut être très précautionneux en manipulant les infinis et d'autre part *F.I.* n'est en aucun cas une réponse à un calcul de limite. C'est juste une alerte pour dire *il faut trouver un idée pour qu'il n'y ai plus de problème.*

En conclusion de toutes ces formules (qu'il faut connaitre... désolé), il faut retenir que l'on peut faire ce qu'on veux avec les limites (addition, soustraction etc...) sauf dans 4 cas qui nécessite une attention particulière (c'est la forme poétique de "il faut avoir une idée") qui sont les 4 formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Des exemples ! Sur place s'il vous plait.

Déterminons $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-x}$.

Pour calculer une telle limite, nous allons appliquer un quotient de limite. La limite du numérateur est trivialement $+\infty$. Pour le dénominateur, nous aboutissons malheureusement à une forme indéterminée puisque nous essayons d'appliquer une somme de limite entre x^2 qui tend vers $+\infty$ et $-x$ qui tend vers $-\infty$. L'idée que nous pouvons avoir pour ce dénominateur est de factoriser par x. Dans ce cas $x^2 - x = x(x-1)$. Par produit de limite on en déduit que le dénominateur tend vers $+\infty$. Et ceci ne nous arrange toujours pas puisque obtenons la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

L'idée est ici de factoriser aussi au numérateur par x. Le problème c'est que x n'est pas un facteur commun des termes de l'expression $x+1$. Qu'a cela ne tienne ! Nous pouvons toujours écrire $1 = x \times \frac{1}{x}$. L'intérêt d'une telle folie est que la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{x}$ est 0. Détaillons le calcul :

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x(x-1)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{x-1}$$

Si nous retentons le calcul de la limite dans la dernière forme trouvée de cette expression nous avons que le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers $+\infty$ ce qui donne 0.

En fait, l'idée de la factorisation par la plus grande puissance de x sera toujours une bonne aide pour le calcul des limites en ∞.

Les polynômes en l'infini

Théorème

La limite en plus ou moins l'infini d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degrés.

Démonstration. On observe que

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x^1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Mais chaque terme de la forme $\dfrac{a_i}{a_n x^{n-i}}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. Il ne reste que le facteur $a_n x^n$ à gauche et le 1 à droite. $\square$

En application on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \times 1}{x^2 \times 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Le changement de variable

En reprenant la définition de limite nous avons vu qu'il s'agit d'observer le comportement d'une fonction lorsque l'on se rapproche d'une valeur et nous avions observer qu'il y avait deux manière de se rapprocher d'une valeur : soit en lui étant supérieur soit en lui étant inférieur.

Il s'agit en fait d'un petit raccourci pédagogique. Dans la pratique on peut se rapprocher d'une valeur n'importe comment du moment que l'on reste dans le domaine de définition.

Prenons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et déterminons sa limite en $-\infty$. Par diverse manipulation algébrique nous pouvons montrer que $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Le calcul en $-\infty$ ne souffre ici d'aucun problème en trouve que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Mais il est possible de faire ce qui est appelé un *changement de variable*, c'est à dire se rapprocher de $-\infty$ mais en suivant un autre chemin. Par exemple nous pouvons choisir de se rapprocher de $-\infty$ en suivant le chemin $\dfrac{1}{x+1}$.

Cela correspondre à dire que nous n'allons pas regarder x mais $\dfrac{1}{x+1}$. On pose donc $X = \dfrac{1}{x+1}$ ainsi dans l'expression du calcul de la limite il faut remplacer tous les x en X qui est notre nouveau chemin de parcours. Ainsi

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - X$$

De plus si $x \to -\infty$ alors $X \to 0^-$. On écrit alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{X\to 0^-} 1 - X = 1$ (on retrouve bien le même résultat).

Autre exemple : en posant $X = 1 - x$ on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \lim_{X\to 0^-} \frac{1}{X} = -\infty$

A quoi ça sert les math ?

Cette question est tout à fait légitime et trouve de nombreuses réponses qui dépendent du champ des mathématiques dont on parle, de la personne qui pose la question ou de la personne qui répond.

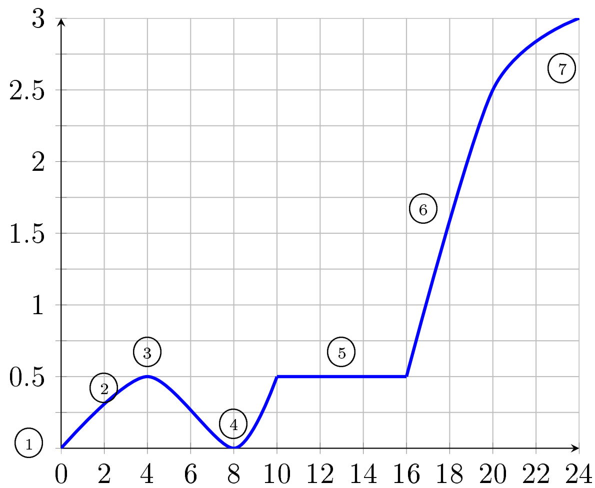
Une des réponses les plus élégante serait de commencer à dire que les mathématiques, avant d'être une science à part, étaient considérées comme un outil pour les autres sciences. Nombreux scientifiques de l'époque étaient physiciens ou chimistes en même temps qu'ils étaient mathématiciens. Par exemple, Gauss dont nous avons parler dans le chapitre sur la résolution des systèmes était astronome de métier. Il n'en est pas moins appeler *le prince des mathématiques* aujourd'hui.

Pour parler de ce nouveau chapitre nous allons nous immerger très légèrement dans le monde de la physique et essayer ensemble de faire comme nos ancêtres et réinventer la *dérivation*.

Nous allons parler de vitesse. La vitesse mesure la distance parcouru en un laps de temps donnée.

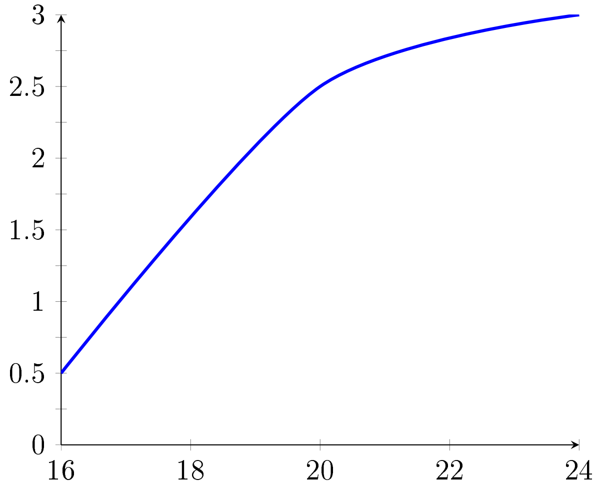
Sur le graphique ci dessous, il vous est représenté le parcours de votre serviteur depuis chez lui jusqu'au marché de la ville. En abscisse le temps mesuré en minute, en ordonnée la distance parcouru mesurée en kilomètre. La petite histoire de ce graphique est la suivante :

1. Je part de chez moi.
2. Je me rend à pied jusqu'à l'arrêt de bus.
3. Je me rend compte que j'ai oublié de prendre un ticket de bus je rentre chez moi le prendre.
4. Je repart immédiatement de chez moi vers l'arrêt de bus en courant pour ne pas le rater.
5. J'ai raté le bus et je dois donc en attendre un autre.
6. Le bus arrive, je monte dedans et me laisse transporter jusqu'à la station "Mairie".
7. Une fois arriver je marche tranquillement vers la place du marché (pour me rendre compte que nous sommes vendredi et qu'il n'y a pas marché `#vecu`).

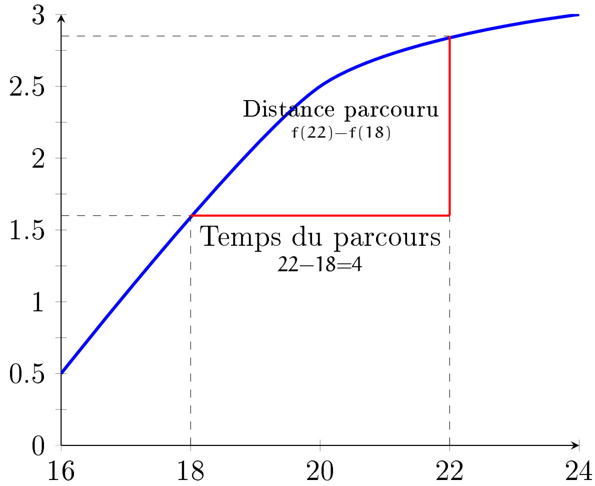


Malgré le périple, il m'a fallut 24 minutes pour parcourir les 3 kilomètres qui me sépare du marché. La vitesse est la distance par rapport au temps. Ici $\frac{3\text{km}}{24\text{min}}$. Multiplions par $2,5$ au numérateur et dénominateur pour obtenir $\frac{7,5\text{km}}{60\text{min}}$ soit $7,5$ km/h. Cette information est quelques peu trompeuse. En tant que marcheur $7,5$ km/h est une marche très sportive, mais pour le bus $7,5$ km/h est très mauvais. Poser une question de raffinement sur ces information cinétique équivaut à se poser une question du genre : quelle était ma vitesse 20 minutes après mon départ ?

Pour comprendre cela isolons les dernières minutes de mon trajet (parties 6 et 7) :



La vitesse moyenne uniquement sur cette portion correspond toujours à la distance, ici $2,5$ km par rapport au temps, ici 8 minutes. Cela correspond à une vitesse de $18,75$km/h. Rapprochons-nous un peu plus du 20 pour déterminer la vitesse à la 20ième minutes. Pour généraliser un peu plus imaginons que le graphe soit le dessin de la courbe représentative d'une fonction f.



Dans ce cas, comme toujours d'ailleurs, la vitesse est la distance parcouru sur le temps de parcours soit $\dfrac{f(22)-f(18)}{22-18}$. Et comme c'est le but ici on souhaite se rapprocher de 20. Nous avons vu dans le précédent chapitre que "se rapprocher de" se traduisait mathématiquement par la notion de limite. On définie donc la vitesse instantanée, qui s'oppose à la vitesse moyenne, comme la vitesse moyenne infiniment proche de la valeur cherchée. Si cette limite existe (dans le sens ou la limite inférieur et supérieur sont les même et sont finies) on dira que la fonction est dérivable.

Définition

Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ de son domaine de définition. Si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et que ces deux limites sont finies, alors on appellera la valeur de ces limites la *dérivé de la fonction* f *en* a que l'on notera $f'(a)$. Précisément :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Quelque soit la fonction que nous traitons, cette limite est toujours une forme indéterminée (de la forme $0/0$). Ca serait beaucoup moins intéressant sinon ^_^.

Par exemple dérivons en $a = 3$ la fonction $f(x) = x^2$. Revenons à la définition et essayons de simplifier la limite, qui est malheureusement par construction, toujours une forme indéterminée. Ici l'idée est d'utiliser une identité remarquable.

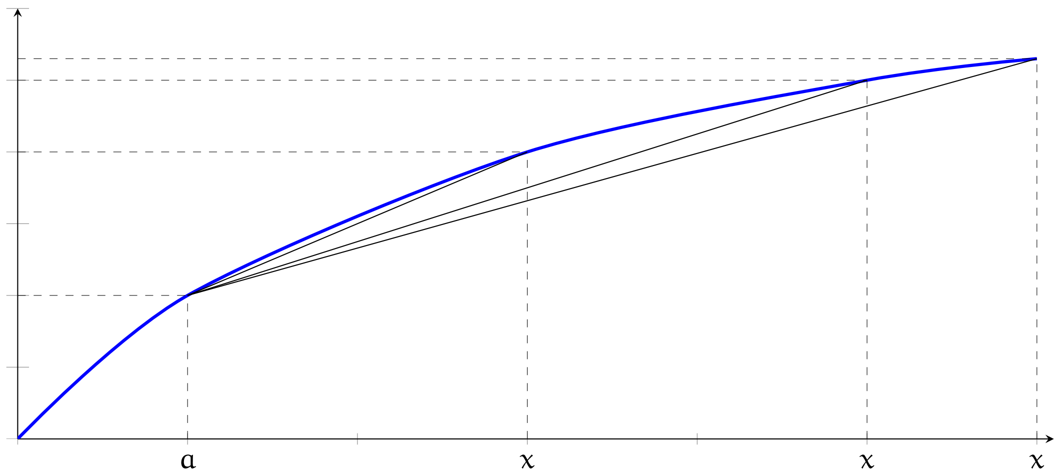
$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} (x+3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Conclusion $f'(3) = 6$.

Nous venons de voir la définition qui en tant que tel n'est pas évidente de prime abord. Et nous espérons que vous l'aurez compris, ça sert à calculer la vitesse instantanée. Mais tout ce travail pour calculer une vitesse serait un peu trop de gâchis de concept mathématiques. Puis surtout, en pratique comme procède t-on au calcul ? Les réponses arrivent !

Tangente

Continuons sur notre lancée théorique avant de passer à la pratique et observons un peu plus en détail ce nouveau jouet qu'est la définition de la dérivé.



Sur ce graphique, on observe que plus x se rapproche de a plus les droites (en noire - on les appelle savamment des cordes) vont se retrouver collées à la courbe. A la limite, de tel droite collée à la courbe, sont appelée des *tangente*.

Quelle est l'équation de la droite qui passe par les points de coordonnée $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ sachant que x se destine à se rapprocher de a ?

D'après les précédents chapitres nous avons vus que cette droite a pour équation

$$Y = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(X - a) + f(a)$$

Les variables X et Y permettent de donner l'équation de la droite tandis que x désigne un réel de l'axe des abscisses. Il suffit de passer à la limite lorsque $x \to a$ pour déterminer l'équation de la tangente.

Définition

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f définie en un réel a est donnée par

$$T_a \quad : \quad Y = f'(a)(X - a) + f(a)$$

Par exemple la tangente de la fonction carré en $a = 3$ est $T_3 : \ y = 6(x-3) + 3^2 = 6x - 9$

Dérivées usuelles et fonctions dérivées

Dans le calcul que nous avions fait dans les paragraphes précédents pour calculer la dérivée de la fonction carré en 3, que l'on ai mis un 3 ou un 42 ça ne change pas le travail :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (x+a) \\ &= 2a \end{aligned}$$

Le cas de la fonction carré est réglé ! C'est l'occasion de parler de **fonction dérivée**.

Définition

La fonction dérivée d'une fonction f est la fonction notée f' tel que la valeur de f' en a est le nombre dérivé de la fonction f en a.

Nous avons par exemple montré que la fonction dérivée de la fonction carré est $f'(x) = 2x$.

Qu'en est-il de la fonction cube $g(x) = x^3$. Abracadabra ! Voici une formule sorti de nul part : $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Attaquons à présent le calcul de la limite :

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (x^2+ax+a^2) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

En conclusion $g'(x) = 3x^2$.

Commençons par faire peur : OUI ! Pour calculer des dérivées (en tant que fonction ou valeur numérique) il n'y a pas d'autre solution que de passer par la définition de limite ! Mais pas d'inquiétude. Beaucoup de mathématiciens ont établis un formulaire recensant les dérivées des fonctions usuelles (et oui, il faut les apprendre et les connaitre par cœur) :

Proposition

Soit n un entier strictement positif et k un nombre réel alors

$$\begin{aligned} f(x) = k &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = 0 \\ f(x) = x^n &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = \frac{1}{x^n} &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} \\ f(x) = \sqrt{x} &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

On retrouve par exemple les formules que nous avons trouvé à l'aide du calcul de limite sur les fonctions carré et cube.

Opérations sur les dérivées

Et si nous souhaitions dériver la fonction $x+1$? Nous savons dérivé $x = x^1$ qui admet $1x^0 = 1$ comme dérivé et la dérivé du nombre réel 1 est 0. Qu'en est-il de la somme ?

Proposition

$$(f+g)' = f' + g'$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette formule on prouve le résultat.

$$\frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

□

Ainsi la fonction dérivée de x^2+x+1 est $2x+1$.
Qu'en est-il de la fonction dérivée de la $x^2-3x+\frac{1}{x}$. Les précédents résultats nous donnent

$$\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' - (3x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - (3x)' - \frac{1}{x^2}$$

Réglons le problème de $(3x)'$ à coup de théorème !

Proposition

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette formule on prouve le résultat.

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

□

En d'autre terme la dérivé de $3x$ c'est 3 fois la dérivée de x (qui est 1). Au final

$$\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)' = 2x-3-\frac{1}{x^2}$$

Et qu'en est-il de la fonction dérivée de $(\sqrt{x}+1)\times\frac{1}{x}$. Bon soyons claire : ca va commencer a devenir n'importe quoi, mais ça marche !

Proposition

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette égalité on prouve le résultat :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)}{x-a} + \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

□

Ainsi

$$\begin{aligned}\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' &= (\sqrt{x}+1)'\frac{1}{x}+(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x}+(\sqrt{x}+1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

En conclusion $\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}$ (les plus savant pour chercher à simplifier davantage cette dérivée et montrer que $\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' = -\frac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$ en utilisant le fait que $\sqrt{x}^2 = x$).

Et qu'en est-il de la fonction dérivée de la fonction $\frac{x}{x+1}$?

Proposition

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette égalité on prouve le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{\frac{f(x)g(a)}{g(x)g(a)}-\frac{g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x-a)}+\frac{f(a)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x-a)}-\frac{f(a)g(x)-g(a)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= g(a)\frac{f(x)-f(a)}{g(x)g(a)(x-a)}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}\end{aligned}$$

□

Sur notre exemple

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x+1}\right)' &= \frac{(x)'(x+1)-(x+1)'(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Et qu'en est-il de la fonction dérivé de $\sqrt{x^2+x}$?

Proposition

$$(f(g))' = f'(g) \times g'$$

Démonstration. On a

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

D'un coté $\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$ de l'autre coté en effectuant le changement de variable $y = g(x)$ on a, par définition du nombre dérivée $\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{y \to g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = f'(g(a))$. □

Ainsi $(\sqrt{x^2 + x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \times (x^2 + x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \times (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

En particulier ce dernier résultat permet d'obtenir un petit peu plus de formule de dérivation (il n'y en avait pas assez comme ça!)

Corollaire

Soient n un entier strictement positif u une fonction

$$f(x) = u(x)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nu(x)^{n-1} \times u'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{u(x)^n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{n}{u(x)^{n+1}} \times u'(x)$$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$$

Par exemple déterminons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ en $a = 0$. D'après les paragraphes précédents $T_0 :\ y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. D'une part $f'(x) = x - 1$ d'où $f'(0) = -1$ et d'autre part $f(0) = 1$. En conclusion l'équation de la tangente est $y = -x + 1$.

Variations et dérivations

Lorsque l'on se donne une fonction, on souhaite l'étudier. Ce que nous avons déja explorer avec l'étude du domaine de définition ou des translations de fonction de références. D'autre informations son a extraire de la fonction. L'une d'elle est ce que l'on appelle les *variations* de la fonction ce qui se traduit vulgairement par : quand est-ce que la fonction monte et quand-est-ce qu'elle descend.

Définition

- On dira qu'une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.

Plaçons nous par exemple sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et étudions les variations de la fonction $f(x) = x^2$. Soit $0 < \alpha < \beta$ alors

$$f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Puisque α et β sont tout deux positifs alors $\alpha + \beta > 0$ et puisque $\alpha < \beta$ alors $\alpha - \beta < 0$. La règle des signes nous donne donc que $\alpha^2 - \beta^2$ est négatif soit encore $f(\alpha) < f(\beta)$ et donc que la fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

On montrerai de même que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Pour compiler ces informations de variation on réalise un *tableau de variation* qui comporte deux lignes : une ligne pour spécifier les valeurs de x classer dans l'ordre croissant, comme pour les tableaux de signe et une seconde ligne représentant les variations par des flèches qui montent pour signaler la croissance ou qui descende pour signaler la décroissance.

Le tableau de variation de la fonction carré est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$		$\nearrow$	

On complète souvent le tableau de variation en mettant les valeurs des limites au bout des flèches :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cet exemple était assez facile. Les droites, c'est à dire les fonctions affines ont aussi des variations faciles à étudier.

Proposition

Soit f une fonction affine de coefficient directeur a.

- Si $a > 0$ la droite est strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $a < 0$ la droite est strictement décroissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

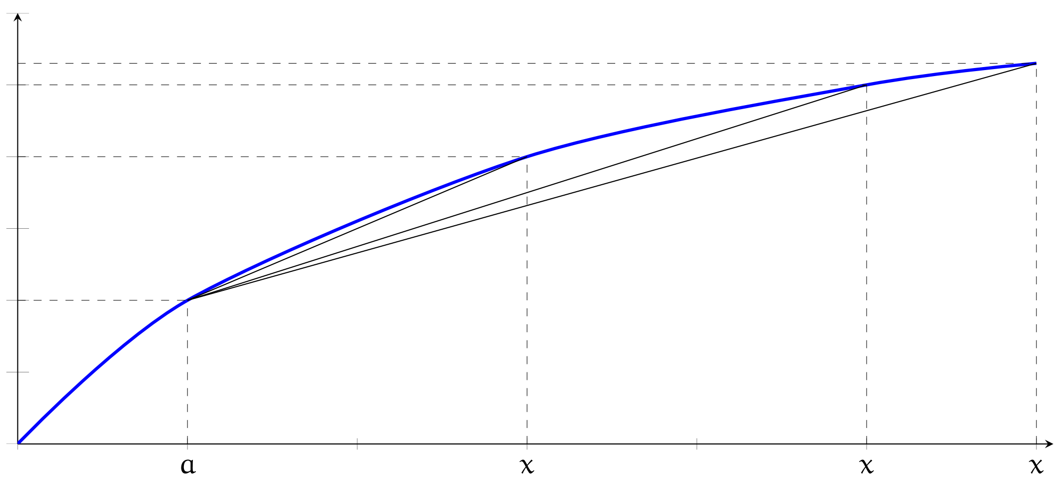
- Si $a = 0$ la droite est constante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	k	$\longrightarrow$	k

où $f(x) = k$

En se servant des variations des droites ainsi que du lien entre tangente et dérivation, nous pouvons obtenir les variations d'une fonction.

Reprenons le graphique qui nous a mené à la notion de tangente



Les droites successives, qui tendent vers la tangente, sont toutes croissante car le coefficient directeur est $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif puisque $a < x$ et que la fonction f est croissante. A la limite ce caractère sera conservé. Cela permet d'en déduire le théorème suivant.

Théorème

- Si f' existe et est positive sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.
- Si f' existe et est négative sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.

Autrement dis : étudier les variations d'une fonction reviens à étudier le signe de sa dérivé.

La dérivé de la fonction $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$. Naturellement $2x$ est positif lorsque x est positif donc la fonction f sera croissante sur cet intervalle ce que nous avions déjà déterminer.

Exemple

Étudions la fonction $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$.

Nous voyons une fraction, il faut donc que le dénominateur, $x^2 - 1$, ne s'annule pas. En utilisant une identité remarquable ou une les formules de calculs des racines pour les polynômes de degrés 2, nous pouvons rapidement conclure que le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. Le but étant de déterminer le signe de la dérivé, c'est à dire de résoudre une inéquation de la forme $f'(x) > 0$, nous allons calculer la dérivée et la factoriser au maximum.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{(x)'(x^2-1) - (x^2-1)x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)^2 + 1(x^2-1) - 2xx}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)^2 + x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Nous allons a présent dresser le tableau de signe et par la même le tableau de variation. La forme est donc la suivante.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2							
x^2-3							
$(x^2-1)^2$							
f'							
f							

Dans le tableau de variation comme dans les tableaux de signe on signale les valeurs interdites par une double barre.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2							0						
x^2-3			0								0		
$(x^2-1)^2$					0				0				
f'			0		$\|$		0		$\|$		0		
f					$\|$				$\|$				

En complétant les signes on arrive à

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f					$\|$				$\|$				

D'après le cours, une dérivée positive donner une fonction croissante et inversement, ce qui permet d'arriver aux variations suivantes :

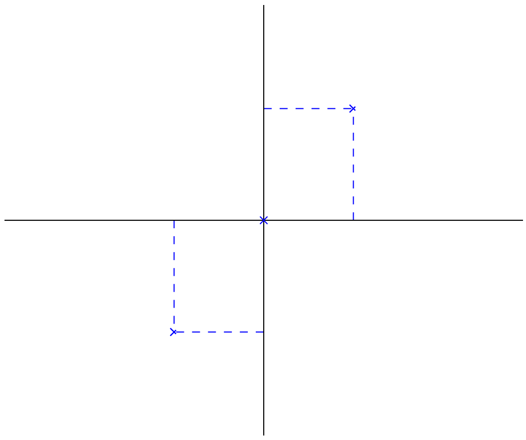
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|$		$\searrow$		$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Une étude de limite permet alors de finaliser le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

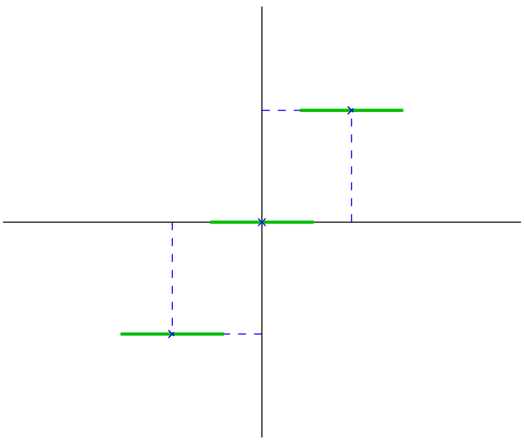
Le tableau de variation suffit en générale pour donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

D'une part les valeurs finie de la fonction donne des point de passage. Dans notre exemple nous savons que la courbe passera par les points $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$ et $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

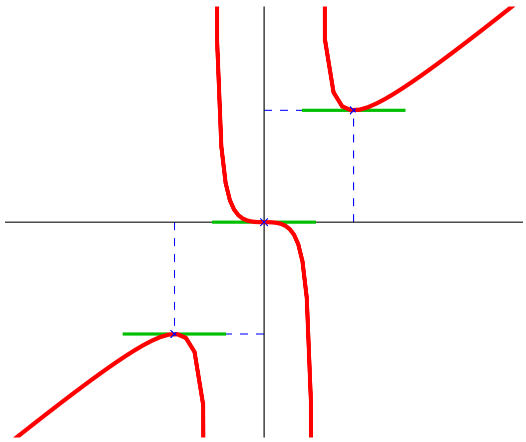


De plus, par construction, le coefficient directeur d'une tangente est le nombre dérivé. Lorsque la dérivée s'annule, on en déduit que la tangente est horizontale. Cela donnera une information sur le comportement autour de la tangente puisque par définition de *tangente*, cette droite "frôle" la courbe. Ainsi la courbe sera horizontale autour des tangente horizontale !

On trace donc des morceaux de droite horizontale lorsque la dérivée s'annule :



Pour obtenir finalement



13. Asymptotes

Qu'est-ce qu'une asymptote ?

Étymologiquement, le mot *asymptote* viens de l'ancien grec asùmptôtos signifiant "*qui ne s'affaisse pas*" ou "*qui ne coïncide pas*".

Dans le cadre mathématiques, une asymptote donne une information infinitésimale de l'objet d'étude. Dans notre contexte, l'objet d'étude est *la fonction* ou plus précisément l'objet géométrique qui en découle : sa courbe représentative. Obtenir une information asymptotique permet de simplifier la compréhension de la courbe.

Nous ne nous intéresserons qu'aux droites asymptotes. On en distingue trois :

— Asymptote horizontale, d'équation $y = b$

— Asymptote verticale, d'équation $x = a$

— Asymptote oblique, d'équation $y = ax + b$

Dans la suite on considère $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f. Attention, on parle d'asymptote à une courbe qui est un objet de la géométrie et non de la fonction f qui est un objet de l'analyse.

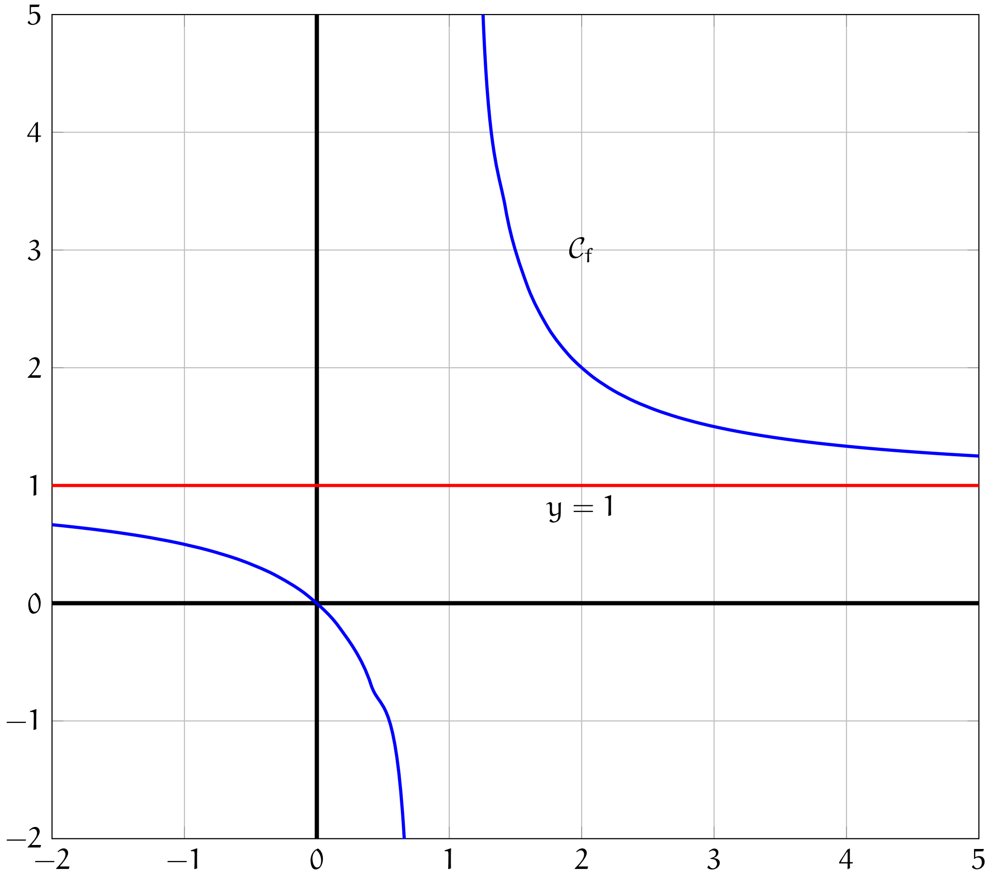
Asymptote horizontale

Définition

- On dira que la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale en** $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.
- On dira que la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale en** $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

Il est bien sur possible qu'un asymptote en $-\infty$ soit aussi une asymptote en $+\infty$.

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. On trouve assez rapidement $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe. Sur la graphique on a :

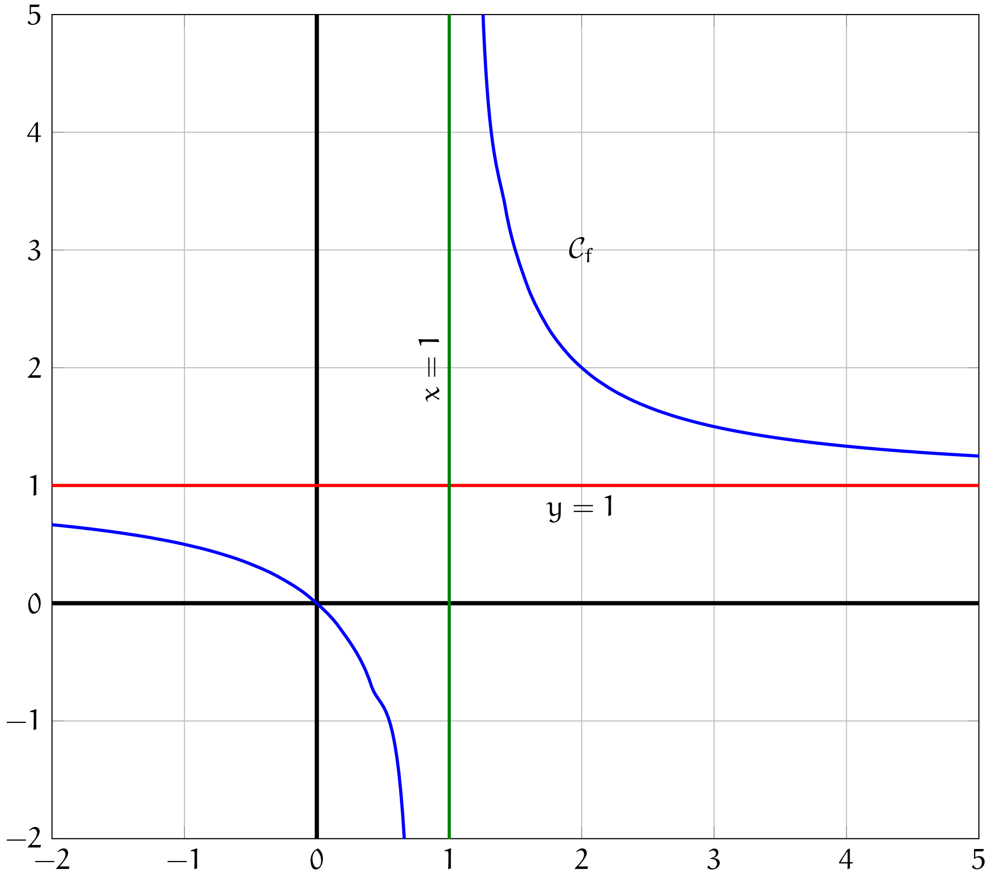


Asymptote verticale

Définition

On dira la droite $x = a$ est une **asymptote verticale** si $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Reprenons l'exemple précédent avec $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. On vois assez rapidement que $\lim\limits_{x \to 1^{+}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^{-}} f(x) = -\infty$. On en déduit donc que la droite $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_{\{}$. Sur le dessin cela donne



Asymptote oblique

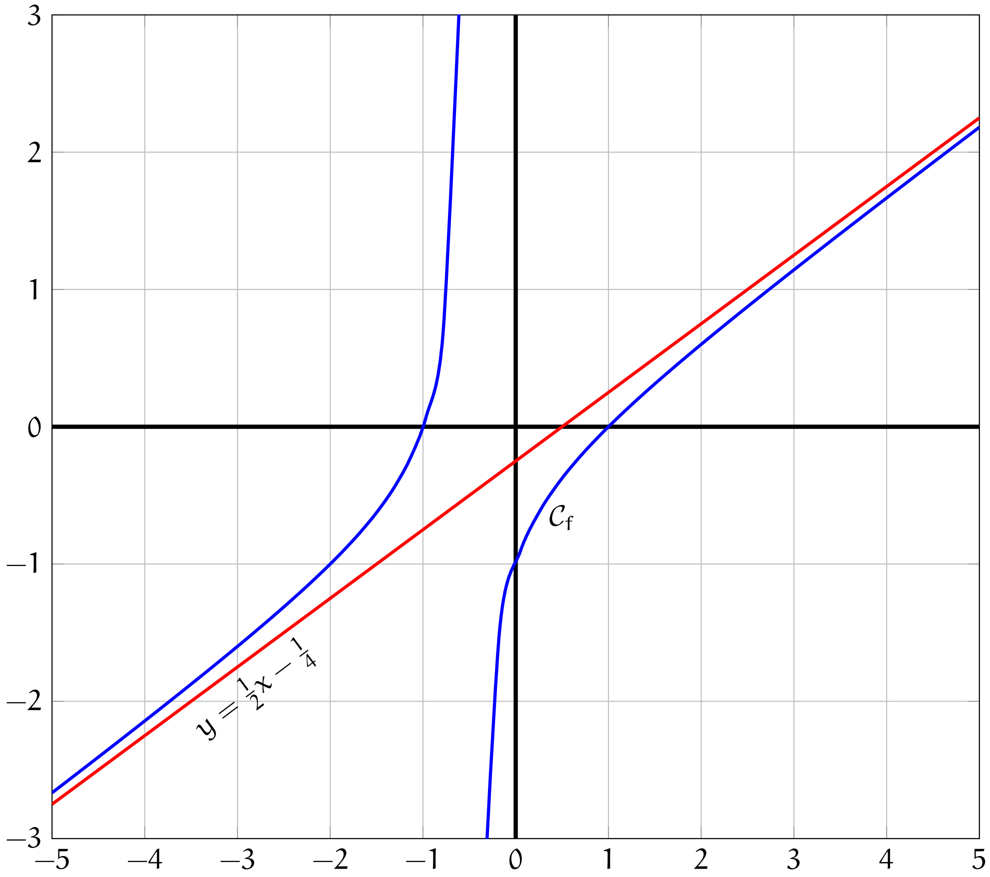
Définition

- On dira que la droite $y = ax + b$ est une **asymptote oblique en** $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.
- On dira que la droite $y = ax + b$ est une **asymptote oblique en** $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$ et montrons que la droite $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$).

$$
\begin{aligned}
f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) &= \frac{x^2 - 1}{2x + 1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
&= \frac{4(x^2 - 1)}{4(2x + 1)} - \frac{2x(2x + 1)}{4(2x + 1)} + \frac{2x + 1}{4(2x + 1)} \\
&= \frac{4(x^2 - 1) - 2x(2x + 1) + (2x + 1)}{4(2x + 1)} \\
&= \frac{4x^2 - 4 - 4x^2 - 2x + 2x + 1}{4(2x + 1)} \\
&= \frac{-3}{4(2x + 1)}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3}{4(2x + 1)} = 0$ ce qui prouve que la droite $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique.


3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
$\mathcal{C}_f$
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Déterminer une asymptote oblique

Intéressons nous de plus près aux asymptotes obliques. Dans l'exemple précédent, l'asymptote a été donné. La seule chose à vérifier c'est que la différence tendait bien vers 0. Nous allons ici détailler la méthode permettant de déterminer l'équation d'une asymptote oblique. On notera simplement ∞ pour les calculs de limite sans préciser + ou −, les résultat étant les même.

> **Théorème**
>
> **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ alors
>
> **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
>
> **Sinon** la courbe n'admet pas de droite asymptote oblique.
>
> **Sinon** la courbe n'admet pas de droite asymptote oblique.

Reprenons l'exemple précédent avec la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$.

La première étape est de calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-1}{2x+1}}{x} = \frac{x^2-1}{2x^2+x}$$

Et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+x} = \dfrac{1}{2}$.
La seconde étape consiste à calculer la limite de $f(x) - ax$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2-1}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{2(x^2-1) - x(2x+1)}{2(2x+1)} = \frac{2x^2-2-2x^2-x}{4x+2} = \frac{-2-x}{4x+2}$$

Et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \dfrac{1}{2}x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2-x}{4x+2} = -\dfrac{1}{4}$ ce qui prouve que $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Des asymptotes qui ne sont pas des droites

Cette partie est hors programme

Être asymptote c'est être comme la courbe mais en plus simple. Dans l'exemple précédent la fonction "difficile" $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$ va se comporter en l'infini comme la droite $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

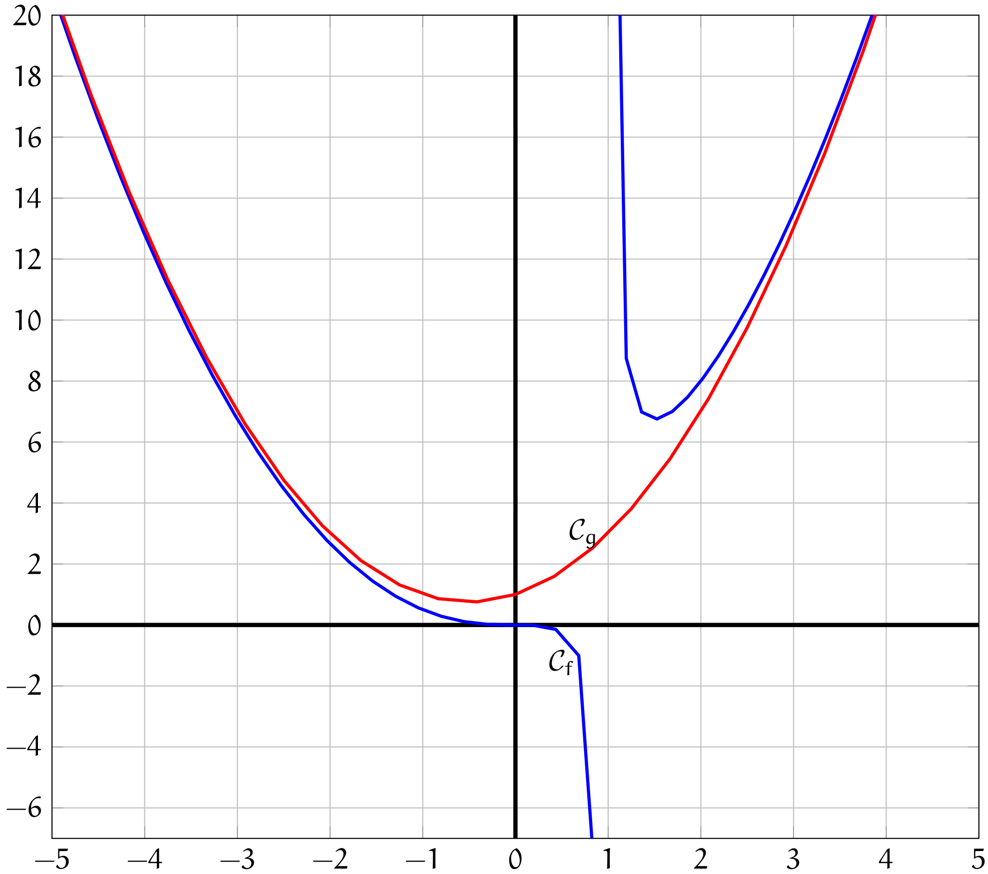
Il est possible que ça ne soit pas des droites mais d'autre type de courbes (dans l'idéal plus simple). La définition reste la même.

> **Définition**
>
> - On dira qu'une courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g est asymptote en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = 0$.
> - On dira qu'une courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g est asymptote en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Prenons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ et montrons $g(x) = x^2 + x + 1$ est une parabole asymptote.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{x^3}{x-1} - (x^2 + x + 1) \\ &= \frac{x^3}{x-1} - \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^3 - 1}{x-1} \\ &= \frac{x^3 - x^3 + 1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \to \infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$



La notion de continuité

Une notion que nous avons légèrement survolée mais qui a maintenant tout son sens (et son importance) est la notion de continuité. On pourrait vulgairement dire qu'une fonction sera continue si, lors du dessin de son graphe, on ne lève pas le crayon de la feuille. C'est un raccourci mais cela résume assez bien le comportement à observer.

Faisons un peu de math et donnons le cadre rigoureux à cette définition.

Définition

Soit f définie en un point $a \in \mathbb{R}$. On dira que f est **continue** en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Prenons par exemple la fonction $f(x) = x^2$ et montrons qu'elle est continue en 2. D'une part $f(2) = 4$ et d'autre par $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ donc $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

On pourrait penser cette définition insignifiante puisque le calcul de la limite passe nécessairement par l'évaluation. Donc toutes les fonctions sont continues... c'est pas complètement faux : toutes les fonctions que nous avons rencontrées sont continues. Introduisons des fonctions un peu plus étrange.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{sinon } (x > 0) \end{cases}$$

Cette fonction est définie par morceau et c'est souvent le cas "*dans la vie de tous les jours*" (en physique, économétrie etc). Sur le *morceau* des nombres négatifs c'est 0 et sur le *morceau* des nombres positifs c'est x^2. Cette fonction est-elle continue en 0 ?

Pour commencer on observe que $f(0) = 0$ (car quand $x = 0$ alors on est sur la partie ou $x \leqslant 0$). Étudions à présent la limite. On se rappel que tendre vers 0 se fait deux manières (en générale) : par la gauche (en étant plus petit que 0) et par la droite (en étant plus grand que 0). Sauf que sur la partie gauche la fonction f est 0 et par la droite la fonction f est x^2. Comparons ces limites :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

On observe que ces limites sont les même d'une part et ont la même valeur. On peut donc écrire $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. On observe enfin que cette limite vaut $f(0)$. On peut donc en conclure que la fonction f est continue en 0.

Autre exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{sinon } (x > 1) \end{cases}$$

Étudions les limites en 1.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1$$

Donc $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ mais $f(1) = 0 \neq 1$. Donc cette fonction n'est pas continue.

Définition

On dira qu'une fonction est continue sur un sous-ensemble A de son domaine de définition si elle est continue pour tout $a \in A$.

Voici de quoi justifier que toute les fonctions que nous avons rencontrée sont continues.

Proposition

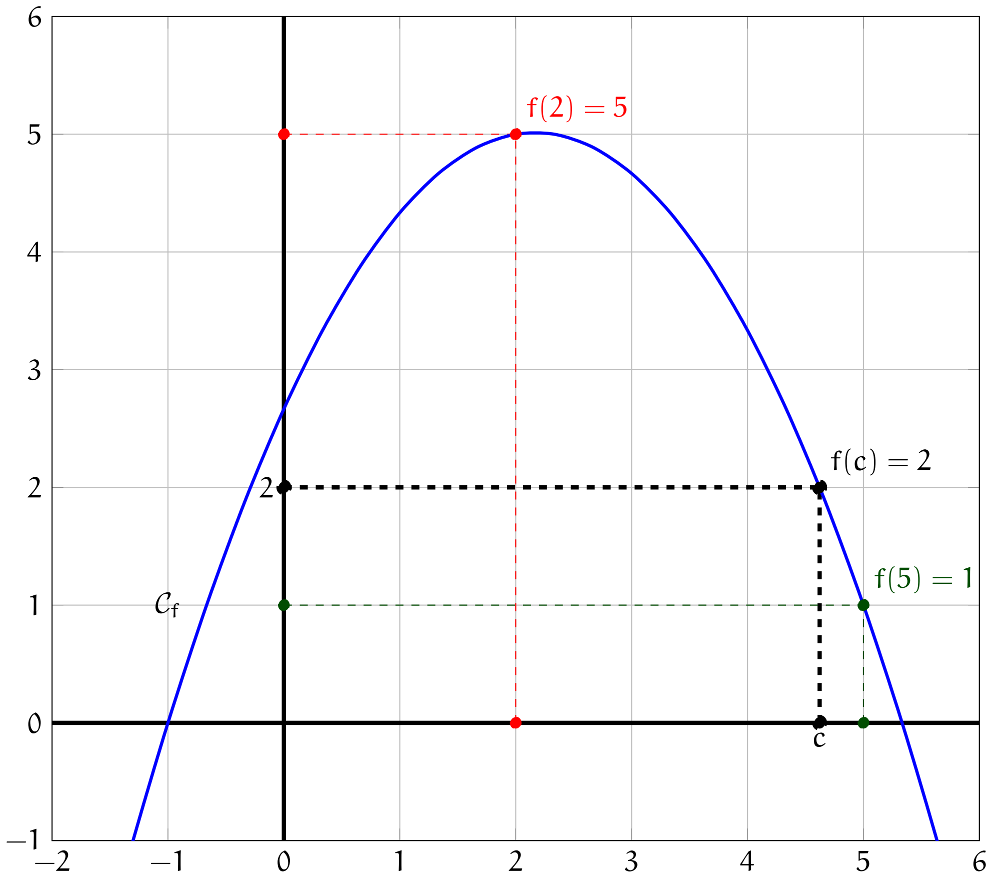
Toutes les fractions rationnelles (fractions de polynômes) sont continue sur leur ensemble de définition.

De même toutes les racines carrés de fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Attention il n'est pas légitime de demander si une fonction est continue en dehors de son domaine de définition. Par exemple il n'est pas vrai de dire que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue en 0. Elle n'est pas définie en 0 !

Le théorème des valeurs intermédiaire

Ce théorème est un élément majeur de l'analyse et fondation de théorème profond (comme les accroissements finis etc). Il est pourtant très simple à énoncer et à comprendre.



Sur cette fonction on observe que $f(2) = 5$ et $f(5) = 1$ et la fonction n'a pas de trou... avec nos nouveaux outils, on dira plutôt la fonction est continue, alors forcement il existe un $c \in [2, 5]$ tel que $f(c) = 2$.

Puisque la fonction est continue qu'elle vaut 5 puis, plus loin, 1 alors forcement elle *passe* par 2 (c'est un exemple, nous aurions pu choisir n'importe quelle valeur entre 1 et 5). C'est l'essence du TVI (théorème des valeurs intermédiaire).

> **Théorème**
>
> Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I. Notons $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Alors quelque soit le réel γ entre α et β il existe c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

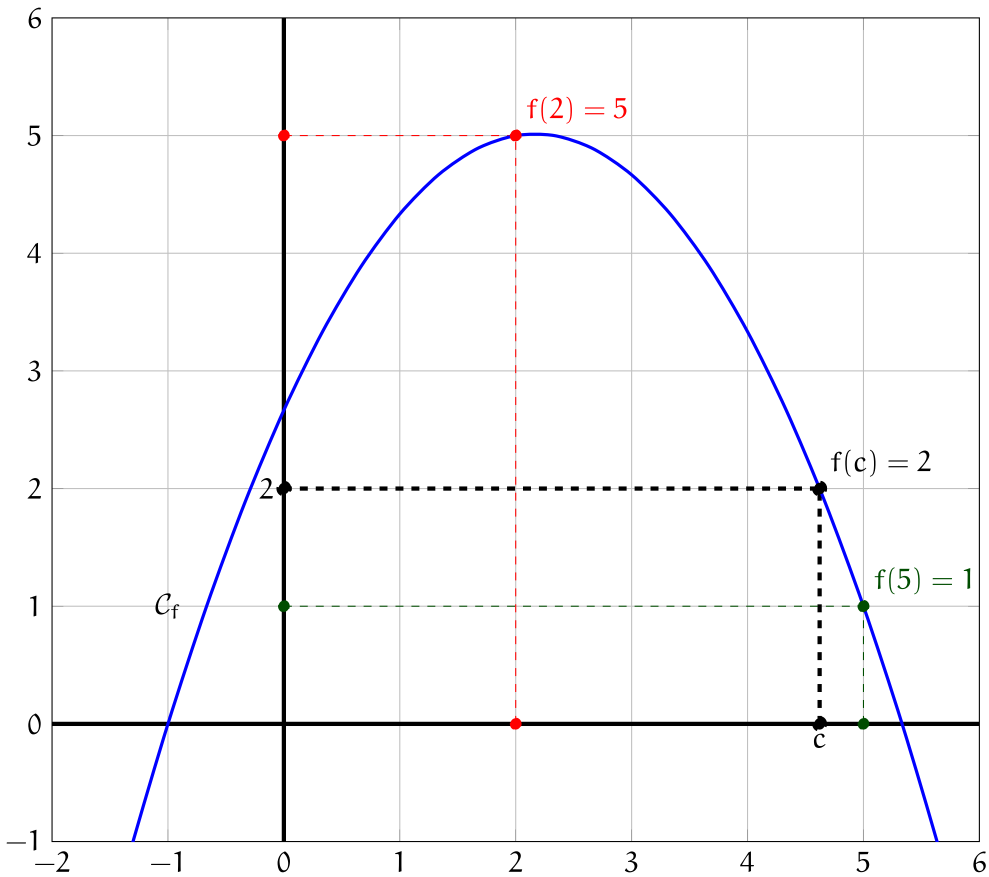
Si la fonction est strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) alors le c est unique comme dans l'exemple précédent : entre 2 et 5 la fonction est strictement décroissante elle ne *passe* qu'une seule et unique fois par 2.

> **Corollaire**
>
> Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I. Notons $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Alors quelque soit le réel γ entre α et β il existe **un unique** c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

Bon ce théorème aussi beau soit-il souffre d'un petit problème... Comment trouver le c. En générale on n'arrive pas à obtenir la valeur exacte. On utilise la calculatrice !

La calculatrice

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.



La fonction est $f(x) = -\dfrac{1}{6}(3x-16)(x+1)$. D'après le corolaire du TVI, il existe un unique $c \in [1;5]$ tel que $f(c) = 2$. La question est : "*Déterminons un encadrement de* c *à* 10^{-3} *près.*".

Cette question signifie : encadrer c entre deux nombres à 3 chiffres après la virgule.

Pour y arriver nous allons utiliser la calculatrice (dans la pratique le *tableur*).

Étape 0. On saisie la fonction f dans la calculatrice.

Étape 1. Tabler la fonction en commençant (*start*) en 1, en finissant (*end*) en 5 avec un pas (*step*) de 1. Voici le résultat

x	$f(x)$
2	5.0
3	4.66666
4	3.33333
5	1.0

Puisque $3.33333 < 2 < 1$ on en déduite que $4 < c < 5$. Ceci est un encadrement de c à 10^0.

Étape 2. Tabler la fonction en commençant (*start*) en 4, en finissant (*end*) en 5 avec un pas (*step*) de 0.1. Voici le résultat

x	$f(x)$
4.0	3.333333333333333
4.1	3.1450000000000005
4.2	2.9466666666666654
4.3	2.738333333333334
4.4	2.519999999999999
4.5	2.2916666666666665
4.6	2.053333333333334
4.7	1.8049999999999986
4.8	1.546666666666668
4.9	1.2783333333333322
5.0	1.0

On observe que $4.6 < c < 4.7$ puisque $1.804999 < 2 < 2.053333$. Ceci est un encadrement à 10^{-1}.

Étape 3. Tabler la fonction en commençant (*start*) en 4.6, en finissant (*end*) en 4.7 avec un pas (*step*) de 0.01. Voici le résultat

x	$f(x)$
4.60	2.053333333333334
4.61	2.0289500000000014
4.62	2.0044666666666684
4.63	1.9798833333333328
4.64	1.9552000000000016
4.65	1.9304166666666671
4.66	1.905533333333336
4.67	1.88055
4.68	1.8554666666666673
4.69	1.8302833333333344
4.70	1.8050000000000015

On observe que $4.62 < c < 4.63$ puisque $1.979883 < 2 < 2.004466$. Ceci est un encadrement à 10^{-2}.

Étape 34. Tabler la fonction en commençant (*start*) en 4.62, en finissant (*end*) en 4.63 avec un pas (*step*) de 0.001. Voici le résultat

x	$f(x)$
4.620	2.004466666666667
4.621	2.0020128333333322
4.622	1.9995580000000002
4.623	1.9971021666666668
4.624	1.9946453333333334
4.625	1.9921874999999998
4.626	1.9897286666666665
4.627	1.987268833333333
4.628	1.9848079999999995
4.629	1.9823461666666662
4.630	1.9798833333333328

On observe que $4.621 < c < 4.622$ puisque $1.99955 < 2 < 2.002012$. Ceci est un encadrement à 10^{-3}.

Un exemple d'application

Nous souhaitons étudier la fonction suivante

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. On trouve sans trop de difficulté que sa dérivé est $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^3}$. Mais il est difficile de connaitre le signe de cette fonction. Dérivons la à nouveau. On parle de *dérivé seconde*. Il s'agit simplement de la dérivé de la dérivé que l'on note f''. On trouve sans trop de peine $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^4}$ qui est clairement strictement positif. Donc la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (c'est à dire strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et strictement croissante $]-1;+\infty[$). De plus on remarque que $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty$. Puisque la fonction est strictement monotone alors $f'(x) > 1 > 0$ sur l'intervalle $]-\infty;-1[$. De même $\lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$. D'après le corolaire du TVI, il existe un unique $\alpha \in]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Ceci nous permet d'en déduire le signe de f' : pour $x \in]-\infty;-1[\cup]\alpha;+\infty[$ $f'(x) > 0$ sinon $f'(x) < 0$ ce qui permet d'en déduire les variation de f. Tout ce charabia (avouons le : ce système de rédaction est bien obscure !) se résume bien plus agréablement dans le tableau suivant.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
f''		$+$	||	$+$		$+$	
f'	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
f'		$+$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

A l'aide de la calculatrice on trouve que $0.25992 < \alpha < 0.25993$.

Dans cet exemple très précis on peut chercher la valeur exacte de α. En effet la seule chose exactement connue sur α c'est que cette valeur annule f'. Autrement dis $f'(\alpha) = 0$ soit encore $1 - \dfrac{2}{(\alpha+1)^3} = 0$. Par un petit jeu algébrique on peut trouver $(\alpha+1)^3 = 2$ soit $\alpha + 1 = \sqrt[3]{2}$ et donc $\alpha = \sqrt[3]{2} - 1$.

Application : théorème des accroissements finis

Cette partie est hors programme.

Théorème — Rolle

Soient $a < b$ deux réels tel que f soit continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Sur l'intervalle $[a,b]$, la fonction admet un minimum m et un maximum M. Ceci s'écrit : pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Si les deux inégalités sont des égalités alors $m = f(x) = M$ et la fonction f est constante donc sa dérivé est nulle sur tout l'intervalle.

Si au moins une des deux inégalités est stricte, par exemple $m < f(x)$ (il suffira de raisonner de la même manière si $f(x) < M$) alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $c \in [a,b]$ tel que $m = f(c)$; précisément $c \in]a;b[$ car si $c = a$ alors $m = f(c) = f(a) = f(b)$ ce qui contredis le caractère stricte de l'inégalité $m < f(x)$.

Puisque $f(c) = m < f(x)$ alors $f(x) - f(c) > 0$ donc si $x \in]a,c[$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$ et si $x \in]c,b[$ alors $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$. D'où

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \qquad f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$$

et nécessairement $f'(c) = 0$ □

Théorème — Accroissements finis

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Démonstration. Soit $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ alors

$$\begin{aligned}
g(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a \\
&= \frac{(b-a)f(a) - a(f(b)-f(a))}{b-a} \\
&= \frac{(bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b-a} \\
&= \frac{(bf(a) - af(b)}{b-a} \\
g(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \\
&= \frac{(b-a)f(b) - b(f(b)-f(a))}{b-a} \\
&= \frac{(bf(b) - af(b) - bf(b) - bf(a)}{b-a} \\
&= \frac{-af(b) + bf(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

et $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe c tel que $g'(c) = 0$ or $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ce qui prouve le résultat. $\square$

On peut illustrer ce théorème de la manière suivante : quelques soit la corde étendue entre deux points sur une courbe d'une fonction dérivable alors il existe une tangente qui lui est parallèle.

Suites récurrentes et suites explicites

Considérons les nombres suivants :

$$0\ 1\ 3\ 7\ 15\ 31\ 63\ \cdots$$

Pour passer d'un terme à l'autre on double le chiffre et on ajoute 1. Précisément si x est un nombre alors le nombre suivant est $2x+1$.

Les *suites* ont pour but de formaliser et d'étudier ce type de comportement.

Définition

Une **suite numérique réelle** est la donnée d'un ensemble de nombre réel indexé par le les entiers. Si u est une suite on note u_n son n-ième terme.

Lorsque l'on définie une suite on peut le faire de deux manière.

Suite explicite. Une telle définition signifie que l'on peut déterminer u_n en fonction de n. Par exemple la suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n + n$. Dans une telle définition, il suffit de remplacer, comme pour une fonction, le n par 64 pour calculer le 64-ième terme de la suite : $u_{64} = (-1)^{64} + 64 = 65$.

Suite récurrente. Une telle définition signifie que pour déterminer le 64-ième terme de la suite, il faut passer par la détermination d'un ou plusieurs terme précédents. Par exemple la suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3u_{n-1} - 1$. Dans une telle définition il est nécessaire de préciser un point de départ de la récursion en indiquant par exemple une valeur de u_0. Par exemple $u_0 = 1$. Alors dans ce cas $u_1 = 3u_0 - 1 = 3.1 - 1 = 2$, $u_2 = 3u_1 - 1 = 3.2 - 1 = 5$ etc. Pour déterminer u_{64} il est donc nécessaire de passer par le calcul de u_{63}.

Dans l'exemple de l'introduction on peut dire que la suite de nombre est une suite numérique réel définie par $u_0 = 0$ et $u_n = 2u_{n-1} + 1$.

L'un des objectifs de l'étude de suite est de passer de définition récurrente à définition explicite. Par exemple, la suite de Fibonacci est définie de manière récurrente par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (on fait la somme des deux derniers terme pour obtenir le suivant). Grâce à l'étude des suites on peut démontrer (avec un peu d'effort) que la définition explicite de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Dans ce chapitre nous allons essayer de déterminer une définition explicite de la suite de l'introduction.

Variations

Définition

1. On dira qu'une suite u est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On dira qu'une suite u est *strictement croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
3. On dira qu'une suite u est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
4. On dira qu'une suite u est *strictement décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

Dans la pratique on dispose de deux méthodes pour étudier les variations d'une suite.

Première méthode. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si cette différence est positive alors la suite est croissante, si elle est négative elle est décroissante. Prenons par exemple la suite $u_n = n^2 + 1$ alors $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ mais puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $2n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite u est strictement croissante.

Deuxième méthode. Cette méthode ne s'applique que lorsque la suite est strictement positive (quelque soit le n, $u_n > 0$). En effet, si u_n ne s'annule pas, on peut diviser. Dans ce cas on étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare avec 1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante. Regardons par exemple la suite $u_n = 2^n$ alors $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2>1$ et la suite est strictement croissante.

Qu'en est-il des variations de la suite de l'introduction : $u_0 = 0$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$? Il est évident que la suite u_n est toujours positive, de plus $u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1 \geqslant 0 + 1>0$. Donc la suite u est strictement croissante.

Limites

La limite d'une suite est toujours a limite en $+\infty$. Lorsque la suite est définit de manière explicite, on raisonne comme pour les fonctions.

Par exemple si la suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Dans la pratique, puisque le calcul des suites n'est qu'en $+\infty$ on note simplement $\lim u_n$ au lieu de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Proposition

Soient u, v et w trois suites numérique.

1. Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ pour tout n assez grand et si $\lim v_n = l = \lim w_n$ alors $\lim u_n = l$.
2. Si $v_n \leqslant u_n$ pour tout n assez grand et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.
3. Si $u_n \leqslant w_n$ pour tout n assez grand et si $\lim w_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

Considérons par exemple la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ de manière explicite par $u_n = (-1)^n + n$. Le "problème" de cette suite est que $(-1)^n$ n'admet pas de limite (car sur les nombre paire cela vaut $+1$ et sur les impaires -1). Cependant on a toujours $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. En ajoutant n à ces inégalités on trouve $-1+n \leqslant (-1)^n+n \leqslant 1+n$ soit en reformulant $n-1 \leqslant u_n \leqslant n+1$ et $n+1$ comme $n-1$ tendent trivialement vers $+\infty$. Il en va donc de même pour u_n et ce bien que $(-1)^n$ n'admette pas de limite.

Voici un résultat permettant non pas de calculer une limite mais de garantir son existence.

Proposition

1. Soit u une suite croissante tel que u_n soit majoré pour tout n assez grand (c'est à dire que $u_n < M$ pour un certain M ne dépendant pas de n). Alors u admet une limite.
2. Soit u une suite décroissante tel que u_n soit minoré pour tout n assez grand (c'est à dire que $u_n > M$ pour un certain M ne dépendant pas de n). Alors u admet une limite.

Par exemple, on peut rapidement montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+1}{n}$ est décroissante et minoré trivialement par 0. Donc u admet une limite. En utilisant les résultats sur les limites de fonction (de polynôme pour être précis), on montre que $\lim u_n = 1$.

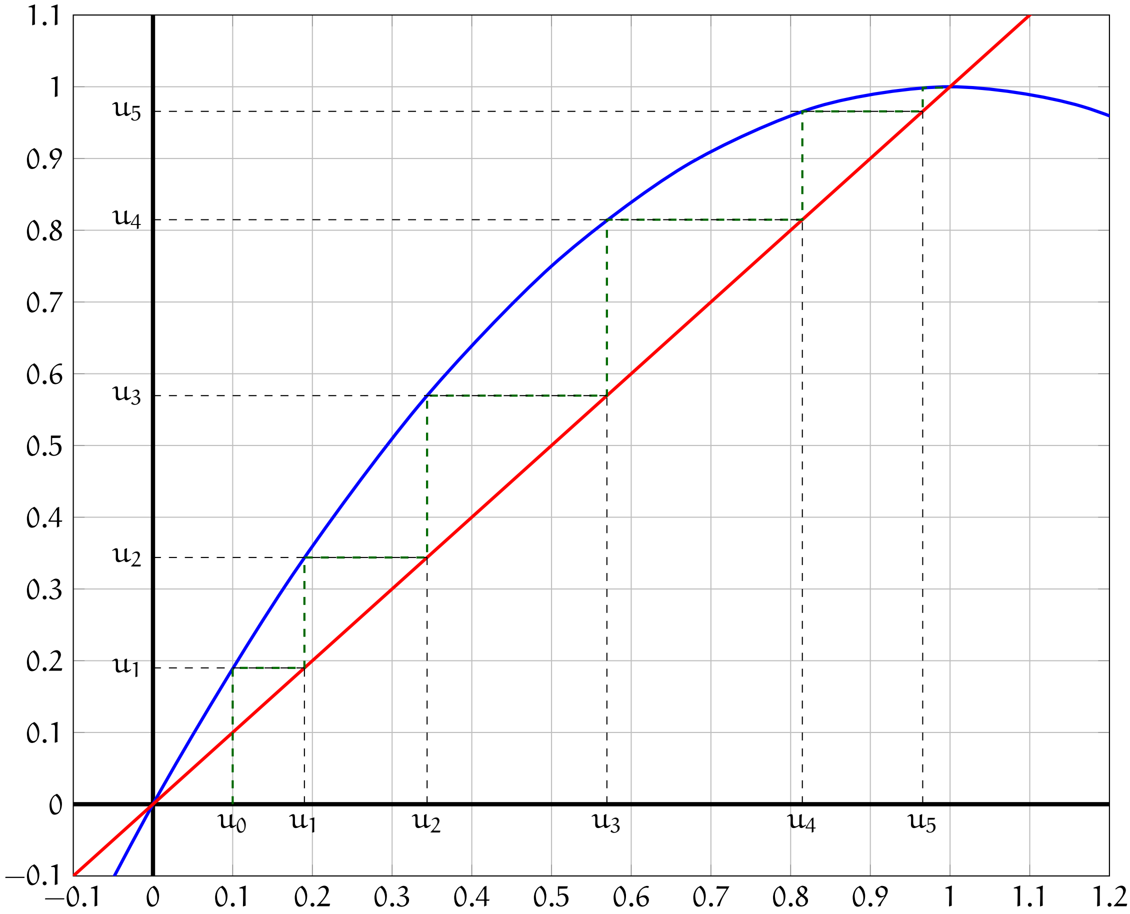
Suites récurrente fonctionnelle

Définition

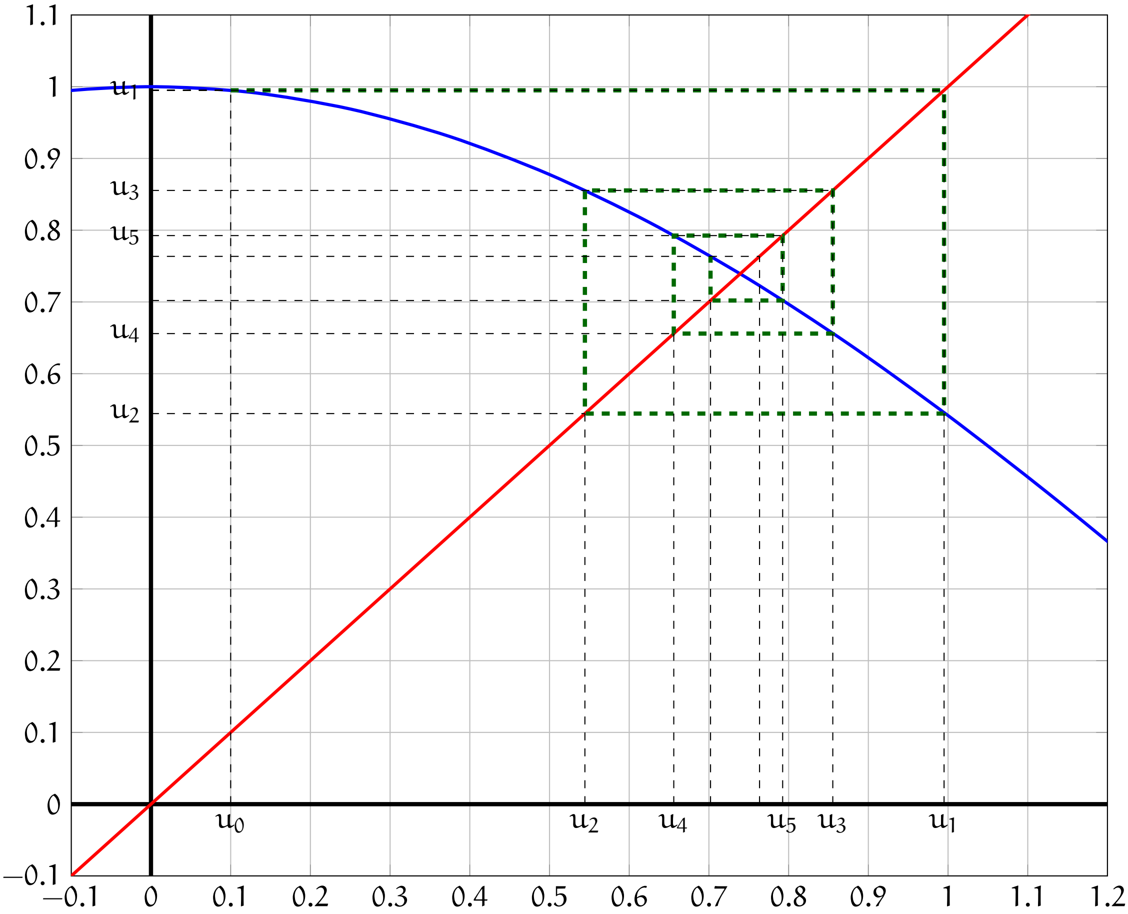
On dira qu'une suite u est récurrente fonctionnelle si il existe une fonction f tel que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Les suites récurrentes fonctionnelles sont un cas particulier des suites définies de manière récurrente. Par exemple $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est une suite récurrente fonctionnelle avec $f(x) = x^2 + 1$. La suite $v_{n+1} = v_n^n + 1$ est une suite récurrente mais n'est pas fonctionnelle car on ne peut pas trouver de fonction telle que $v_{n+1} = f(v_n)$ (la fonction f définissant les suites récurrentes fonctionnelles ne doivent pas dépendre de n).

Prenons pour exemple la fonction $f(x) = -x^2 + 2x$ et la suite u récurrente fonctionnelle de fonction f où $u_0 = 0,1$. Pour "voir" u_1 il faut calculer l'image de u_0. Pour voir u_2 il faut calculer l'image de u_1. Pour cela on va se servir de la droite $y = x$ qui permet de projeter la valeur de u_1 sur l'axe des abscisse. On continue ainsi de proche en proche pour construire cette représentation en escalier.



Lorsque la fonction f est décroissante on va plutôt avoir une représentation en escargot.



Quelque soit la configuration on observe assez rapidement que la limite, si elle existe, se rapproche du point d'intersection entre la courbe et la droite $y = x$.

Théorème

Soit u une suite récurrente fonctionnelle de fonction f. Si u admet une limite, cette limite est nécessairement une solution de l'équation $x = f(x)$.

Suites arithmétiques

Définition

On dira qu'une suite est **arithmétique** si u est récurrente fonctionnelle de fonction $f(x) = x + b$. Dans ce cas le nombre réel b est appelé la **raison** de la suite.

Plus simplement une suite est arithmétique si on peut passer d'un terme à l'autre par l'ajout (ou la soustraction) d'un nombre (ne dépendant pas de n).

Dans ce cadre très particulier, la droite $y = x$ et $f(x) = x + b$ sont parallèles (car elles ont le même coefficient directeur). En particulier elle ne se coupent pas donc la limite d'une suite arithmétique ne peut pas être autre chose que ∞.

Dans ce cas particulier de suite, on peut passer de la forme récurrente à la forme explicite assez rapidement.

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr$$

La démonstration de cette proposition passe par un raisonnement par *récurrence* dont nous ne dirons pas plus que le nom dans ce cours.

Corollaire

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- **Si** $r > 0$ alors la suite est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
- **Si** $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.
- **Si** $r = 0$ alors la suite est constante et tend donc vers sa valeur constante (n'importe lequel de ses termes).

Suites géométriques

Définition

On dira qu'une suite est **géométrique** si u est récurrente fonctionnelle de fonction $f(x) = ax$. Dans ce cas le nombre réel a est appelé la **raison** de la suite.

Plus simplement une suite est géométrique si on peut passer d'un terme à l'autre par la multiplication (ou la division) d'un nombre (ne dépendant pas de n).

Dans ce cas particulier de suite, on peut passer de la forme récurrente à la forme explicite assez rapidement.

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n$$

Corollaire

Soit u une suite géométrique de raison q.

- **Si** $q > 1$ alors la suite est strictement croissante et tend vers ∞ ; le signe étant déterminé par le signe de u_0.
- **Si** $q = 1$ alors la suite est constante et tend donc vers sa valeur constante (n'importe lequel de ses termes).
- **Si** $0 < q < 1$ alors la suite est strictement décroissante et tend vers 0.
- **Si** $q = 0$ alors pour tout $n > 0$, $u_n = 0$ qui est aussi la valeur de sa limite.
- **Si** $-1 < q < 0$ alors la suite n'est ni croissante ni décroissante mais tend vers 0.
- **Si** $q \leqslant -1$ alors la suite n'est ni croissante, ni décroissante et n'admet pas de limite.

Suites arithmético-géométriques

Définition

On dira qu'une suite est **arithmético-géométrique** si u est récurrente fonctionnelle de fonction $f(x) = ax + b$. Dans ce cas le couple de nombre réel (a, b) est appelé la **raison** de la suite.

Dans le cas ou $a = 1$ on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$ on retrouve une suite géométrique.

Si $a \neq 1$ alors les droite $y = x$ et $y = ax + b$ se coupent en un unique point d'abscisse $\dfrac{b}{1-a}$ qui, si la suite admet une limite fini, est la valeur limite.

Proposition

Soit u une suite arithmético-géométrique de raison (a, b) tel que $0 \neq a \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Démonstration. Posons $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\
&= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\
&= a\left(u_n + \frac{b}{a} - \frac{b}{a(1-a)}\right) \\
&= a\left(u_n + \frac{b(1-a)-b}{a(1-a)}\right) \\
&= a\left(u_n - \frac{ab}{a(1-a)}\right) \\
&= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\
&= av_n
\end{aligned}$$

D'après le précédent paragraphe ceci se traduit par le fait que v_n est une suite géométrique de raison a. Dans ce cas $v_n = av_0$. En remplaçant v_n par $u_n - \dfrac{b}{1-a}$ on trouve le résultat. $\square$

Corollaire

Soit u une suite arithmético-géométrique de raison (a, b).

Si $|a| < 1$ alors $\lim u_n = \dfrac{b}{1-a}$.

Si $a \leqslant -1$ alors u n'admet pas de limite.

Si $a \geqslant 1$ alors u tend vers l'infini, le signe étant déterminé par le signe de $u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

En particulier dans l'exemple de l'introduction avec la suite $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Puisque $a = 2 > 1$ on en déduit que la suite tend vers $+\infty$.

Sommes

Dans une solution nutritive un organisme unicellulaire se reproduit par mitose : chaque cellule se divise en 2. Lors du processus de mitose la cellule divisée donne naissance à deux cellules (identique) ainsi qu'a un *résidu* une sorte de mue dont la cellule se détache avant la division. On suppose qu'il faut une minute à une cellule pour réaliser sa mitose et qu'au début de l'expérience il y a une seule et unique cellule.

Au bout d'une heure, combien de résidu seront présent dans la solution ?

Notons u_n le nombre de résidu à la n-ème minute. Initialement il n'y a qu'une cellule n'ayant pas encore fait sa mitose. Il n'y a donc pas de résidu $u_0 = 0$. A la minute suivante, la cellule a donné naissance à deux cellules et générée un résidu $u_1 = 1$. A la minute suivante, les deux cellules se divisent et génèrent chacune deux résidus et un total de 4 cellules. Il y a donc au total 3 résidus (celui de la minute 1 et les 2 de la minute 2)... Bon on va pas aller jusqu'à 60 par cette méthode. Vite des math !

Notons c_n le nombre de cellule à la minute n. Comme nous venons de le voir $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_3 = 4$ et le nombre de résidu à la minute 3 est la somme des cellules des minutes précédentes : $u_2 = c_0 + c_1$ pour les raisons détaillées ci-dessus. On peut en déduire de même que $u_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}$.

Théorème

Soient u une suite géométrique de raison q et $\alpha < \beta$ alors

$$u_\alpha + \cdots + u_\beta = u_\alpha \frac{1 - q^{\beta-\alpha+1}}{1-q}$$

Une manière plus élégante de retenir cette formule est de dire que la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est

$$1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de terme}}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration. Notons $S = u_\alpha + u_{\alpha+1} + \cdots + u_{\beta-1} + u_\beta$. Alors

$$\begin{array}{rcl} qS & = & qu_\alpha + qu_{\alpha+1} + \cdots + qu_{\beta-1} + qu_\beta \\ qS & = & \underbrace{u_{\alpha+1} + qu_{\alpha+2} + \cdots + qu_\beta} + u_{\beta+1} \\ qS & = & (S - u_\alpha) + u_{\beta+1} \end{array}$$

Or $u_{\beta+1} = q^{\beta+1}u_0 = q^{\beta+1-\alpha+\alpha}u_0 = q^{\beta+1-\alpha}q^\alpha u_0 = q^{\beta-\alpha+1}(q^\alpha u_0) = q^{\beta-\alpha+1}u_\alpha$.

Ainsi $qS = S - u_\alpha + q^{\beta-\alpha+1}u_\alpha$. En résolvant cette équation en S on trouve le résultat. □

Dans notre exemple la suite c_n est une suite géométrique de raison 2 (chaque cellule donne naissance à 2 cellules). Ainsi $cn = 2^n$ ($c_0 = 1$). Alors $u_n = 1 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$. En conclusion au bout d'une heure il y aura $u_{120} = 2^{120} - 1$ résidus (qui est de l'ordre de 10^{36}).

Autre exemple : Le 1er janvier 2000, je décide de mettre dans ma tirelire à la fin de chaque mois 2€ de plus que ce que j'ai mi le mois précédent. Le 1er janvier 2010 j'ai 15 000€ dans ma tirelire. En supposant que je n'ai jamais pris de l'argent dedans dans ce lapse de temps, combien d'argent y avait-il le 1er janvier 2000 ?

Encore une fois, utilisons les suites : soit u_n somme d'argent que je met dans ma tirelire au bout de n mois (le mois 0 étant janvier 2000). Alors $u_{n+1} = u_n + 2$ de sorte que l'on a une suite arithmétique. Mais le total contenu au bout de n mois est $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Théorème

Soient u une suite géométrique de raison r et $\alpha < \beta$ alors

$$u_\alpha + \cdots + u_\beta = \frac{u_\alpha + u_\beta}{2}(\beta - \alpha + 1)$$

Une autre manière d'énoncer ce théorème est du de dire que la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétiques est

$$\frac{1\text{er terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nb de terme})$$

Démonstration. Observons que $u_{\alpha+k} + u_{\beta-k} = u_0 + (\alpha + k)r + u_0 + (\beta - k)r = \underbrace{u_0 + \alpha r} + kr + \underbrace{u_0 + \beta r} - kr = u_\alpha + u\beta$. Alors

$$\begin{array}{rcl} S + S & = & u_\alpha + u_{\alpha+1} + \cdots + u_{\beta-1} + u_\beta \\ & + & u_\beta + u_{\beta-1} + \cdots + u_{\alpha+1} + u_\alpha \\ & = & (u_\alpha + u_\beta) + (u_\alpha + u_\beta) + \cdots + (u_\alpha + u_\beta) \\ & = & (u_\alpha + u_\beta) \times (\beta - \alpha + 1) \end{array}$$

En simplifiant cette égalité on trouve le résultat. □

Au bout de 10 ans, il a dans la tirelire $u_0 + u_1 + \cdots + u_{119}$ (le mois de janvier 2000 est le mois 0 donc le mois 120 est le mois de janvier 2010 ainsi décembre 2009 est le mois 119) et aussi $15\ 000$€ d'après l'énoncé. Or cette somme vaut aussi $\dfrac{u_0 + u_{119}}{2} \times 120$. Le terme initiale u_0 est inconnue, le terme $u_{119} = u_0 + 119 \times 2$ alors

$$15000 = \frac{u_0 + u_0 + 238}{2} 120 \quad \Leftrightarrow \quad 125 = \frac{u_0 + u_0 + 238}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 125 = u_0 + 119 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = u_0$$

En conclusion, il y avait 6 euros dans la tirelire le 1er janvier 2000.

Partie 3

Analyse avancé

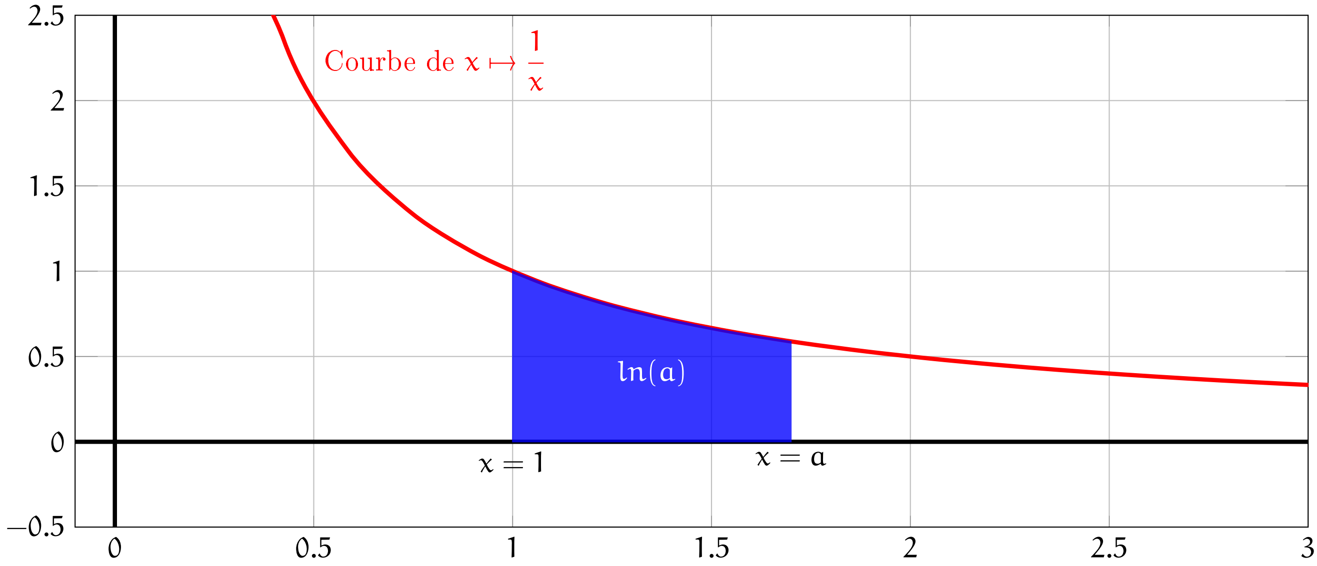
16. Logarithme

Définition et premières propriétés

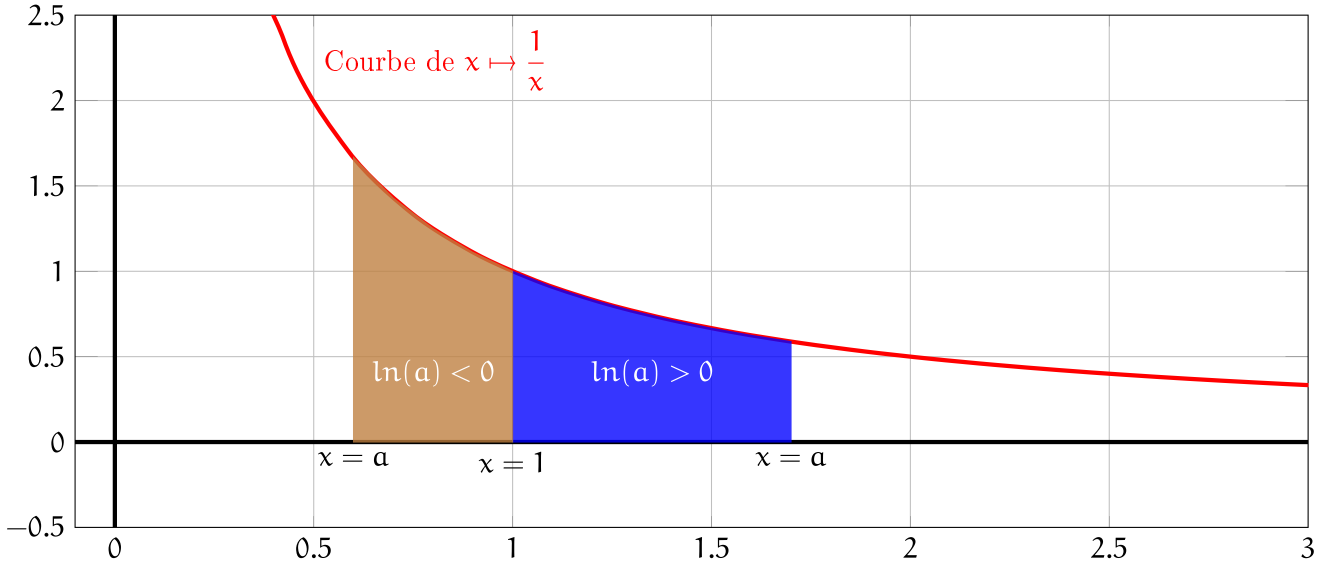
Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\ln(a)$ appelé le **logarithme népérien** de a, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite $x = 1$, $x = a$ et la courbe représentative de la fonction inverse.

En dessin cela donne :



L'aire dont on parle est une aire *algébrique* c'est à dire avec un signe : on regarde toujours l'aire entre $x = 1$ et $x = a$ dans cet ordre de sorte que si $a < 1$ alors l'aire sera considérée négative.



Proposition

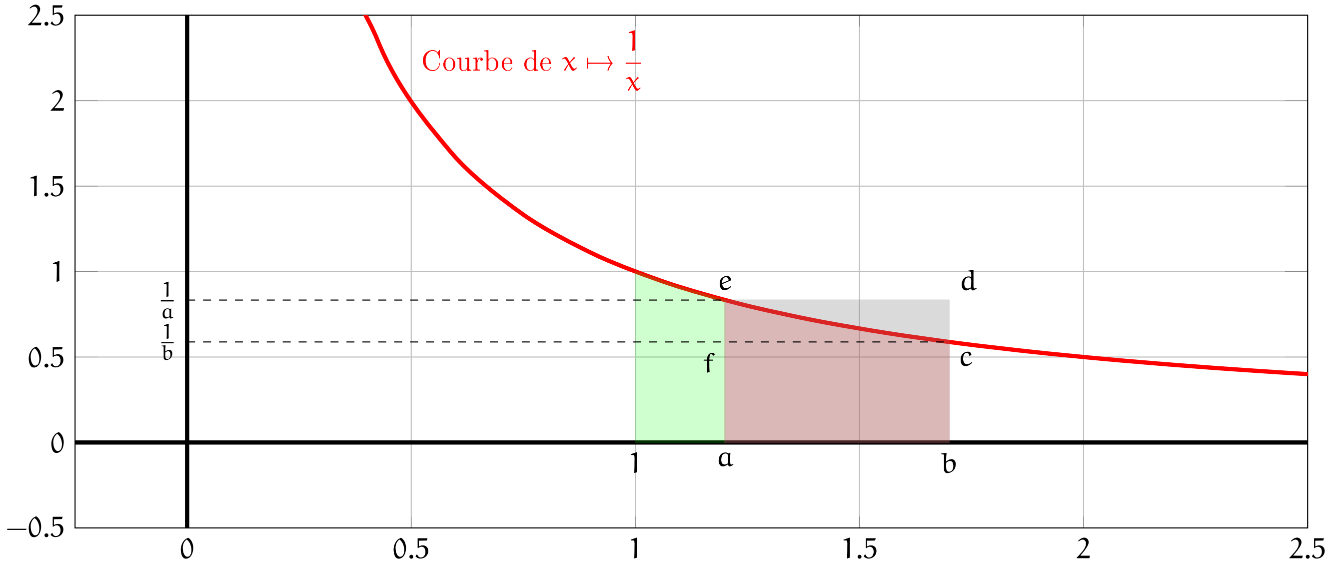
1. Le nombre réel $\ln(a)$ n'est défini que si $a \in]0; +\infty[$.
2. Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$.
3. $\ln(1) = 0$.

4. Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$.

Ces propriétés se déduisent trivialement d'une lecture géométrique du logarithme.

La fonction logarithme

Considérons à présent la fonction logarithme, c'est à dire la fonction qui a $x \in]0;+\infty[$ associe $\ln(x)$ l'aire sous la fonction inverse. Étudions cette fonction. Par définition il s'agit d'une aire... un peu compliqué comme aire mais une aire. Un objet géométrique dont l'aire est très facile est le rectangle. Faisons un dessin.



La quantité $\ln(b) - \ln(a)$ correspond à l'aire sous la courbe inverse entre 1 et b moins celle entre 1 et a. En définitive il ne reste que l'aire rouge[3], c'est à dire l'aire entre a et b sous la fonction inverse.

On peut encadrer cette aire par celles des rectangles $abcf$ et $abde$:

$$\mathcal{A}(abcf) \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \mathcal{A}(abde)$$

L'aire d'un rectangle est longueur fois largeur : $\mathcal{A}(abcf) = (b-a)\frac{1}{b}$ et $\mathcal{A}(abde) = (b-a)\frac{1}{a}$. On obtient un encadrement

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{a}$$

En prenant par exemple $a = 1$ et sachant que $\ln(1) = 1$ on a $1 - \frac{1}{b} \leqslant \ln(b) \leqslant b - 1$

Théorème

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on considère la fonction $f(x) = \ln(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration. Reprenons l'encadrement $\frac{b-a}{b} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{a}$ et divisons par $b-a$ et posons $b = x$:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a} \leqslant \frac{1}{a}$$

Mais par définition, pour n'importe quelle fonction $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$. Donc la limite de $\frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a}$ est la valeur de la dérivé de $\ln$ en a. Mais la dernière inégalité montre que cette quantité est *prise en sandwich*

3. Désolé amis daltonien

entre $\frac{1}{x}$ qui tend vers $\frac{1}{a}$ lorsque x tend vers a et $\frac{1}{a}$ qui reste constant lorsque x tend vers a. En conclusion le taux d'accroissement, lorsque x tend vers a ne peut prendre que la valeur $\frac{1}{a}$. □

Corollaire

Soit u fonction définie sur un domaine D tel que pour tout $x \in D$, $u(x) > 0$. Posons $f(x) = \ln(u(x))$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration. Il s'agit de la formule de dérivation de la composé de fonction. □

Si par exemple $f(x) = \ln(x^2+1)$ alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Corollaire

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration. La dérivé est strictement positive donc la fonction est strictement croissante. □

Limites et croissances comparées

Théorème

Soient a et b deux nombres réelles strictement positifs alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration. Cette démonstration utilise un résultat d'analyse assez instinctif : si deux fonctions ont la même dérivés alors elles sont égales à une constante près.

Posons $g(x) = \ln(xb)$. Alors $g'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$. Ainsi g et $\ln$ ont la même dérivé, donc $g(x) = \ln(x) + k$ pour un certain nombre réelle k que l'on peut déterminer en prenant une valeur particulière pour x, par exemple $x = 1$: $\ln(b) = g(1) = \ln(1) + k = k$ donc pur tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) + \ln(b)$. Si on prend $x = a$ alors on obtient la formule. □

Corollaire

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.
4. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

Démonstration.

1. $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$.
2. C'est la formule précédente pour $a = 1$ (sachant que $\ln(1) = 0$).

3. $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$
4. $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n}$

□

Corollaire

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration. Chercher la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\ln(x)$ reviens à chercher la limite lorsque n tend vers l'infini de $\ln(2^n)$ (c'est un changement de variable). Or $\ln(2^n) = n\ln(2)$ et $\ln(2)$ n'est qu'un nombre positif, dont la calculatrice donne $\ln(2) = 0.693$. On a trivialement que $n\ln(2)$ tend vers l'infini, il en va donc de même pour $\ln(x)$.

Pour la limite en 0^+ on pose $X = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$$

□

Observons de plus près $\dfrac{\ln(x)}{x}$. Le numérateur comme le dénominateur de cette expression tend vers $+\infty$. Le théorème de croissances comparées stipule qu'entre ces deux infinis, celui du logarithme est le plus faible.

Théorème Croissances comparées

Quelque soit $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Démonstration. Montrons que $\dfrac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0 en l'infini.

On va raisonner comme précédemment en posant $x = 2^n$. Ainsi calculer la limite en l'infini de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ revient à calculer la limite de $\dfrac{\ln(2^n)}{2^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant les propriétés du logarithme on obtient $\dfrac{\ln(2^n)}{2^n} = \dfrac{n}{2^n}\ln(2)$. Il s'agit donc de démontrer que $\dfrac{n}{2^n}$ tend vers 0. Pour y arriver on considère la suite $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

Cette suite est décroissante. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \\
&= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{(n+1)^2}{2^n.2} \times \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Puisque n va finir par tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $n \geqslant 3$. Dans ce cas $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3}$ donc $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{4}{3}$ soit encore en passant au carré $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{16}{9}$ donc pour finir $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{8}{9} < 1$. Ceci prouve que la suite u_n est décroissante (à partir de $n \geqslant 3$). En particulier on peut observer que $0 < u_n < u_3 = \dfrac{3}{8} < 1$. Soit encore $0 < \dfrac{n^2}{2^n} < 1$. En divisant par n on obtient $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$. Ainsi $\dfrac{n}{2^n}$ est encadré par deux suites qui tendent vers 0 ce qui prouve que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2^n)}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}\ln(2)=0.$$

Pour le reste il s'agit (encore) de changement de variable :

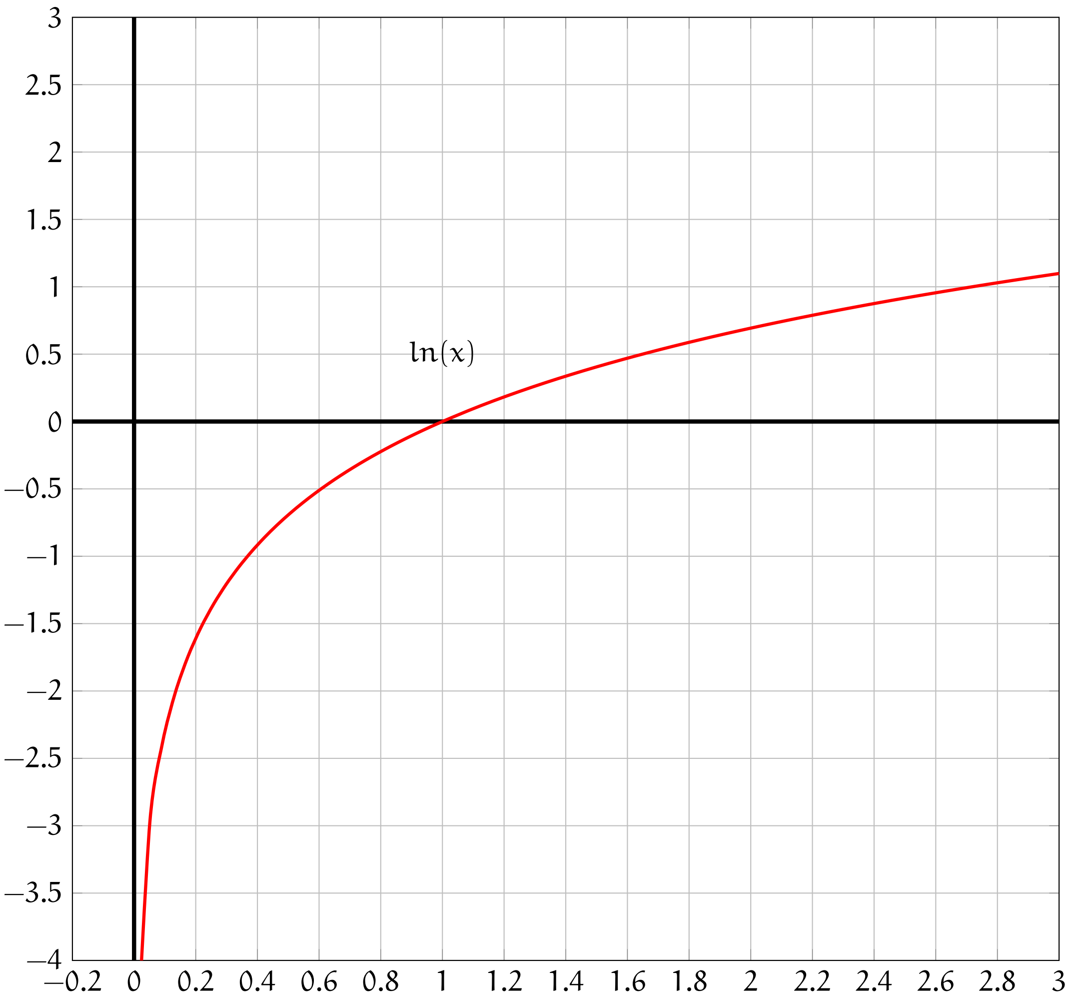
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\overset{X=x^\alpha}{=}\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X^{\frac{1}{\alpha}})}{X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\times\frac{\ln(X)}{X}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)\overset{X=\frac{1}{x}}{=}\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{X}\right)^\alpha\ln\left(\frac{1}{X}\right)=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X^\alpha}(-\ln(X))=\lim_{X\to+\infty}-\frac{\ln(X)}{X^\alpha}=0$$

□

D'après le cours sur les asymptotes, lorsqu'une recherche d'asymptote oblique $y=ax+b$ d'une fonction f, on a toujours $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax$. Dans le cas de la fonction logarithme le théorème des croissances comparées montre que si il y a une asymptote oblique alors le coefficient directeur est nul. Mais pour la détermination du b on trouve $+\infty$. Ainsi il n'y a pas d'asymptote oblique bien que l'infini de x soit plus grand que celui du logarithme.

En conclusion, voici la courbe représentative de la fonction logarithme.



Une petite limite à emporter s'il vous plait !

Proposition

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

Démonstration. Soit $f(x) = \ln(x+1)$ alors $f(0) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ mais

$$1 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

□

Un exemple

Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x-1}$. Dans la pratique, des questions intermédiaires sont posées pour arriver aux conclusions. Ici nous explorons de file en aiguille cette fonction.

La première chose à déterminer est le domaine de définition. D'une part il y a une fraction, il faut donc que le dénominateur soit non nul ce qui fait apparaître la contrainte $x \neq 1$, d'autre pas il y a un logarithme, il faut donc que son paramètre soit strictement positif. Cela fait apparaître $x^2 - 1 > 0$. Cette inéquation se résout rapidement et permet d'aboutir au domaine de f :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

Calculons les limites de f au bord de son domaine de définition.

La limite en $\pm\infty$. On peut réécrire f comme suit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}\ln(x^2-1)$. D'après ce que nous savons sur les polynômes $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2-1) = +\infty$. En conclusion

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

La limite en -1^-. Il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x+1} = \dfrac{-\ln(0^+)}{0^-} = -\infty$

La limite en 1^+. Il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x+1} = \dfrac{\ln(0^+)}{2} = -\infty$

Déterminons la dérivé de la fonction f. On observe que $f = \dfrac{u}{v}$ où $u = x\ln(x^2-1)$ et $v = x+1$. Alors la dérivé d'un produit donne

$$\begin{aligned} u' &= 1 \times \ln(x^2-1) + x\frac{2x}{x^2-1} \\ &= \ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

La dérivé d'un quotient donne quand à elle

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{\left(\ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x^2-1}\right)(x-1) - 1 \times x\ln(x^2-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\ln(x^2-1)(x+1) + \frac{2x^2}{x^2-1}(x-1) - x\ln(x^2-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-\ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x+1}}{(x+1)^2} \qquad \text{car } x^2-1 = (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur de cette expression est toujours positif, il suffit d'étudier le signe du numérateur pour déterminer le signe de f' et donc les variations de f. Le *problème* c'est que le numérateur est un peu difficile à étudier. Posons alors $g(x) = \dfrac{2x^2}{x+1} - \ln(x^2-1)$ et déterminons le signe de g.

Le domaine de définition de g est le même que celui de f pour les même raison. Déterminons alors sa dérivé :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{4x(x+1)-2x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x}{x^2-1} \\
&= \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} - \frac{2x}{x^2-1} \\
&= \frac{(2x^2+4x)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} - \frac{2x(x+1)}{(x^2-1)(x+1)} \\
&= \frac{(2x^2+4x)(x+1)-2x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+1)} \\
&= \frac{2x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)(x+1)}
\end{aligned}$$

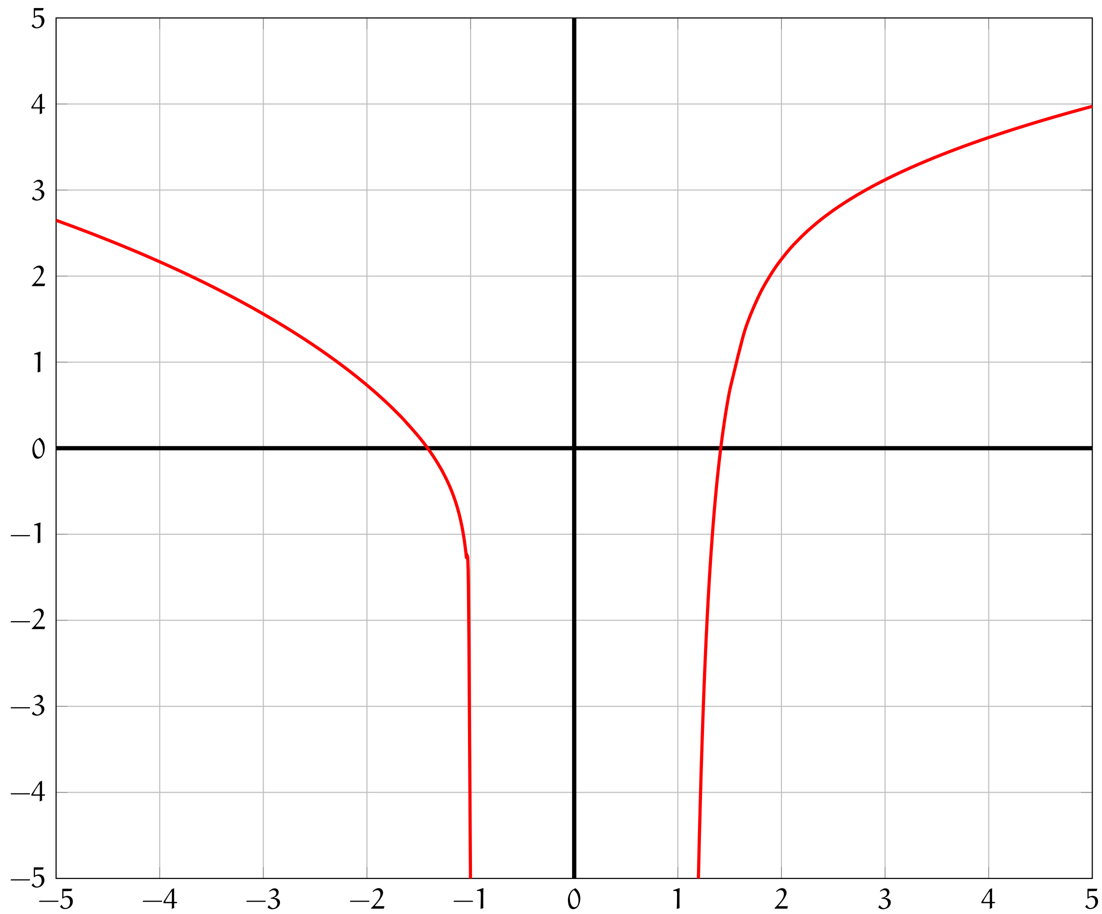
On peut à présent déterminer les variations de g que nous synthétisons dans le tableau suivant. A noter que puisque la fonction admet un nombre négatif comme maximum sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ alors elle négative sur cet intervalle et f est décroissante. De même sur l'intervalle $]1;+\infty[$ la fonction g admet un nombre positif comme minimum et y est donc positive ce qui implique de f y est croissante.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$			0			$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$						$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$					0	$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0					$+$		$+$	
g'		$+$	0	$-$			0			$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	$-3(\sqrt{3}+1)-\ln(2)$ $\simeq -8.888$	$\searrow$						$\searrow$	$3(\sqrt{3}-1)-\ln(2)$ $\simeq 1.503$	$\nearrow$	
$sg(g) = sg(f')$		$-$		$-$			0			$+$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$				$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

Les droites $x=1$ et $x=-1$ sont des asymptotes verticales. Étudions l'existence d'asymptote oblique. Pour cela il faut calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Instinctivement, par croissance comparée, la fonction logarithme a *s'écraser* devant les autres fonctions de sorte que l'on devine que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Démontrons le un peu plus rigoureusement.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln((x-1)(x+1))}{x-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)+\ln(x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{\ln(x+1)}{x-1} \\
&\overset{X=x-1}{=} \lim_{X\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(X)}{X}}_{\to 0} + \frac{\ln(X+2)}{X} \qquad \text{Thm Crois. Comp.} \\
&= \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X+2)}{X} \\
&\overset{T=X+2}{=} \lim_{T\to+\infty} \frac{\ln(T)}{T-2} \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{\ln(T)}{T-2} \times \frac{T}{T} \\
&= \lim_{T\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(T)}{T}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{T}{T-2}}_{\to 1} \qquad \text{Thm Crois. Comp. + limite de polynômes} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En conclusion il n'existe pas d'asymptote oblique. Pour finir, on trace l'allure de la courbe.



Une fois cette étude effectuée on peut donner naissance à un exercice :

1. Quel est le domaine de définition de la fonction $g(x) = \dfrac{2x^2}{x+1} - \ln(x^2-1)$?

2. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. A l'aide d'une calculatrice donner les valeurs approchées de $g(-\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$. En déduire le signe de g.
5. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x+1}$?
6. Calculer la limite de f en -1^- et 1^+.
7. En observant que $f(x) = \dfrac{x}{x+1}\ln(x^2-1)$ calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
8. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$
9. En déduire les variations de f.
10. A l'aide du changement de variable $X = x-1$ et du théorème des croissances comparées, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X+2)}{X}$.
11. Montrer que la fonction f n'admet pas d'asymptote oblique.
12. Tracer, aussi proprement que possible l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

A vous maintenant d'inventer vos propres exercices !!!

Trailer : Exponentielle

La fonction logarithme est strictement croissante et prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ (car ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$). Elle est aussi continue par construction (en tant qu'aire). On peut donc lui appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires**. D'après ce théorème l'équation $\ln(x) = 0$ admet une unique solution, d'ailleurs on la connait : c'est 1.

Grâce à ce théorème on peut en déduire que si $\ln(a) = \ln(b)$ alors nécessairement $a = b$.

L'équation $\ln(x) = 1$ admet aussi une unique solution. A l'aide de la calculatrice on trouve que $x = 2.71828$. On note ce nombre e.

Qu'en est-il de l'équation $\ln(x) = 2$. Elle admet aussi une unique solution dont on peut déterminer une approximation numérique... mais on peut procéder autrement :

$$\begin{aligned}
\ln(x) = 2 &\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \times 1 \\
&\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \times \ln(e) \\
&\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^2) \qquad \text{Propriété du logarithme} \\
&\Leftrightarrow x = e^2
\end{aligned}$$

Et si on remplaçait le 2 par un 3, un -1 ou n'importe quel nombre réel... Tiens tiens... Il se passe quelque chose de marrant.

TO BE CONTINUED

17. Exponentielle

Définition et premières propriétés

Il est indispensable d'avoir assimiler le cours sur les logarithmes pour pouvoir suivre ce cours sur les exponentielles. Ici tout sera beaucoup plus rapide que le précédent chapitre. Pas que nous souhaitons bâcler le travail mais plutôt que nous allons entièrement nous appuyer sur la fonction logarithme, raison pour laquelle nous insistons sur son assimilation.

D'ailleurs à la fin du cours sur le logarithme, avec l'aide du théorème des valeurs intermédiaire, nous avions observer que l'équation $\ln(x) = 1$ admettait une unique solution que l'on note e et dont la valeur approchée, estimée à l'aide d'un ordinateur, est 2.71828.

Qu'en est-il de manière générale de l'équation $\ln(x) = a$ pour n'importe quelle nombre réel a ? D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une unique solution.

Définition

Pour tout nombre réel a on note $\exp(a)$ l'unique solution de l'équation $\ln(x) = a$. On l'appel *exponentielle* de a.

On a immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition

1. Quelque soit le réel a, $\exp(a) > 0$.
2. $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\exp(a) > 1$.

Démonstration.

1. Puisque $\ln(\exp(a)) = a$, le nombre $\exp(a)$ appartient au domaine de définition de $\ln$ qui est $]0; +\infty[$. Dis autrement $\exp(a) > 0$.
2. Puisque $\ln(1) = 0 = \ln(\exp(0))$ alors $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a < 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a > 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) > 1$.

□

La fonction exponentielle

Considérons la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$. Par construction $\ln(\exp(x)) = x$.

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f(x) = \exp(x)$.

$$f'(x) = \exp(x)$$

Démonstration. On sait que $\ln(\exp(x)) = x$. En dérivant des deux cotés de cette égalité on obtient

$$(\ln(\exp(x)))' = (x)' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \exp'(x) = \exp(x)$$

□

Corollaire

Soit u une fonction définie sur un domaine D. Pour tout $x \in D$ on pose $f(x) = \exp(u(x))$.

$$f'(x) = \exp(u(x)) \times u'(x)$$

Démonstration. Il s'agit de la formule de dérivation de la composée. □

Si par exemple $f(x) = \exp(x^2 + 1)$ alors $f'(x) = 2x\exp(x^2 - 1)$.

Corollaire

La fonction exponentielle est strictement croissance sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence de la positivité de sa dérivée (dans le premier paragraphe nous avions observé que $\exp(x)$ était strictement positif pour tout x). □

Limites et croissances comparées

Théorème

Quelque soit les nombres réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \ln(\exp(a+b)) &= a + b \\ &= \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a) \times \exp(b)) \quad \text{Propriété du logarithme} \end{aligned}$$

Puisque $\ln(\exp(a + b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$ alors $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ □

Corollaire 17.0.1

Soient a et b deux nombres réels.

1. $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
2. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
3. $\exp\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$
4. $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Démonstration. Il suffit, encore une fois de repasser par la fonction logarithme. □

Corollaire

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Démonstration. Détachons nous un peu de la fonction logarithme et travaillons un peu avec l'exponentielle et ses propriétés.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) \overset{x=n}{=} \lim_{n\to+\infty} \exp(n) = \lim_{n\to+\infty} (\exp(1))^n$$

Il s'agit de la limite d'une suite géométrique de raison $\exp(1) > 2$. La limite est donc $+\infty$.

Pour la seconde limite :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \overset{X=-x}{=} \lim_{X\to+\infty} \exp(-X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\exp(X)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\square$

Corollaire

Soit $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha \exp(x) = 0$$

Démonstration. On s'appuie sur le théorème des croissances comparées de la fonction logarithme en effectuant le changement de variable $X = \exp(x)$ donc $\ln(X) = x$.

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha \exp(x) \overset{X=\exp(x)}{=} \lim_{X\to 0} (\ln(X))^\alpha X = \lim_{X\to 0} \left(\ln(X) X^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = 0$$

Finalement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} \overset{X=-x}{=} \lim_{X\to-\infty} \frac{\exp(-x)}{(-x)^\alpha} = \lim_{X\to-\infty} \frac{1}{\exp(x)(-x)^\alpha} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\square$

Proposition

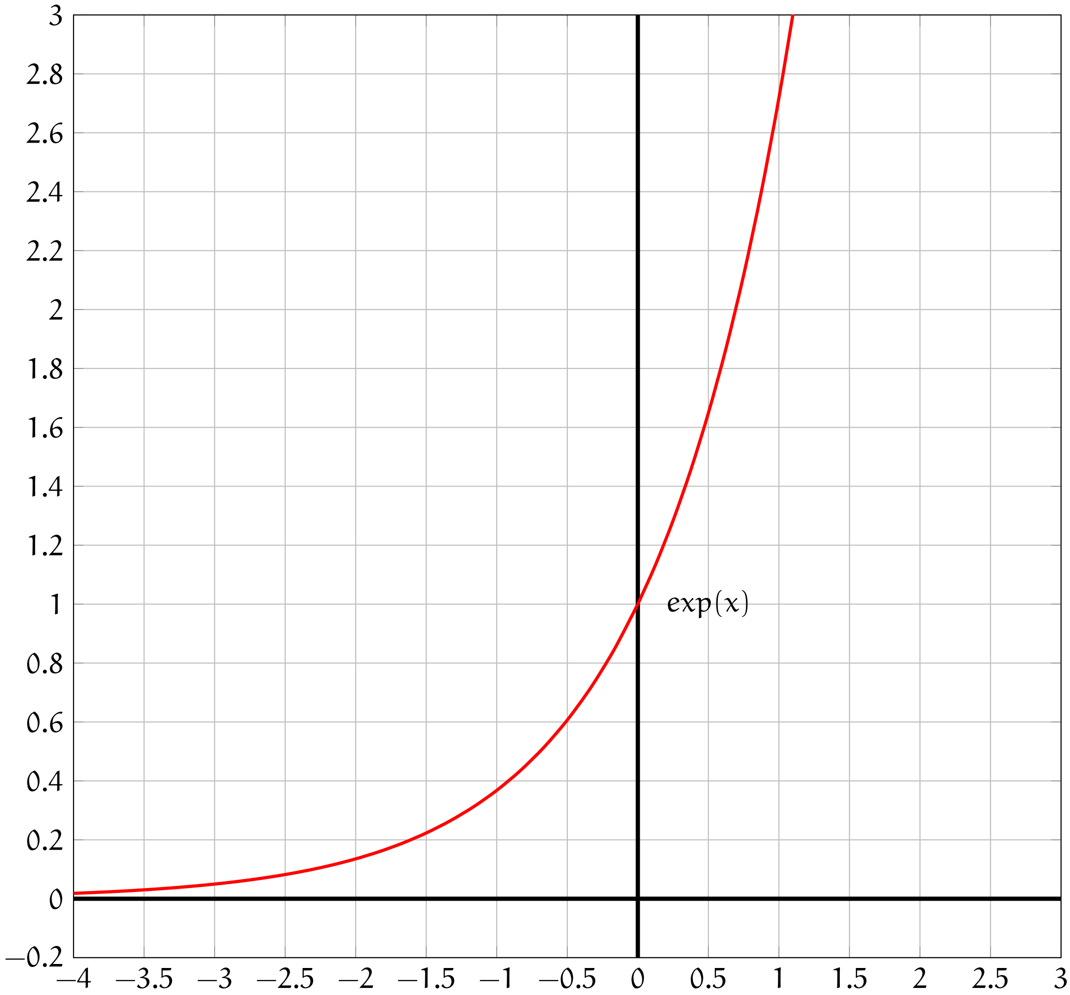
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration. Il s'agit de réécrire la définition de la dérivé de la fonction $\exp$ en 0 :

$$\exp'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(x)}{x - 0}$$

Sachant que $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ on prouve le résultat. $\square$

Pour finir donnons la représentation de l'exponentielle.



De $\exp(x)$ à e^x

Tout est dans le titre. On observe que les formules et propriétés de l'exponentielle sont étrangement similaire à celle des puissances. Par exemple d'un coté on $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ et d'un autre coté $10^{n+m} = 10^n 10^m$... du coup on se demande si il n'y a pas un liens entre nos familières puissances et l'exponentielle. La réponse est oui par une très simple observation :

$$\ln(\exp(x)) = x = x \times 1 = x \times \ln(e) = \ln(e^x)$$

d'après les règles de calcul sur le logarithme. Cette égalité implique donc que $\exp(x) = e^x$ et ce pour tous les x réel. Autant 10^n n'était définie que pour des n entiers autant $e^x = \exp(x)$ est définie pour tous les nombres réels !

D'ailleurs on pourrait s'amuser à définir 10^x pour n'importe quel x réelle. Tenté ? Allez on y va ! On a besoin d'un petit super pouvoir avant tout.

L'équilibre entre logarithme et exponentielle que l'on observe à travers la formule $\ln(\exp(x)) = x$ se retrouve dans la formule réciproque.

Théorème

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(\ln(x)) = x$$

Démonstration. On rappel que si $\ln(A) = \ln(B)$ alors $A = B$.

Par définition de l'exponentielle $\ln(\exp(\text{n'importe quoi})) = \text{n'importe quoi}$. Prenons $\ln(x)$ pour *n'importe quoi* :

$$\ln(\exp(\ln(x))) = \ln(x)$$

Nous sommes bien dans la configuration $\ln(A) = \ln(B)$ pour $A = \exp(\ln(x))$ et $B = x$ ce qui permet de conclure. □

Du coup quelle sens donner à 10^x ? Grâce à cette formule, on peut écrire que $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sauf que le logarithme gère très bien les puissances : $\ln(10^x) = x\ln(10)$. On a $10^x = \exp(x\ln(10))$ et l'exponentielle ne soufre d'aucun problème de définition. Ca y est ! On a défini 10^x. Pourquoi s'arrêterait-on en si bon chemin ?

Définition

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On défini a^b par la formule :

$$a^b = \exp(b\ln(a)) = e^{b\ln(a)}$$

Le calcul quant à lui se fait à l'aide d'une calculatrice, mais à présent des expressions comme $2^{\sqrt{2}}$ ont un sens.

Un exemple

Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$. Commençons par déterminer son domaine de définition. Pour que f soit définie, il faut et il suffit que son dénominateur soit non nul. Lé dénominateur est nul lorsque $e^x - 1 = 0$ soit encore $e^x = 1$. En prenant le logarithme des deux cotés on trouve $x = 0$. En conclusion

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Calculons à présent les limites de f au bord de son domaine de définition.

Limite en $+\infty$. On observe que $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}$. En utilisant le théorème des croissances comparées on trouve que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

Limite en $-\infty$. Il n'y a aucune forme indéterminée.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{+\infty}{0 - 1} = -\infty$$

.

Limite en $0^{\pm}$. On utilise la dernière limite étudiée sur la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^{\pm}} x \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^{\pm}} x \frac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

Déterminons à présent sa dérivé. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ où $u = x^2$ donc $u' = 2x$ et $v = e^x - 1$ donc $v' = e^x$. Finalement

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{2x(e^x - 1) - e^x x^2}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x[2(e^x - 1) - e^x x]}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x[2e^x - 2 - e^x x]}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x[e^x(2 - x) - 2]}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Pour pouvoir comprendre davantage le numérateur on étudie la fonction $g(x) = e^x(2-x) - 2$ dont le lien avec f est $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$.

Pour cela, on la dérive pour obtenir, par la dérivé du produit, $g'(x) = e^x(2-x) + e^x(-1) = e^x(1-x)$ qui aura donc le même signe que $1-x$ puisque l'exponentielle est strictement positive.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
g'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
g	2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
g		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f'		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert 0$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\alpha(2-\alpha)$	$\searrow$	0

Voici comment c'est construit ce tableau.

- A la première ligne on inscrit le signe de g' qui est le signe de $1-x$.
- On en déduit les variations de g en observant de plus que $g(0) = 0$, $g(1) = e(2-1)-2 = e-2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(2-x)-2 = -\infty$.
- La fonction g étant continue et strictement monotone sur $[1;+\infty[$ on en déduit qu'il existe un unique α tel que $g(\alpha) = 0$. A l'aide de la calculatrice, on a $1.593 < \alpha < 1.594$.
- Grâce à cette étude on en déduite que g est positive sur $[0,\alpha]$ et négative partout ailleurs.
- On adjoins le signe de x pour déterminer le signe de $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$.
- On en déduit le variations de f.
- Par construction on sait que $g(\alpha) = 0$ autrement dis $e^\alpha(2-\alpha) - 2 = 0$ soit $e^\alpha = \dfrac{2}{2-\alpha}$. D'où

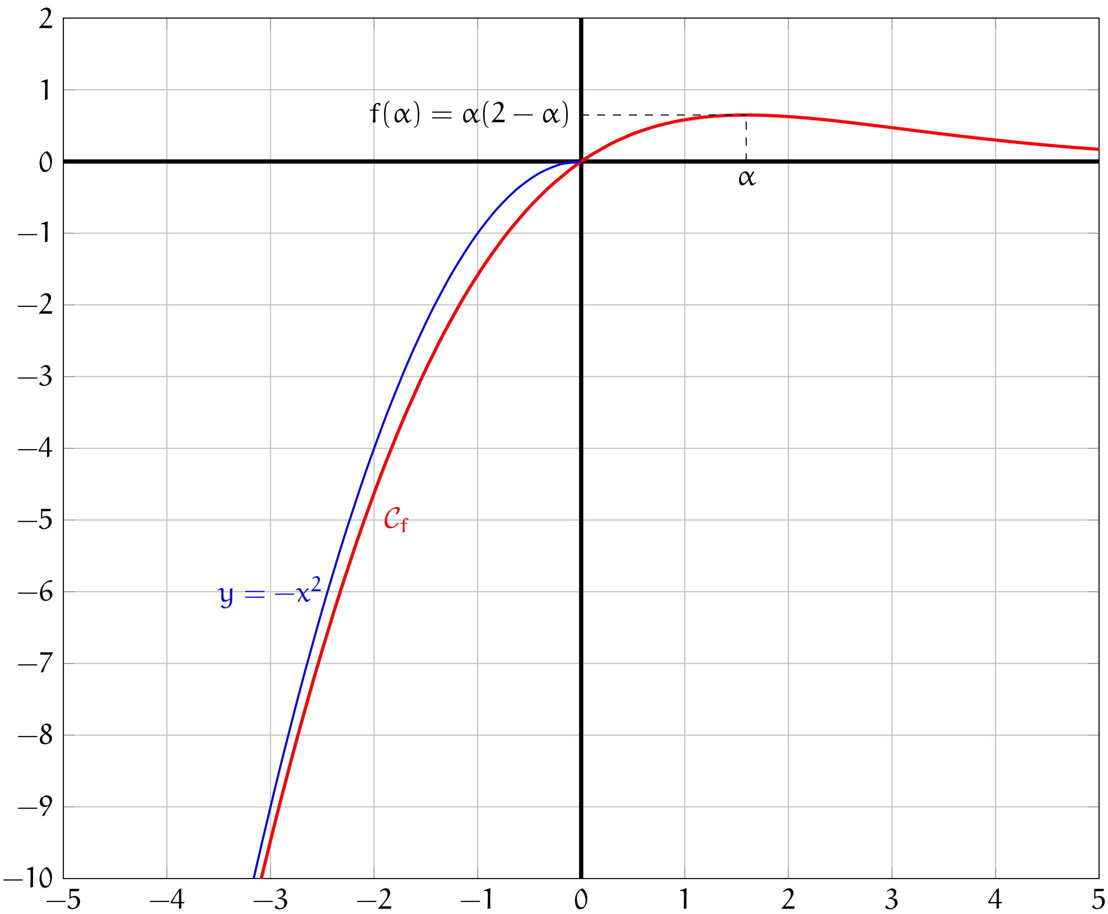
$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} \\
&= \frac{\alpha^2}{\frac{2}{2-\alpha} - 1} \\
&= \frac{\alpha^2}{\frac{2-(2-\alpha)}{2-\alpha}} \\
&= \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha} \\
&= \alpha(2-\alpha)
\end{aligned}$$

On pourrait s'arêter là... mais un petit calcul va nous mettre la puce à l'oreille :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) + x^2 &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} + x^2 \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x^2(e^x - 1)}{e^x - 1} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x^2 e^x}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2 e^x} - \frac{1}{x^2 e^x}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 e^x}} \\
&= \frac{1}{0 - \frac{1}{0}} \\
&= \frac{1}{0 - \infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ceci permet de voir que la parabole retournée $x \mapsto x^2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

On peut alors conclure par la courbe représentative de f :



A quel joli exercice cela peut-il aboutir (la dernière partie avec la parabole asymptote est très sortie du chapeau et surtout très hors programme) ?

18. Intégrales

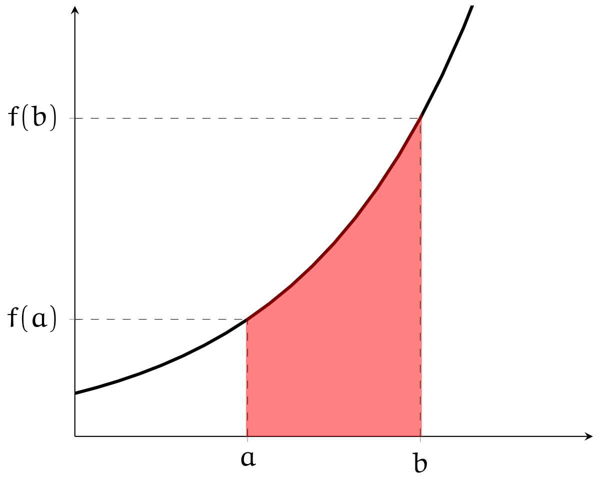
Définition

Définition

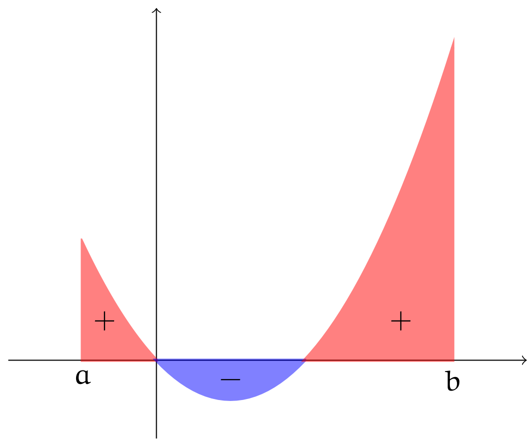
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. L'aire comprise entre les droites $x = a$, $x = b$ l'axe des abscisses ($y = 0$) et la courbe représentative de f est appelée **l'intégrale de f entre a et b**. On note cette aire

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

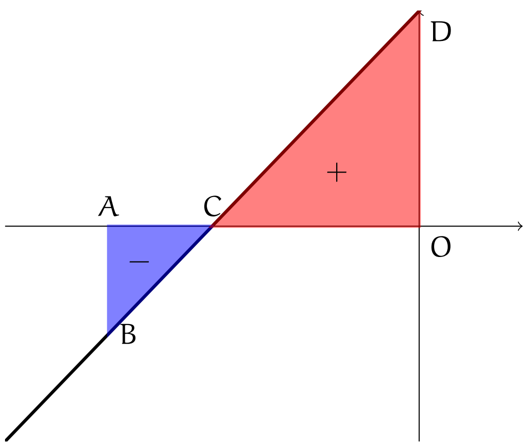
L'histoire de cette définition est multiple et trouve divers applications dans le monde de la mécanique. Nous présenterons ici un problème mathématico-mathématiques : on veut *juste* calculer une aire sous une courbe. En dessin cela donne :



Il est important de noter que l'on considère des aires algébriques. Lorsque l'aire cherchée est au dessus de l'axe des abscisses elle sera comptée positivement et négativement en dessous.



Voila une bien belle définition avec une notation bien mystérieuse, mais dans la pratique, comment est-ce que l'on procède au calcul ?



Prenons par exemple une droite d'équation $f(x) = x + 2$ et déterminons l'intégrale de f entre -3 et 0.

Un rapide dessin nous montre que cette aire est la somme de deux morceaux : l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle COD.

En fait il ne s'agit tout à fait d'une somme comme nous l'avons signalé plus haut mais plutôt d'une somme algébrique (*i.e.* qui peut changer de signe suivant le signe de f).

Le triangle étant un objet très simple de la géométrie, calculer son aire ne souffre d'aucune difficulté. L'aire du triangle ABC vaut 1 et celle du triangle COD vaut 4.

En conclusion l'aire cherchée vaut 3.

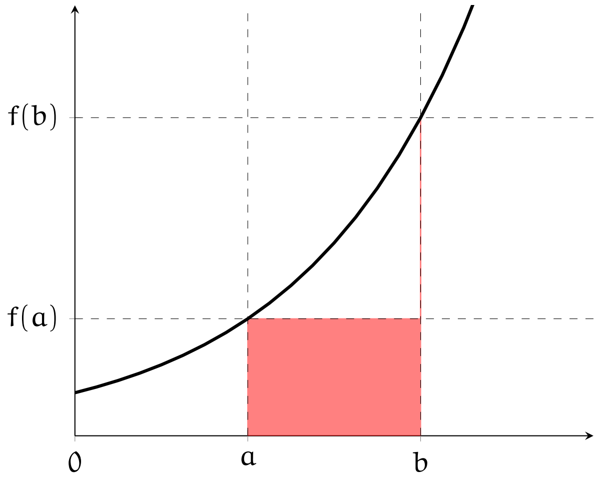
Très bien l'intégrale d'une droite c'est facile ! Il ne s'agit que d'aire de triangle... mais comment faire pour les polynômes de degrés 2, 3 un logarithme ou une exponentielle ?

Pour calculer cette aire sous la courbe, nous allons l'approcher par des objets de la géométrie beaucoup plus simple comme des triangles voir encore plus simple des rectangles.

L'un des premiers instigateur de cette approche est Bernhard Riemann d'où le nom de cette approche : les sommes des Riemann.

Les Sommes de Riemann

Approchons l'intégrale par des sommes de rectangle.

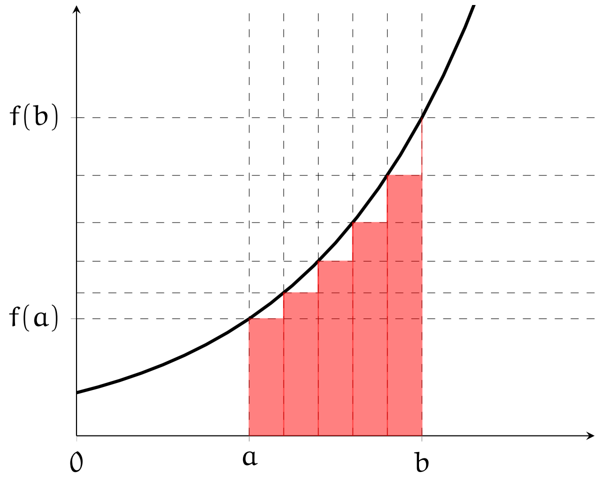


Découpage en 1 rectangle.

On a approché $\int_a^b f(x)\ dx$ par l'aire d'un rectangle d'où

$$\int_a^b f(x)\ dx \simeq (b-a) \times f(a)$$

Dans cette approche, on observe que l'erreur, la partie manquante à la vrai valeur de l'intégrale, est très grande. Le principe des sommes de Riemann est diviser l'intervalle en bien plus de rectangle pour minimiser l'erreur.



Découpage en 5 rectangles

Dans cette approche on a diviser l'intervalle en 5 morceaux d'égale longueur $\frac{b-a}{5}$. Notons $x_i = a + i\frac{b-a}{5}$ de sorte que $x_0 = a$ et $x_5 = b$. Alors les rectangles ont pour aire $\frac{b-a}{5}f(x_i)$ de sorte que la somme des aires de ces rectangles approche bien mieux l'intégrale.

$$\int_a^b f(x)\ dx \simeq \sum_{i=0}^{4} \frac{b-a}{5} f(x_i)$$

Plus on va diviser l'intervalle $[a;b]$ en morceau petit, plus on approchera l'aire sans erreur. En mathématiques, *approcher* c'est passer à la limite.

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\ dx$$

L'hypothèse de continuité est un peu forte, dans la pratique il suffit de que la fonction soit *presque continue* ; c'est à dire continue sur l'intervalle $[a;b]$ sauf en certain point de cet intervalle. On retiendra que si la fonction n'est pas continue, nous pouvons tout de même définir l'intégrale.

Traitons par exemple $\int_0^1 \exp(x)\ dx$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \exp(x)\ dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\exp\left(\frac{0}{n}\right)+\exp\left(\frac{1}{n}\right)+\exp\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\exp\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-\exp\left(\frac{1}{n}\right)^n}{1-\exp\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \qquad \text{Somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-\exp(1)}{1-\exp\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1-\exp(1)}{1-\exp(x)}\right) \qquad \text{En posant } x=\frac{1}{n} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\exp(1)}{-\underbrace{\frac{\exp(x)-1}{x}}_{\to 1}} \\
&= e-1
\end{aligned}
$$

Dans la pratique on ne procède JAMAIS comme ça ! C'est bien trop laborieux ! Utilisation de suite, changement de variables...

Commençons par explorer, à partir de la définition et des sommes de Riemann, les premières propriétés de l'intégrale.

Proposition

1. Relation de Chasles
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$
2. Linéarité (I)
$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$
3. Linéarité (II)
$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda\int_a^b f(x)\ dx$$
4. Positivité : si f est positive sur $[a;b]$ alors il en va de même pour $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.
5. Inégalité
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Démonstration. Ces propriétés découlent naturellement de la définition et des sommes de Riemann.
□

En particulier puisque $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$ (il n'y pas d'aire) alors la relation de Chasles donne

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

Toutes ces belles propriétés sont forts sympathique mais dans la pratique comment calculer une intégrale ?

Primitive

Définition

Soient f une fonction continue et F une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. On dira que F est une **primitive** de la fonction f si $F' = f$.

Par exemple si $f(x) = 2x$ et $F(x) = x^2$ alors F est une primitive de f. Si $G(x) = x^2 + 1$ alors $G' = f$ et G est une primitive de f. Il existe une infinité de primitive qui sont toutes les même à une constante près.

Théorème

Soient f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. Notons $G(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\ dx$. Nous allons montrer que $G'(t) = f(t)$ ce qui prouvera que G est une primitive de f et donc que $G(t) = F(t) + k$ pour un certain réel k. Ainsi nous aurons

$$F(b) - F(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^a f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

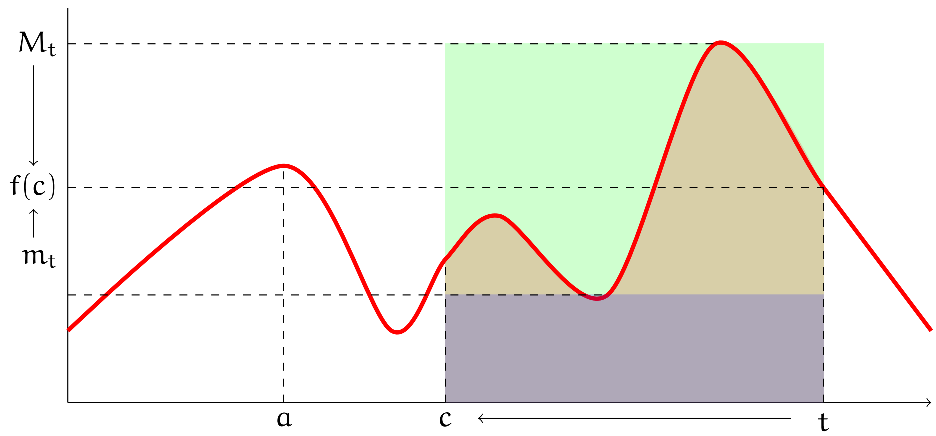
Rappelons que, par définition, $G'(c) = \displaystyle\lim_{t \to c} \frac{G(t) - G(c)}{t - c}$. Or la relation de Chasles permet d'écrire

$$G(t) - G(c) = \int_a^t f(x)\ dx - \int_a^c f(x)\ dx = \int_c^t f(x)\ dx$$

Il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaire des nombres m_t et M_t entre les nombres c et t tel que $m_t \leqslant f(x) \leqslant M_t$.

$$\begin{aligned}
m_t \leqslant f(x) \leqslant M_t \quad &\iff \quad \int_c^t m_t\ dx \leqslant \int_c^t f(x)\ dx \leqslant \int_c^t M_t\ dx && \text{par la positivité de l'intégrale}\\
&\iff \quad (t-c)m_t \leqslant \int_c^t f(x)\ dx \leqslant (t-c)M_t && \text{aire d'un rectangle}\\
&\iff \quad (t-c)m_t \leqslant G(t) - G(c) \leqslant (t-c)M_t\\
&\iff \quad m_t \leqslant \frac{G(t) - G(c)}{t - c} \leqslant M_t
\end{aligned}$$

Lorsque t va tendre vers c les nombres m_t et M_t vont se rapprocher de $f(c)$. Ainsi à la limite on aura bien $f(c) = \displaystyle\lim_{t \to c} \frac{G(t) - G(c)}{t - c}$.



$\square$

Ainsi dans la pratique lorsque l'on souhaite déterminer la valeur exacte d'une intégrale, on recherche une primitive. On observe que $F(x) = x^3 + x$ est une primitive de $f(x) = 3x^2 + 1$ de sorte $\int_0^1 3x^2 + 1 \, dx = (1^3+1) - (0^3+0) = 2$. En se sevrant des dérivés on détermine les correspondances suivantes.

Proposition

On désigne par F la primitive de f.

f	F
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x} \ (n = -1)$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}} \ (n = -\frac{1}{2})$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x

f	F
$u^n \times u' \ (n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{u} \times u' \ (n = -1)$	$\ln(u)$
$\frac{1}{\sqrt{u}} \times u' \ (n = -\frac{1}{2})$	$2\sqrt{u}$
$e^u \times u'$	e^u

Par exemple une primitive de e^{3x} est $\frac{1}{3}e^{3x}$.

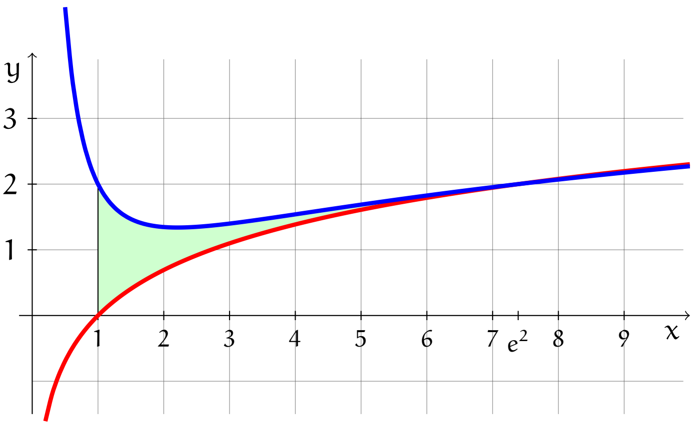
Exemple

Nous cherchons à déterminer l'aire entre la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$$

la courbe représentative la fonction $\ln$ et les droites $x = 1$ et $x = e^2$. Cela correspond à la zone verte sur le dessin. Par définition il s'agit du calcul de

$$I = \int_1^{e^2} f(x) - \ln(x) \, dx$$



Or

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x) \\ &= \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{2}{x} + 2 - \ln(x) \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} \\ &= \frac{2 - \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln(x)}{x} \, dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{2}{x} \, dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} \, dx \\ &= [2\ln(x)]_1^{e^2} - \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{e^2} \\ &= \left(2\ln(e^2) - 2\ln(1)\right) - \left(\frac{1}{2}(\ln(e^2))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) \\ &= (2 \times 2 - 2 \times 0) - \left(\frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(0)^2\right) \\ &= 4 - \frac{1}{2}4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aléatoire, univers, probabilités

Définir l'aléatoire est très difficile. Tentons une approche (que vous pourrez oublier au prochain paragraphe). En réalisant une expérience il peut y avoir deux natures de production :

- soit on sait comment va finir cette expérience de manière sûre et certaine. Dans ce cas on parle d'expérience **déterministe**. Par exemple si, sur la planète Terre, dans des conditions normales de pression, température etc on lance une pièce de monnaie alors elle tombe. On est sûre et certain qu'elle va retomber (c'est la loi de la gravitation qui le garantie).
- soit on ne sait pas comment va finir cette expérience mais on a des hypothèses de résultat. Par exemple, toujours avec la pièce, une fois lancée elle tombe soit sur pile soit sur face, mais, dans des conditions *normale* il est impossible de déterminer de manière sûre et certaine le résultat de cette expérience. On parle alors d'expérience **aléatoire**.

Étudier les résultats d'une expérience déterministe, nous l'avons déjà fait. C'est la statistique !

Les probabilités sont quant à elles, la science des expériences aléatoires. Le calcul des probabilités commence toujours avec une expérience aléatoire comme par exemple

- Lancer un dès
- Tirer une boule dans une urne
- Prendre trois cartes au hasard dans un jeu de carte
- ...

Définition

On appel **univers des possibilités** l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note en générale Ω.

Bon... nous avons tenter une définition mais elle souffre un petit peu de cadrage. Prenons par exemple l'expérience aléatoire "*On lance une pièce équilibrée*". L'univers des possibilités est alors $\Omega = \{\mathsf{Pile}, \mathsf{Face}\}$. Mais on pourrait aussi dire $\Omega = \{\mathsf{Pile}, \mathsf{Face}, \textit{Un condor passe au moment du lancé de pièce et l'emporte}\}$ sauf que ce dernier évènement bien que fort sympathique est improbable (dans des conditions normal de lancer de pièce dans une salle de classe par exemple et non dans une volière de condors ^_^). Dans l'univers des possibilités on ne considère que les *possibilités* c'est à dire ce qui a une *probabilité* de se produire. Qu'est-ce qu'une probabilité direz-vous. Oui c'est pas très propre de définir une notion avec une notion qu'on va définir après... d'un autre côté définir le hasard est difficile !

Bref, retenons que Ω désigne l'univers de ce qui peut se passer de raisonnable lors d'une expérience aléatoire. Par exemple :

- Si on lance trois pièces de monnaies alors
$$\Omega = \{\mathsf{PPP}, \mathsf{PPF}, \mathsf{PFP}, \mathsf{FPP}, \mathsf{PFF}, \mathsf{FPF}, \mathsf{FFP}, \mathsf{FFF}\}$$
où on note P pour pile de F pour face.
- Si on tire une carte dans un jeu de 52 cartes alors
$$\Omega = \{\text{As de pique}, \text{Deux de pique}, \ldots\}$$
- Si on lance un dé à six faces alors
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- ...

Définition

Soit Ω l'univers des possibilités d'une expérience aléatoire. Un **évènement** est un sous-ensemble de Ω.

Par exemple en lançant trois pièces de monnaies le sous-ensemble $\{\mathsf{FFP}, \mathsf{FPF}, \mathsf{PFF}\}$ correspond à l'évènement "obtenir exactement un pile".

Univers, sous-ensemble etc sont le cadre très rigoureux des probabilités : c'est très pratique, très puissant et suffisamment propre mathématiquement pour faire l'objet de théorème impressionnant. MAIS, il y a toujours un MAIS, le bagage théorique pour arriver à ce niveau de confort est très lourd, bien trop lourd pour ce cours : tribut, mesure, boréliens... bien au delà de ce que nous attendons ici.

Fort heureusement le calcul des probabilités est assez instinctif. Tout le monde comprend la phrase : "En lançant un dé, il y a une chance sur 6 d'obtenir un deux". Du coup, on peut présenter la probabilité de manière un peu moins rigoureuse mais beaucoup plus instinctive (en réalité ça s'appelle la *loi des grands nombres*).

Définition

Soit A un évènement relatif à une expérience aléatoire. On défini la probabilité de l'évènement A comme

$$P(A) = \lim_{\infty} \frac{\text{nombre de succès}}{\text{nombre de tentative}}$$

Nous avons lancer une pièce de monnaie équilibrée (c'est pour indiquer qu'elle n'est pas truquée). Nous considérons l'évènement E="Obtenir un pile". Nous avons réalisé plusieurs fois cette expérience pour estimer $P(E)$. Voici les résultats

Sur 25 lancés : 16 piles, donc $P(E) \simeq \dfrac{16}{25} = 0.64$

P P F F F P P P P F P P P P F P F P F F F P P P P

Sur 100 lancés : 49 piles, donc $P(E) \simeq \dfrac{49}{100} = 0.49$

F P F P F P F F F P P F P F P F P P P F F F F F P
P F F P P F P F P P P F P F F F P P F F F F F P P
F F P P F P P F P P F F F P P P P F F P F F P F P
F F F F P F F P F F P P P P P F F P P P P F F P P

Sur 200 lancés : 102 piles, donc $P(E) \simeq \dfrac{102}{200} = 0.51$

P P F P F P F P F F F F F F F P F P F P P P P F F
P P P P F F F P P F P F P P P F F P F P P F P P F
F F F P F F P P F P P P F F P F P F F F P P F P F
F F F F F F F P F P P F F F F F F F P P P P P F F
P P F F F F P P F F F P F F P P P P P F F P P P F
P F P P P F P P F P P F F P P F F F P F P P F F P
P P F F P P P F P P P P P P F P F P F P P F F P P
P F F F P P F F F P F P F F P F P F F P P P P P P

En continuant encore et encore cette expérience nous arriverons à montrer que $P(E) = 0.5$ que nous pouvons poétiquement traduire en "*la probabilité d'obtenir pile en lançant une pièce de monnaie équilibrée est d'une chance sur deux*". Dans la pratique on ne raisonne jamais avec cette définition par limite. On utilise de manière cachée les concepts ensemblistes. Par exemple en réalisant cette expérience, il y a deux issues possibles (pile ou face) et le seul résultat qui nous intéresse ne concerne qu'un de ces deux évènements (pile) on a donc un cas favorable sur deux cas possible : $\dfrac{1}{2}$.

Autre exemple (autre expérience aléatoire) : on lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement E="on obtient un 3 ou un 6". Dans cette expérience il y a 6 issues possibles (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) mais seulement deux qui sont favorables à E (à savoir 3 et 6). Deux cas sont alors favorables à l'évènement sur 6 cas possibles ; en conclusion : $P(E) = \frac{2}{6}$.

On ramène le calcul des probabilités à un comptage de possibilités. Avant d'avancer, il nous faut donc nous armer d'outils de comptage... d'ailleurs on dit plutôt *dénombrement* que comptage.

Outils du dénombrement

Définition

Pour tout entier n strictement positif on définit **factorielle de** n notée $n!$ comme le produit des n premiers entiers consécutifs.

Par exemple $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
On conviens, pour le bien être de l'univers mathématique, que $0! = 1$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Démonstration. C'est une conséquence triviale de la définition. □

Définition

Soient n et p des entiers tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. On défini A_n^p appelé l'**arrangement de** p **parmi** n le nombre

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

L'arrangement A_n^p correspond au produit des p nombres partant n en décrémentant. Par exemple $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Définition

Soient n et p des entiers tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. On défini C_n^p appelé la **combinaison de** p **parmi** n le nombre

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Par exemple $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

Proposition Triangle de Pascal

Soient n et p des entiers tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
C_n^p + C_n^{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n! \times (p+1)}{p!(n-p)! \times (p+1)} + \frac{n! \times (n-p)}{(p+1)!(n-p-1)! \times (n-p)} \\
&= \frac{n! \times (p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{n! \times (n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n![(p+1) + (n-p)]}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n![n+1]}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-p-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} \\
&= C_{n+1}^{p+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

On parle du triangle de Pascal (du au mathématicien, physicien, philosophe etc Blaise Pascal) car ces nombres s'obtiennent de manière récurrentes en dessinant un tableau. Les lignes représentent le n et les colonnes le p.

n/p	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

On initialise ce tableau en mettant des 1 sur la diagonale et dans la première colonne ainsi que des 0 au dessus de la diagonale

n/p	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1		1	0	0
3	1			1	0
4	1				1

La formule s'illustre alors en sommant deux termes consécutifs sur une ligne pour obtenir celui de la ligne suivante

n/p	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1			1	0
4	1				1

n/p	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	0	0
3	1		3	1	0
4	1				1

etc

Calculs des probabilités

On considère une urne avec n boules numérotées de 1 à n. On va tirer p boules dans cette urne de plusieurs manières différentes.

Premier cas : tirage avec remise.

Il y a n^p tirages différents.

Prenons par exemple $n = 4$ et $p = 2$. On se demande combien de tirage différent sont possibles de 2 boules dans une urne qui en contient 4. On commence par tirer une première boule, il y a 4 possibilités différentes. Puisque cette boule tirée est remise dans l'urne (car c'est le cas que nous traitons ici) alors lors du second tirage nous avons encore 4 possibilités. La liste de tous les cas possibles est

$$\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{array}$$

Second cas : tirage sans remise. Avec cette formulation on suppose que l'ordre compte.

Il y a A_n^p tirages différents.

Prenons par exemple $n = 4$ et $p = 2$. On se demande combien de tirage différent sont possibles de 2 boules dans une urne qui en contient 4. On commence par tirer une première boule, il y a 4 possibilités différentes. Puisque cette boule tirée n'est pas remise dans l'urne (car c'est le cas que nous traitons ici) alors lors du second tirage nous n'avons plus que 3 possibilités. La liste de tous les cas possibles est

$$\begin{array}{cccc} & 12 & 13 & 14 \\ 21 & & 23 & 24 \\ 31 & 32 & & 34 \\ 41 & 42 & 43 & \end{array}$$

Troisième cas : tirage simultané. Le mot simultané est équivalent à sans remise et sans ordre.

Il y a C_n^p tirages différents.

Prenons par exemple $n = 4$ et $p = 2$. On se demande combien de tirage différent sont possibles de 2 boules dans une urne qui en contient 4. On sait que si l'ordre compte on en a A_4^2. Mais dans ce dénombrement une différence a été faite entre 12 et 21 qui sont, dans le cas simultané le même tirage. Il faut donc diviser le nombre A_4^2 par $2 = 2!$ pour obtenir le résultat ce qui correspond exactement, par définition, à C_4^2. La liste de tous les cas possibles est

$$\begin{array}{ccc} 12 & 13 & 14 \\ & 23 & 24 \\ & & 34 \end{array}$$

Toutes les expériences aléatoires, comme presque tous les jeux combinatoires, peuvent s'identifier à un tirage de boule dans une urne. Par exemple combien de code a 4 chiffres est-il possible de composer avec un clavier numérique classique ? Cela reviens à se demander, dans une urne avec 10 boules, combien de tirage de 4 boules avec remise peut-on faire ? La réponse est $10^4 = 10\ 000$.

Autre exemple. On tire deux cartes au hasards dans un jeu qui en contient 52 (tirage simultané). Combien de jeu différent est-il possible d'obtenir ? Cela s'identifie à un tirage simultané de 2 boules dans une urne qui en contient 52 donc $C_{52}^2 = 1\ 326$.

Pour le calcul des probabilités, on raisonne comme nous l'avons suggéré dans l'introduction. La probabilité d'un évènement correspond au ratio du nombre de cas favorable divisé par le nombre de cas possible.

Toujours avec l'expérience aléatoire de tirer deux cartes dans un jeu de 52 (tirage simultané), considérons l'évènement E="On obtient deux piques". Alors $P(E) = \dfrac{C_{13}^2}{C_{52}^2}$. En effet il y a en tout C_{52}^2 tirage possibles (on prend 2 cartes parmi 52), d'où le dénominateur. Mais il y a C_{13}^2 manières d'avoir deux piques (sur les 52 cartes il y a 13 piques et on en souhaite 2) d'où le numérateur.

Considérons l'évènement F="Obtenir au moins un cœur". Pour calculer $P(F)$ utilisons quelques éléments théoriques.

Proposition

Soit Ω l'univers des possibilités d'une expériences aléatoire. Notons A un évènement et $\overline{A}$ son contraire.

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pour déterminer la probabilité de l'évènement F nous allons passer par son contraire $\overline{F}$="Obtenir aucun cœur". On a $P(\overline{F}) = \dfrac{C_{39}^2}{C_{52}^2}$ car 39 cartes ne sont pas des cœurs. En conclusion $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \dfrac{C_{39}^2}{C_{52}^2}$.

Un exemple

Considérons une urne avec 5 boules : deux boules rouges numérotées 1 et 2, deux boules bleues numérotées 1 et 2 et une boule verte avec le numéro 1. L'expérience aléatoire consiste à tirer avec remise trois boules dans l'urne.

> Quel est la probabilité de l'évènement "*on tire exactement une boule rouge ou exactement une boule numérotée d'un 1.*" ?

On considère les évènements suivants :
— A="On obtient exactement une boule rouge".
— B="On obtient exactement une boule numérotée d'un 1".

Déterminons la probabilité de l'évènement A. Il y a 5^3 tirages possible, il suffit de déterminer le nombre de tirage favorable à l'évènement A. Il faut donc compter combien donne exactement une boule rouge. Il y a trois cas :

1. On tire une boule rouge au premier tirage donc nécessairement deux boules non rouge pour les autres tirage ; ce qui donne $2^1 \times 3^2 = 18$ puisque dans l'urne deux boules sont rouges et 3 ne le sont pas (et qu'il s'agit d'un tirage avec remise).
2. On tire une boule rouge au second tirage donc le premier et le troisième sont non rouge ; ce qui donne : $3^1 \times 2^1 \times 3^1 = 18$.
3. On tire une boule rouge au troisième tirage ; ce qui donne $3^2 \times 2^1 = 18$.

Finalement $P(A) = \dfrac{18+18+18}{5^3} = \dfrac{54}{125} = 0.432$.

De la même manière pour l'évènement B : $P(B) = \dfrac{3^1 \times 2^2 + 2^1 \times 3^1 \times 2^1 + 2^2 \times 3^1}{5^3} = \dfrac{36}{125} = 0.288$.

Déterminons à présent $P(A \cap B)$. L'évènement $A \cap B$ est "*On obtient exactement une boule rouge et une boule marquée de 1*". On peut diviser cette évènement en deux partie : tirer trois boules dont le 1 rouge (et donc deux qui ne sont ni 1 ni rouge), on notera E_1 cet évènement ou tirer trois boules avec un 1 et un rouge (et une ni 1 ni rouge) mais sans le 1 rouge que l'on notera E_2. Avec notre construction nous avons $P(A \cap B) = P(E_1) + P(E_2)$. Comme pour l'évènement A puisqu'il y a un seul 1 rouge et une seule boule qui n'est ni 1 ni rouge, on a $P(E_1) = \dfrac{1^1 \times 1^2 + 1^1 \times 1^1 \times 1^1 + 1^2 \times 1^1}{5^3} = \dfrac{3}{125} = 0.024$.

De la même manière : il y a une seule boule rouge qui n'est pas le 1 rouge, il y a deux boules numérotées 1 qui ne sont pas rouge et toujours une seule boule qui n'est ni rouge ni 1 ; de plus il y a 6 tirages différents possibles d'une boule rouge (qui n'est pas 1), d'un 1 (qui n'est pas rouge) et d'une boule qui n'est ni un rouge ni un 1 d'où $P(E_1) = 6 \times \dfrac{1^1 \times 2^1 \times 1^1}{5^3} = \dfrac{12}{125} = 0.096$.

Au final $P(A \cap B) = 0.024 + 0.096 = 0.12$.

Pour conclure la question de cet exercice, on utilise une formule introduite dans le précédent paragraphe :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.432 + 0.288 - 0.12 \\ &= 0.72 - 0.12 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Indépendance et conditionnement

Définition

On dira que deux évènements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dans l'exemple précédent les évènements A et B ne sont pas indépendants car d'une part $P(A) \times P(B) = 0.432 \times 0.288 = 0.124416$ et d'autre part $P(A \cap B) = 0.12$.

Imaginons que nous lancions deux pièces de monnaies équilibrées. On note A l'évènement "*la première pièce donne un pile*" et B l'évènement "*la seconde pièce donne face*". Alors l'expérience s'identifie à tirer deux boules (la première pièce et la seconde pièce) dans une urne qui contient deux boules (pile et face). Le tirage est avec remise. Il y a donc 2^2 cas possible que l'on peut facilement énumérer $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. On observe alors que deux cas sont favorables à A ; précisément PP et FP d'où $P(A) = \frac{2}{4}$ et deux cas sont favorables à B (FF, PF) d'où $P(B) = \frac{2}{4}$. L'évènement $A \cap B$ correspond à "la première pièce donne pile et la seconde donne face" qui ne peut être que PF d'où $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Alors

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = P(A) \times P(B)$$

et les évènements A et B sont indépendants.

Définition

Soient A et B deux évènements tel que $P(B) \neq 0$. On définit la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ par la formule

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Reprenons le dernier exemple avec le lancer des deux pièces. On a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$.

Proposition

Deux évènements A et B de probabilités non nuls sont indépendants si et seulement si

$$P(A|B) = P(A)$$

Démonstration. Cela vient de la définition de conditionnement $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ qui se réécrit $P(A|B) \times P(B) = P(A \cap B)$.

- Si A et B sont indépendants alors $P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et en simplifiant par $P(B)$ on trouve $P(A|B) = P(A)$.
- Si $P(A|B) = P(A)$ alors $P(A)P(B) = P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$.

□

Voici un outil de la théorie des ensembles nécessaire à la formulation de la *probabilité totale*. C'est conceptuellement assez technique. Pour l'illustrer ce principe considérons l'expérience aléatoire suivante :

> On dispose de deux urnes. Un première U_1 contenant une boule blanche et quatre boules noires et une seconde U_2 avec trois boules blanche et deux boules noire.
>
> On lance un dé équilibré. Si il tombe sur un 6 on tire au hasard une boule dans l'urne U_1 sinon dans l'urne U_2.

Dans la suite du chapitre nous allons tenter de répondre à la question suivante : après avoir réalisé cette expérience nous avons tirer une boule noire. Quel est la probabilité d'avoir obtenu un 6 lors du lancé de dé ?

Définition

Soit E un ensemble. Une **partition** de E est la donnée de sous-ensemble E_i tel que leur union donne E et ont deux à deux des intersections vide.

Les partitions permettent de diviser l'univers des possibilités en plusieurs parties parfois plus simple à comprendre et dont les calculs de probabilités sont plus triviaux.

Dans notre exemple nous pouvons par exemple scinder l'univers des possibilités en deux (partitionner Ω en deux sous-ensembles) : soit on a obtenu un 6 lors du lancé de dé soit pas.

Théorème Formule de la probabilité totale

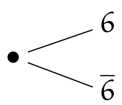
Soit A un évènement de $(\Omega_i)_i$ une partition de l'univers des possibilités Ω.

$$P(A) = \sum_i P(A|\Omega_i)P(\Omega_i)$$

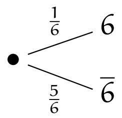
Mais oui que ça fait peur, que c'est incompréhensible, illisible ! Pas de panique nous allons tout de suite comprendre et voir comment, dans la pratique, une telle horreur s'utilise.

Un outil très élégant de ce type de calcul est **un arbre pondéré**. C'est un petit dessin qui représente l'expérience. Toute les expériences ne peuvent pas toujours être vu sur un arbre mais quand on cherche a appliquer la formule de la probabilité totale c'est qu'un arbre ne doit pas être loin.

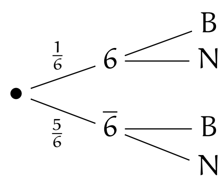
Nous commençons l'expérience par lancer un dé dont l'issu est soit un 6 soit pas un 6.



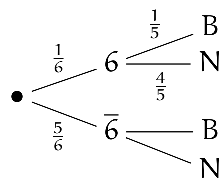
On augmente cet arbre en mettant sur les branches les probabilités d'obtenir l'évènement visé. Il y a trivialement une chance sur 6 d'obtenir un 6 et donc 5 chance sur 6 de ne pas l'obtenir.



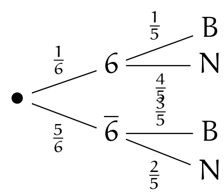
Une fois fait on tire une boule dont l'issu est la couleur blanche (B) ou noire (N) :



On doit faire apparaître les probabilités sur les arêtes. Considérons l'arête entre le 6 et le B. Par construction, la probabilité correspond à obtenir une boule blanche *sachant* que l'on a obtenu un 6 au lancé de dé. Il s'agit de la probabilité conditionnelle de B sachant 6. Inutile ici de revenir à la définition puisque si l'on a obtenu un 6 alors on a tiré au hasard une boule dans l'urne U_1, qui contient une seule boule blanche parmi les 5 d'où



De même pour les arêtes issues de $\overline{6}$.



La formule de probabilité totale permet alors de calculer $P(N)$ en suivant tous les chemins menant à l'évènement N. On multiplie les branches consécutives et on additionne les chemins. Ici

$$P(N) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{30}$$

Répondons à présent à la question : nous avons tirer une boule noire. Quel est la probabilité d'avoir obtenu un 6 lors du lancé de dé ? Cette question revient à calculer $P(6|N)$.

$$P(6|N) = \frac{P(6 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(6)P(N|6)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{5}}{\frac{14}{30}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{14}{30}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \simeq 0.286$$

Il y a environ 30% de chance d'avoir obtenue un 6 si à la fin de l'expérience on a tiré une boule noire.

Variables aléatoires

Nous commençons ce nouveau chapitre avec la définition ce ce qu'est une variable aléatoire. En préambule de cette définition, rappelons-nous les quelques mots marquant l'entrée des enfer de Dante : "*vous qui entrez ici, abandonner tout espoir*".

Définition

Soit Ω l'univers des possibilités d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire réelle sur Ω** est la donnée d'une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Voila ! Comment ça va vous ? Alors oui ça pique. Comme nous l'avons légèrement survolé dans l'introduction du chapitre sur les probabilités, les concepts théoriques de cette branche des mathématiques que sont les probabilités sont très lourd mais très puissants. La définition de variable aléatoire présentée ici est aussi une de ces lourdeurs. Dans la pratique on n'utilise jamais (oh grand jamais) un tel concept fonctionnelle. On se rappel une formulation beaucoup plus simple de variable aléatoire : c'est une autre manière de regarder l'univers. C'est ce qu'est une fonction dans le fond ! Une fonction *transforme* l'espace de départ en l'espace d'arrivé. C'est ce que fait une variable aléatoire : comprendre, interpréter une expérience aléatoire d'une autre manière.

Prenons un exemple fameux : on lance deux dès non truqués. Alors l'univers des possibilités de cet expérience est l'ensemble des couples avec les nombres entiers de 1 à 6 que l'on peut énumérer :

$$\begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array}$$

On va considérer la variable aléatoire $X(a, b) = a + b$... oups pardon, j'ai dit qu'on n'utilise presque jamais la considération fonctionnelle des variables aléatoires. On considère donc la variable aléatoire où l'on fait la somme des valeurs obtenue par les dés.

Voila c'est tout. C'est pas plus compliqué : on ne regarde pas le résultat de l'expérience aléatoire en tant que tel mais modifié par une considération plus intéressante. On mélange ensuite ce concept aux calculs des probabilités classiques en se demandant par exemple quel est la probabilité d'obtenir 3 à cette somme dont la formulation devient maintenant : que vaut $P(X = 3)$?

Allez, faisons nous peur encore une fois.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers de possibilités Ω d'une expérience aléatoire. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(X = x) = P\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}\right)$$

Bon pour être honnête cette définition n'est donnée que pour vos faire peur ! Oubliez là immédiatement (à moins que...). Retenons simplement que déterminer $P(X = x)$ reviens à déterminer quelles sont les évènements de Ω qui amène à x.

Dans notre exemple, quelles sont les les évènements de Ω dont la sommes fait 3. Un bref raisonnement nous permet de voir que deux cas sont favorables à un tel résultat 12 et 21. Deux cas favorables sur 36 cas possible, on en déduit que $P(X = 3) = \dfrac{2}{36}$.

Toujours avec le même exemple que vaut $P(X = 1)$? Deux dès sont lancés, et donne au moins 1 chacun donc la somme est au moins 2. La c'est facile : $P(X = 1) = 0$ (cela n'arrive jamais). De la même manière

$P(X=-1)=0$, $P(X=\ln(2))=0$ etc... Toutes les valeurs réelles ne sont pas intéressantes à étudier pour X. Bim définition !

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers de possibilités Ω d'une expérience aléatoire. On défini le **support** de X comme l'ensemble des valeurs de probabilité non nulle. On le note $\text{Supp}(X)$:

$$\text{Supp}(X) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; P(X=x) \neq 0 \right\}$$

Dans notre exemple on trouve que $\text{Supp}(X) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

Définition

La **loi** d'une variable aléatoire réelle X est la donnée de $P(X=x)$ pour tout $x \in \text{Supp}(X)$.

Dans la pratique, quand le support n'est pas trop grand, on synthétise la loi dans un tableau :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Comme nous pouvons l'observer dans l'exemple précédent la somme des probabilités fait toujours 1.

Proposition

$$\sum_{x \in \text{Supp}(X)} P(X=x) = 1$$

Espérance

La notion d'espérance correspond, dans le cadre déterministe des statistiques, à la notion de moyenne.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle. On note $E(X)$ l'**espérance** de la variable X, défini par

$$E(X) = \sum_{x \in \text{Supp}(X)} x P(X=x)$$

L'espérance de X représente la valeur moyenne de X. Dans notre exemple de lancé de deux dé, l'espérance représente la moyenne des résultat possible.

Voici les résultats de 200 lancés (de la somme) que nous analysons comme une donnée statistique discrète :

8	2	7	7	9	9	7	9	9	9	7	8	7	11	8	12	8	6	2	7	6	10	12	8	8
6	4	10	7	10	7	7	6	6	7	5	6	8	11	8	7	12	3	9	6	10	9	10	5	3
7	9	9	3	8	7	4	8	7	5	4	5	11	6	12	7	6	11	9	7	8	6	8	7	5
9	7	8	9	7	11	3	11	9	2	2	10	9	2	8	6	4	7	7	2	6	8	6	8	5
3	3	6	4	9	7	11	8	3	7	6	3	3	11	4	10	2	8	10	11	8	5	7	9	8
7	9	3	11	6	7	10	7	5	6	5	5	3	8	7	9	5	7	9	6	2	11	7	6	11
8	6	4	4	12	6	5	7	5	6	7	11	4	8	7	8	9	7	7	8	10	4	8	3	6
7	7	5	3	6	11	6	3	2	6	4	11	5	6	5	7	5	8	6	7	10	10	5	5	9

— Il y a 9 tirages qui donnent un 2
— Il y a 14 tirages qui donnent un 3
— Il y a 11 tirages qui donnent un 4
— Il y a 19 tirages qui donnent un 5
— Il y a 28 tirages qui donnent un 6
— Il y a 39 tirages qui donnent un 7
— Il y a 27 tirages qui donnent un 8
— Il y a 21 tirages qui donnent un 9
— Il y a 12 tirages qui donnent un 10
— Il y a 15 tirages qui donnent un 11
— Il y a 5 tirages qui donnent un 12

La valeur moyenne de cette série statistique est $\frac{1390}{200} \simeq 6.95$. Déterminons la moyenne du coté probabiliste, c'est à dire l'espérance :

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

Variance et écart-type

La variance et l'écart-type en statistique ont elles aussi leurs équivalents dans l'univers non déterministe des probabilités.

Définition

La **variance** d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$ est défini par

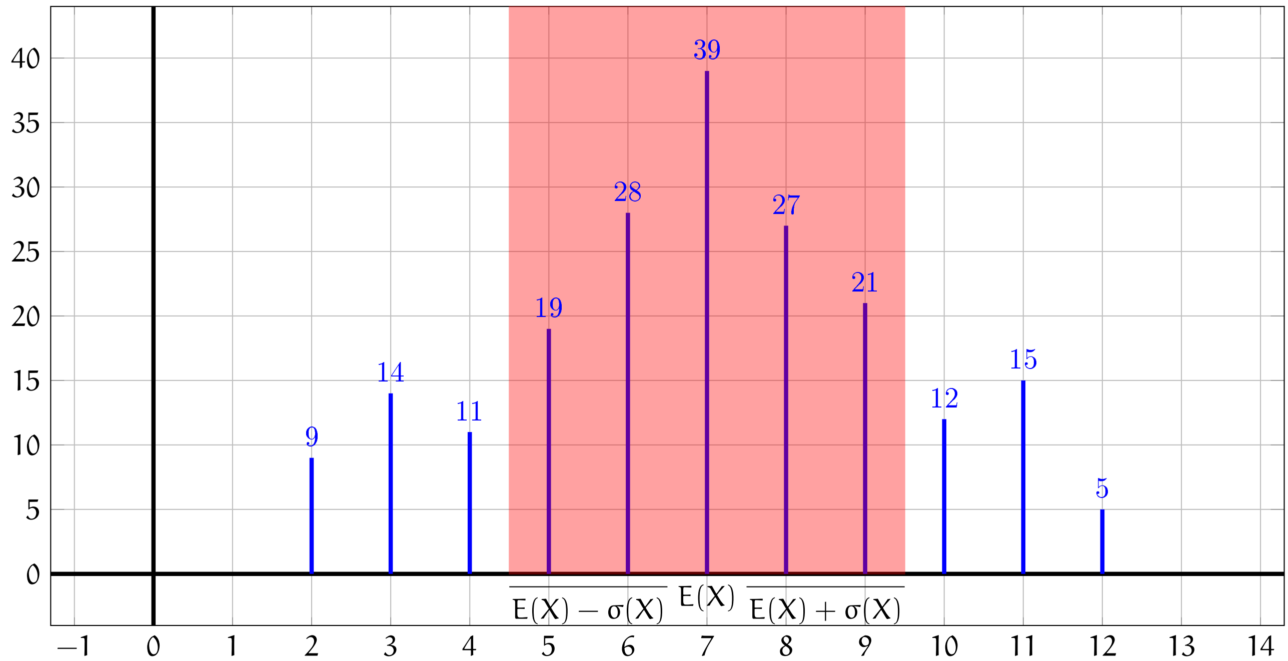
$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

L'**écart-type** $\sigma(X)$ est la racine carré de la variance.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart-type estime l'écart probable entre une possibilité et la moyenne.

Reprenons les valeurs simulées au paragraphe précédent et déterminons la variance statistique de ce jeu de donnée. Un calcul passionnant donne que la variance est $\frac{1235.5}{200} \simeq 6.1775$ et donc l'écart-type vaut approximativement 2.5. Nous avions trouvé une moyenne de 6.95 que nous pouvons arrondir à 7. Alors il faut comprendre que la plupart des résultats de cette expérience aléatoire sont autour de 7 à plus ou moins 2.5 prés. En effet si on représente les données dans un diagramme en bâtons nous observons bien que plus de 60% des simulations sont entre 4.5 et 9.5. Les autres évènements ne sont pas improbables mais plus rare.



Dans la pratique on utilise la formule suivante pour calculer la variance.

Proposition Formule de Köning-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} (x - E(X))^2 P(X = x) \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) P(X = x) \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} x^2 P(X = X) - \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} 2xE(X)P(X = x) + \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} E(X)^2 P(X = x) \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} x^2 P(X = X) - 2E(X) \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} xP(X = x) + E(X)^2 \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} P(X = x) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \times 1 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

□

Déterminons à présent la valeur exacte et la variance et de l'écart-type de l'exemple que nous traitons.

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + 5^2 \times \frac{4}{36} + 6^2 \times \frac{5}{36} + 7^2 \times \frac{6}{36} + 8^2 \times \frac{5}{36} + 9^2 \times \frac{4}{36} + 10^2 \times \frac{3}{36} + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}} \simeq 2.4152294577$$

Loi de Bernoulli

Définition

Soit $p \in [0; 1]$. On dira qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi de Bernoulli**, notée

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

si le support de X est composée de deux valeurs, que l'on peut ramener à 0 et 1 tel que $P(X = 1) = p$.

La loi de Bernoulli est appelé également la loi de *succès-échec*. Le paramètre p représentant la probabilité d'un succès. Puisque la somme des probabilités vaut toujours 1, on en déduit que $P(X = 0) = 1 - p$. On obtient aussi facilement les caractéristiques suivantes :

Théorème

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

1. $\mathrm{Supp}(X) = \{0; 1\}$.
2. La loi est $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.
3. $E(X) = p$.

4. $V(X) = p(1-p)$.
5. $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Voici un exemple. On joue au jeu suivant :

> On lance un dé. Si on obtient un nombre impaire on a perdu. Si on obtient un nombre paire on relance le dé. Si, à ce second lancé, on obtient un 6 on gagne sinon on perd.

Jouer à ce jeu coûte $10€$. Si on gagne, on gagne $100€$. Quel est le gain moyen de ce jeu ?

Nous somme dans le cas d'un succès-échec (gagner ou perdre). Déterminons la probabilité de gagner. Gagner c'est obtenir un nombre impaire au premier lancé, soit un chance sur 2, puis le 6 au second lancé soit une chance sur 6. Finalement la probabilité de gagner est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ et la probabilité de perdre et donc de $\frac{11}{12}$. Ainsi le nombre moyen de parti gagné est $p = \frac{1}{12}$. C'est à dire qu'on gagne $100€$ une fois sur 12. Pour être précis on gagne $90€$ car la partie à coûté $10€$. Inversement 11 fois sur 12 on perd $10€$. Si on fait la moyenne on arrive au gain moyen $-10 \times \frac{11}{12} + 90 \times \frac{1}{12} = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$. En moyenne, on perd environ $2,33€$. Cela signifie que si l'on joue 1000 fois, parfois on va gagner, souvent on va perdre et en moyenne on va perdre $2.33 \times 1000 = 2\ 330€$.

Si on reprend le même problème avec un gain de $150€$ en cas de victoire alors le gain moyen sera $-10 \times \frac{11}{12} + 140 \times \frac{1}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$. Avec cette modalité, on va toujours perdre souvent mais les rare fois où l'on va gagner on va gagner suffisamment pour équilibrer notre porte feuille. Précisément si l'on joue 1000 fois, on va en moyenne, gagner $2\ 500€$.

Dans les jeux de casino, ou les jeux à gratter de la française des jeux, cette même étude est mené pour déterminer le prix du jeu. Il est calculé de telle sorte que la banque a toujours un gain positif et donc le joueur est, en moyenne, toujours perdant !

Loi Binomiale

Définition

Soient n un entier strictement positif et $p \in [0;1]$. On dira que X suit une loi binomiale, noté

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

si son support se ramène aux entiers entre à et n et que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

La loi binomiale est appelée également la loi de n succès-échec.

Théorème

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

1. $\mathrm{Supp}\,(X) = \{0, 1, \dots, n\}$.
2. La loi est $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
3. $E(X) = np$.
4. $V(X) = np(1-p)$.
5. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Voici un exemple. Un questionnaire à choix multiple est composé de 8 questions. Pour chacune d'elles 4 réponses sont proposées et une seule est juste. Un étudiant répond au hasard à chacune des 8 questions de ce QCM. Quelle est la probabilité qu'il ai exactement 4 réponses correcte.

On note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonne réponse. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(8; \frac{1}{4}\right)$. En effet, il s'agit de 8 succès ou échec (bonne réponse ou mauvaise réponse). Un succès étant une bonne réponse.

Puisque l'étudiant répond au hasard parmi les 4 solutions proposées il a une chance sur 4 d'avoir la réponse correcte.

La question reviens alors à se demander que vaut $P(X=4)$. D'après la formule on a

$$P(X=4) = C_8^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-4} = 70\frac{1}{4^4}\frac{3^4}{4^4} = \frac{70\times 3^4}{4^8} = \frac{5670}{65536} \simeq 0.087$$

Il y a donc environ 9% de chance d'avoir la moyenne... pas très fameux.

Combien de réponse seront juste en moyenne ? Il s'agit de calculer $E(X) = 8 \times \frac{1}{4} = 2$. En répondant au hasard, on aura en moyenne deux bonnes réponses sur les 8. Il a donc de forte chance d'avoir, en répondant au hasard, d'avoir au moins une réponse juste. Déterminons cette probabilité. Avoir au moins une réponse juste reviens à calculer $P(X \geqslant 1)$. Passons par l'évènement contraire : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1)$ mais puisque X ne prend que des valeurs entières strictement positives si $X < 1$ alors $X = 0$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_8^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-0} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 1 - \frac{3^8}{4^8} = 1 - \frac{6561}{65536} \simeq 0.899$$

Il y environ 90% de chance d'avoir au moins une réponse correcte mais moins de 10% d'en avoir 4.

Un nombre un peu spécial

Si l'on observe de plus près le mot trigonométrie de devine de quoi on va parler :
— *tri* pour trois,
— *gono* pour angle (ou coin, c'est la même racine étymologique que *genoux*),
— *métrie* pour mesure

La trigonométrie est la branche des mathématiques qui étudie les triangles. Il s'agit bien de l'objet que vous connaissez depuis l'enfance mais nous le considérerons plus par ses angles que par ses cotés bien que les deux soient très étroitement liés.

Les angles que vous connaissez sont ceux qui se mesure en degrés. Quatre-vingt-dix degrés pour un angle droit, cent quatre vingt pour un angle plat, trois cents soixante pour un tour complet !

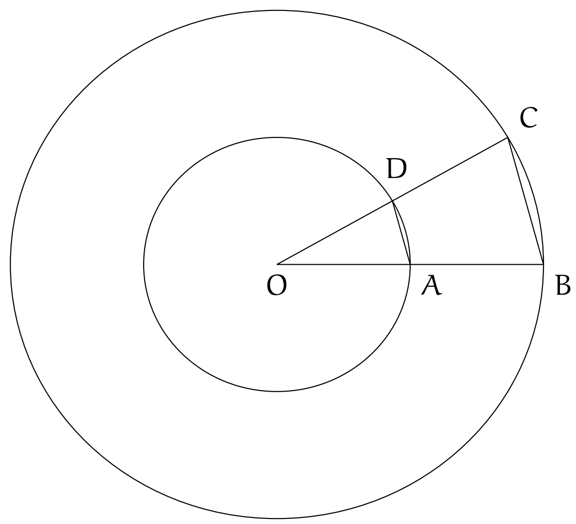
Vous êtes vous demandé d'où venait cette étrange convention ? Pourquoi 360 degrés pour un tour ? On aurait aussi pu convenir que 10 degrés faisait un tour ! La réponse n'est pas très claire mais il semblerait que cette convention trouve ses racines dans l'histoire de l'humanité et aurait la même cause que la raison pour laquelle il y a 60 minutes en une heure ou 60 secondes en une minute : les premiers penseurs de ces mesures viennent d'Amérique du sud et il était coutumier pour nos ancêtres de parler en base soixante plutôt que 10.

Mais à bien des égares, il est apparu nécessaire de convenir d'une autre unité de mesure que les degrés.

Pour la faire naitre, on considère un cercle (qui dit angle dit cercle) et on demande :

Quel est le périmètre d'un cercle ?

Pour tenter d'approcher une réponse, faisons un dessin non pas avec un cercle mais avec deux.



On observe que plus la distance AD est petite plus elle *approche* la longueur de l'arc AD ; on note $\overset{\frown}{AD}$ la longueur de cette arc. De la même manière la longueur de la droite BC est une bonne approximation de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

En utilisant le bon vieux théorème de Thalès, on montre que $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AD}{BC}$. En approchant la taille des arcs par celle des segments et en faisant une petite règle de trois on trouve

$$\overset{\frown}{BC} = \frac{OA}{OB}\overset{\frown}{AD}$$

Revenons à présent à la question du calcul du périmètre d'un cercle. On peut diviser le cercle en *morceau* très petit aussi petit que la longueur $\overset{\frown}{BC}$ (ou $\overset{\frown}{AD}$ suivant le cercle que vous regardez). Donc la somme de tous ces morceaux donnent le périmètre du cercle. Mais la formule déterminée précédemment montre que le périmètre du petit cercle, vu comme la somme de plein de petit morceau d'arc $\overset{\frown}{BC}$, est proportionnelle à la somme de plein de petit morceau $\overset{\frown}{AD}$. En effet le rapport $\dfrac{OA}{OB}$ reste constant en fonction du nombre de morceau. D'ailleurs, nous pouvons être plus précis car OA est en fait le rayon du petit cercle tandis que OB est le rayon du grand ! Si on note r le rayon du petit cercle, p son périmètre et R le rayon du grand cercle, P son périmètre alors la précédente formule s'écrit $p = \dfrac{r}{R}P$. Jouons un peu avec cette formule. On note $D = 2R$ et $d = 2r$ les diamètres des cercles.

$$\begin{aligned} p = \frac{r}{R}P \quad &\Longleftrightarrow \quad p = \frac{2r}{2R}P \\ &\Longleftrightarrow \quad p = \frac{d}{D}P \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{p}{d} = \frac{P}{D} \end{aligned}$$

Nous venons donc d'observer que le rapport du périmètre par le diamètre est toujours égale à la même valeur.

Définition

On note π le rapport du périmètre d'un cercle par son diamètre. Ce nombre ne dépend pas du cercle. On a l'estimation suivante :

$$\pi \simeq 3.141592...$$

Le symbole π se lit *pi* et correspond à la lettre grecque p (pour périmètre). On peut démontrer, avec souffrance, que $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Le nombre π est une bonne base pour le travail avec les angles.

Définition

On mesure les angles en *radian*. Un tour complet (360 degrés) correspond à 2π.

Puisqu'il y a un rapport proportionnel entre les mesures en degrés et en radian on a les équivalence suivantes.

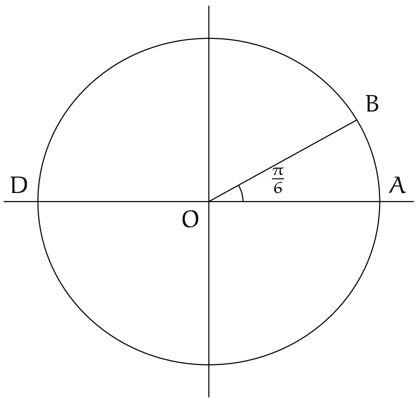
Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Le cercle trigonométrique

L'outil centrale de la trigonométrie est le cercle trigonométrique.

Définition

Un **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1.



Lorsque l'on souhaite faire, comprendre, voir de la trigonométrie, on représente un cercle trigonométrique centré en l'origine d'un repère cartésien et on représente l'angle sur lequel on souhaite faire des observations ou calcul. Sur l'exemple on a représenté $\dfrac{\pi}{6}$.

Définition

Le **sens trigonométrique** ou **sens direct** correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'angle $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ et l'angle $\widehat{BOA} = -\dfrac{\pi}{6}$.

Qu'en est-il des angles π et $-\pi$. Sur la représentation ci-contre, c'est deux angles aboutissent au même point : le D. On est très fortement amené à penser que *sur le cercle trigonométrique* $\pi = -\pi$. C'est d'ailleurs vrai. Mais attention ! Le nombre réel $\pi \simeq 3.14$ tandis que le nombre réel $-\pi \simeq -3.14$. Ils sont bel et bien différent mais *sur le cercle trigonométrique* ils sont les même. Comme écrire $\pi = -\pi$ pique un peu les yeux on introduit une notation.

Définition

Lorsque l'on travaille sur le cercle, on considère les angles à 2π près. Si deux angles α et β sont égaux sur le cercle trigonométrique on dira qu'ils sont égaux **modulo** 2π on écrira $\alpha = \beta \quad [2\pi]$ ou $\alpha \equiv_{2\pi} \beta$. Cela signifie que $\alpha - \beta = 2\pi \times k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Dans cette définition le nombre k représente le nombre de tour (on rappel qu'un tour correspond à un angle de 2π radian) que l'on fait. Ainsi nous pouvons écrire $\pi \equiv_{2\pi} -\pi$ car $\pi - (-\pi) = 2\pi = 2\pi \times 1$; autrement dit : les angles π et $-\pi$ sont les mêmes à un tour de cercle près.

Autre exemple :

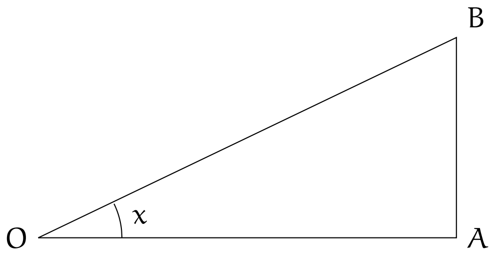
$$\frac{2023\pi}{3} = \frac{(674 \times 3 + 1)\pi}{3} = \frac{674 \times 3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 674\pi + \frac{\pi}{3}$$

En d'autre terme $\frac{2023\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont les mêmes angles à 337 tours près $(337 = 674 \div 2)$: $\frac{2023\pi}{3} \equiv_{2\pi} \frac{\pi}{3}$

Cosinus, sinus et tangente

Définition

Soit OAB un triangle rectangle en A. Notons x l'angle $\widehat{AOB}$.



- Le **cosinus** de l'angle x est le rapport $\frac{OA}{OB}$.
- Le **sinus** de l'angle x est le rapport $\frac{AB}{OB}$.
- La **tangente** de l'angle x est le rapport $\frac{AB}{OA}$.

Voici un fameux moyen mnémotechnique pour retenir ces formules :

CASSE TOI

Quelques explications s'impose :

- Dans un triangle rectangle le plus grand des cotés est appelé **l'hypoténuse**.
- Le **coté adjacent** à l'angle x est OA. C'est le coté adjacent à l'angle x et l'angle droit.
- Le **coté opposé** à l'angle x est AB. C'est le coté qui est "en face" de l'angle x.

L'angle opposé à x est adjacent à y et inversement.

Le fameux *casse toi* s'écrit **CAH SOH TOA** :

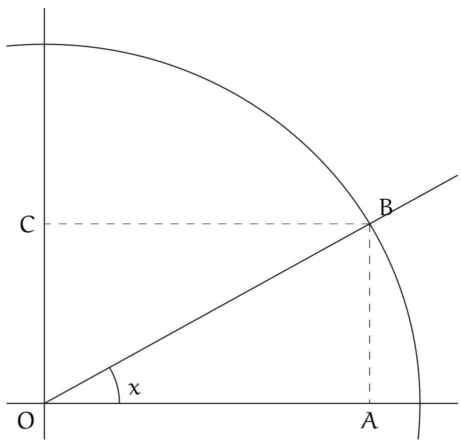
CAH : le **Cosinus** est le rapport du coté **Adjacent** par l'**Hypoténuse**.

SOH : le **Sinus** est le rapport du coté **Opposé** par l'**Hypoténuse**.

TOA : la **Tangente** est le rapport du coté **Opposé** par le coté **Adjacent**.

Nous n'allons pas plus surcharger ce cours déjà très empreinte de géométrie, mais sans trop souffrir et à l'aide du théorème de Thalès, on peut montrer que les longueur des cotés n'importe pas. Seule les mesures des angles sont importants. Puisque c'est ainsi, on va considérer, pour travailler avec ces objets, des triangles rectangles dont l'hypoténuse fait 1, ainsi nous n'aurons plus à utiliser des fractions pour le cosinus et le sinus.

Faisons tout de suite le liens avec le cercle trigonométrique.



En appliquant les formules, on a $\cos(x) = \frac{OA}{OB}$ mais OB est un rayon du cercle trigonométrique, qui est par définition de rayon 1. Donc $\cos(x) = OA$.

De même $\sin(x) = \frac{AB}{OB} = AB = OC$.

Ainsi le cosinus et le sinus d'un angle représentent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point d'intersection entre le cercle trigonométrique et le droite formant l'angle souhaité avec l'axe des abscisses.

On observe alors que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On va donc mettre cette fonction de coté et nous concentrer sur le deux autres.

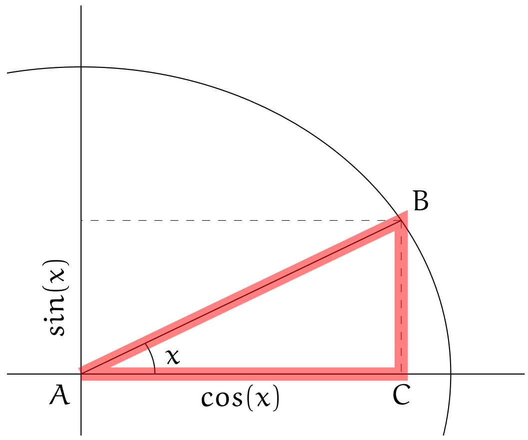
Formulaire

Proposition Pythagore

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration.



On a $AC^2 + BC^2 = AB^2$ (théorème de Pythagore) soit encore $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ □

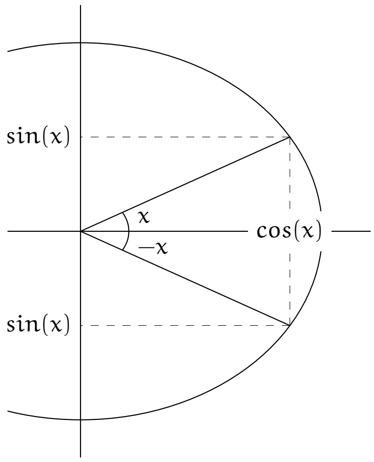
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Démonstration.



□

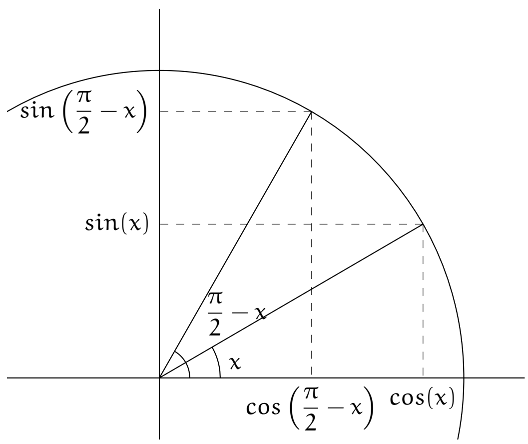
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Démonstration.



□

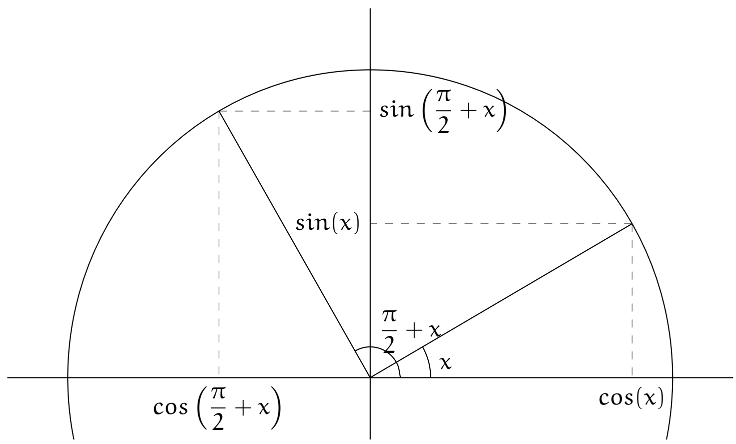
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

Démonstration.



□

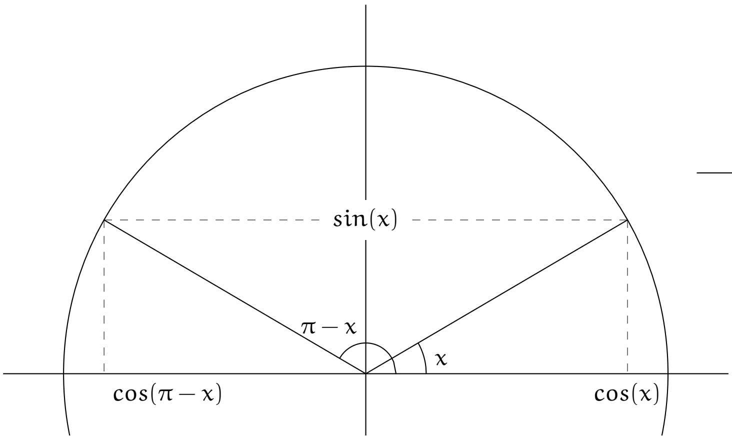
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Démonstration.



□

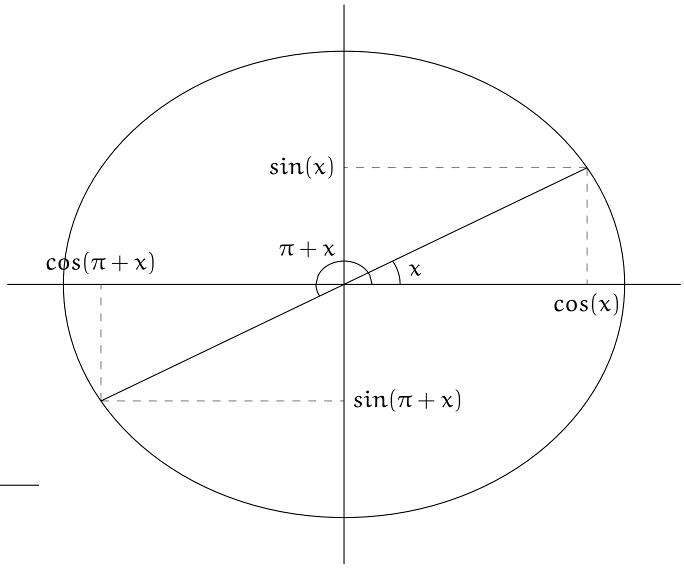
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Démonstration.



□

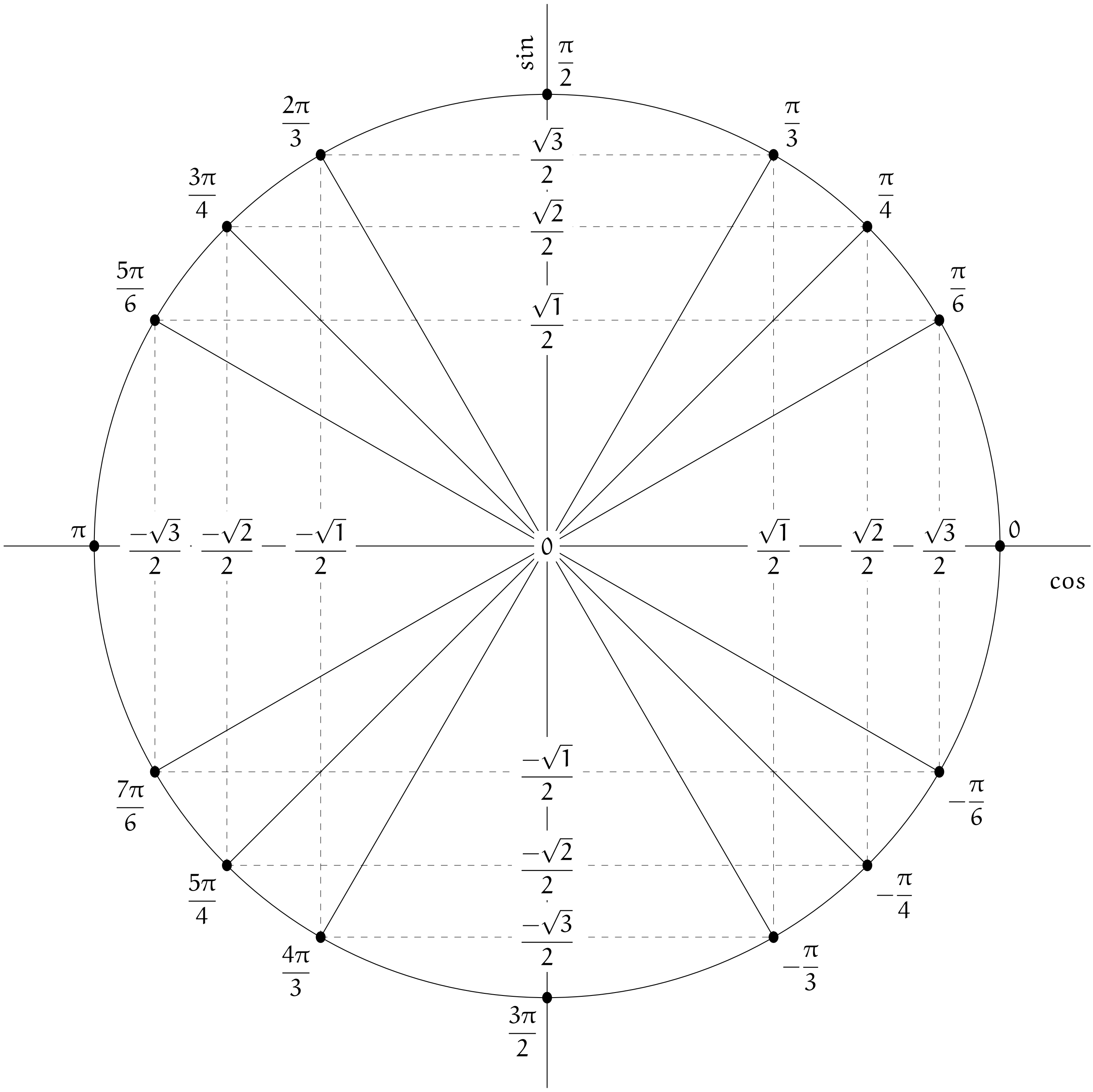
De cette dernière formule on peut observer que $\cos(x+2\pi) = \cos((x+\pi)+\pi) = -\cos(x+\pi) = \cos(x)$; de même pour le sinus. On savait cependant déjà que $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ puisque $x \equiv_{2\pi} x + 2\pi$.

Proposition

x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. Par de petits jeu géométrique on peut déterminer ces valeurs. Ce n'est pas très difficile mais pas vraiment pertinent. □

En jumelant ces derniers résultats avec les précédents, on peut déterminer le cosinus et le sinus de bien plus de valeurs. La représentation ci-dessous en donne certaine.



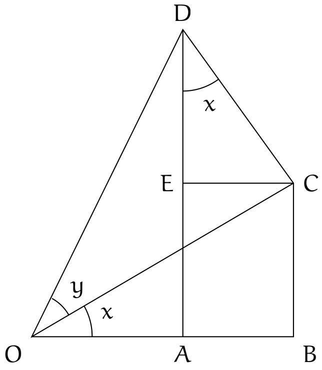
Formules de duplication

Vous pensiez avoir tranquillement survécu à ces quelques formules de trigonométrie ? Que nenni !

> **Théorème**
>
> Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
>
> $$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
>
> $$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Démonstration.

On considère OBC et OCD des triangles rectangles respectivement en B et C tel que $\widehat{BOC} = x$ et $\widehat{COD} = y$. On projette le point D sur la droite (OB) que l'on nomme A et on projette le point C sur la droite (AD) que l'on nomme E. Un résultat bien connu sur les triangles semblables permet de justifier que $\widehat{CDE} = x$. Sur un dessin tout devrait s'éclairer.



Faisons de la trigonométrie dans cette figure :

Dans le triangle OBC **:** $\cos(x) = \dfrac{OB}{OC}$ et $\sin(x) = \dfrac{BC}{OC}$.

Dans le triangle DEC **:** $\cos(x) = \dfrac{DE}{DC}$ et $\sin(x) = \dfrac{EC}{DC}$

Dans le triangle OCD **:** $\cos(y) = \dfrac{OC}{OD}$ et $\sin(y) = \dfrac{DC}{OD}$

Dans le rectangle ABCE **:** $EC = AB$ et $EA = BC$

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \frac{OA}{OD} \\
&= \frac{OB-AB}{OD} \\
&= \frac{OB-EC}{OD} \\
&= \frac{OB}{OD} - \frac{EC}{OD} \\
&= \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OD} - \frac{EC}{DC} \times \frac{DC}{OD} \\
&= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \frac{AD}{OD} \\
&= \frac{AE+ED}{OD} \\
&= \frac{BC+ED}{OD} \\
&= \frac{BC}{OD} + \frac{ED}{OD} \\
&= \frac{BC}{OC} \times \frac{OC}{OD} + \frac{ED}{DC} \times \frac{DC}{OD} \\
&= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

□

Corollaire

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Démonstration. On ne va pas toutes les démontrer. Elles se déduisent des formules précédentes. Par exemple puisque $\cos(-y) = \cos(y)$ et $\sin(-y) = -\sin(y)$ alors en remplaçant X par x et Y par $-y$ dans la formule $\sin(X+Y) = \sin(X)\cos(Y) + \cos(X)\sin(Y)$ on trouve $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.

Autre exemple, en prenant $x = y$ dans la formule $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ on obtient $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Sachant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ on en déduit que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$; ce qui donne $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$ soit encore $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. □

Dans la vie de tous les jours, on n'apprend pas toutes ces formules ! A la limite, pour les plus intéressé, on sait les retrouver mais sinon on se sert d'un formulaire ! Donc pas de panique avec toute cette trigonométrie.

Il faut savoir que ces formules existent, il faut savoir que l'expression $\cos(x+\pi)$ se simplifie, sans forcement connaitre par cœur la formule.

Fonctions trigonométriques

On considère les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$. Comme toutes fonctions que l'on cherche à étudier on applique les même méthodes : limites, dérivées asymptotes etc...

Commençons par le domaine de définition. Elles sont toutes deux définie comme le rapport d'un coté d'un triangle par son hypoténuse. Cette définition fait donc apparaitre une fraction ce qui fait naitre des contraintes. Mais nous avions observé que la longueur des cotés n'importaient pas. Seul l'angle est nécessaire pour déterminer cosinus et sinus. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous avons favorisé le travail dans les cercles trigonométriques puisque dans ce cas les hypoténuses valent 1 et donc les fractions disparaissent... emportant avec elles les problèmes de division par 0. En conclusion les fonctions cosinus et sinus n'ont aucune contrainte et sont définies sur $\mathbb{R}$.

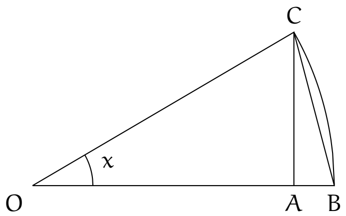
Déterminons leur dérivées.

Lemme :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Un *lemme* est un résultat, souvent technique, qui permet de simplifier la preuve d'un théorème plus pertinent.

Démonstration.



Comme nous l'avons fait dans l'introduction, nous pouvons approcher la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ par la longueur du segment $[BC]$. Or on a $\overset{\frown}{BC} = x$. En effet le périmètre d'un cercle trigonométrique est 2π donc d'un demi-cercle π, un quart de cercle $\frac{\pi}{2}$. Si la portion est délimitée par un angle x exprimé en radian alors l'arc de cercle (trigonométrique) a pour longueur x.

De plus, $AC = \sin(x)$ et $AB = OB - OA = 1 - \cos(x)$. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A on a

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = \sin^2(x) + (1-\cos(x))^2 = \underbrace{\sin^2(x)+\cos^2(x)} - 2\cos(x) + 1 = 2 - 2\cos(x) = 2(1-\cos(x))$$

En considérant que plus l'angle x est petit, c'est à dire tend vers 0, alors plus l'approximation $\overset{\frown}{BC} \simeq BC$ se rapproche d'une égalité, il en va de même pour $\overset{\frown}{BC}^2 \simeq BC^2$ ce qui se réécrit $x^2 \simeq 2(1-\cos(x))$. Par un produit en croix, on arrive à $\frac{\cos(x)-1}{x^2} \simeq -\frac{1}{2}$. Le passage à la limite permet d'arriver au résultat.

De la même manière en approchant la valeur $\overset{\frown}{BC}$ par AC on trouve immédiatement que $\sin(x) \simeq x$ soit $\frac{\sin(x)}{x} \simeq 1$ qui devient une égalité à la limite. □

Théorème

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Démonstration. On rappel que par définition

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Nous allons appliquer cette formule aux fonctions trigonométrique.

$$
\begin{aligned}
(\cos(a))' &= \lim_{x\to a}\frac{\cos(a)-\cos(x)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \\
&= \lim_{X\to 0}\frac{-2\sin(X+a)\sin(X)}{2X} \text{ où } X=\frac{x-a}{2} \\
&= \lim_{X\to 0} -\sin(X+a)\underbrace{\frac{\sin(X)}{X}}_{\to 1} \\
&= -\sin(a)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(\sin(a))' &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(a)-\sin(x)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{x-a} \\
&= \lim_{X\to 0}\frac{2\cos(X+a)\sin(X)}{2X} \text{ où } X=\frac{x-a}{2} \\
&= \lim_{X\to 0}\cos(X+a)\underbrace{\frac{\sin(X)}{X}}_{\to 1} \\
&= \cos(a)
\end{aligned}
$$

□

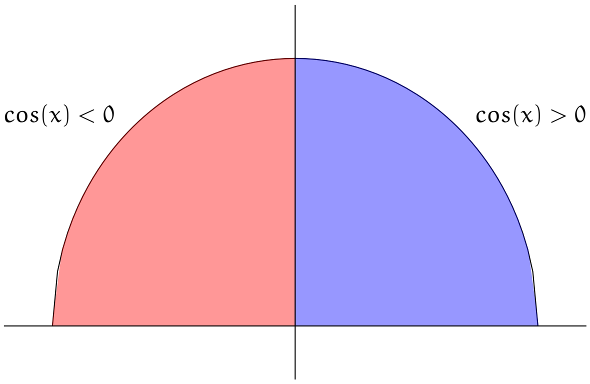
Corollaire

$$(\sin(u))' = \cos(u)\times u' \qquad (\cos(u))' = -\sin(u)\times u'$$

Démonstration. Il s'agit de la formule de dérivation de la composée de fonction. □

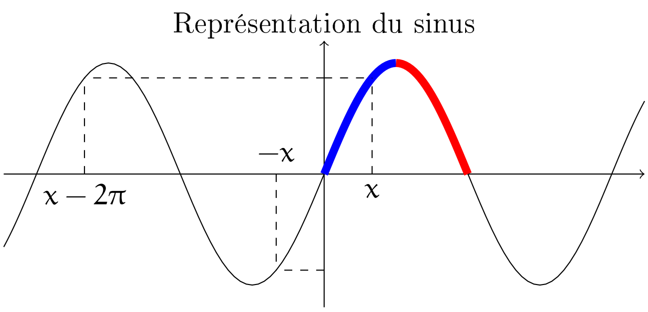
Nous pouvons poursuivre notre étude des fonctions trigonométriques.

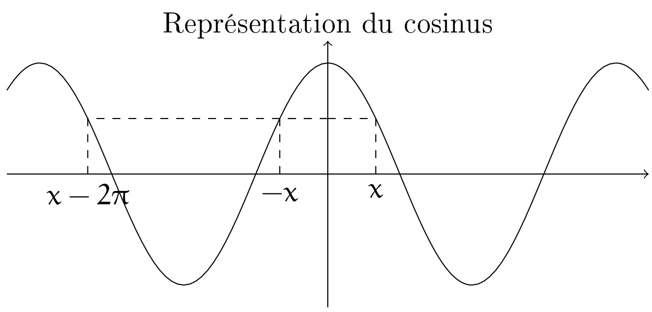
Commençons par observer que l'égalité $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi;\pi]$ (ou n'importe quelle intervalle de longueur 2π). On dit que la fonction est 2π-*périodique*, c'est à dire que vu en x ou 2π plus loin c'est la même chose. De même l'égalité $\sin(-x)=-\sin(x)$ permet de restreindre l'étude à $[0;\pi]$. On dit que la fonction est *impaire*. La dérivé du sinus est le cosinus et le cosinus dont le signe est très facilement observable sur un dessin.



La dérivé du sinus est le cosinus et il est assez facile de déterminer le signe du cosinus sur l'intervalle $[0;\pi]$. On en déduit alors que la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. En utilisant la périodicité et la parité de la fonction on en déduit la représentation graphique du sinus.

Un raisonnement similaire permet de déduire les variations de la fonction cosinus.





En particulier les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en ∞ puisqu'elles oscillent perpétuellement entre -1 et 1.

Deux exemples

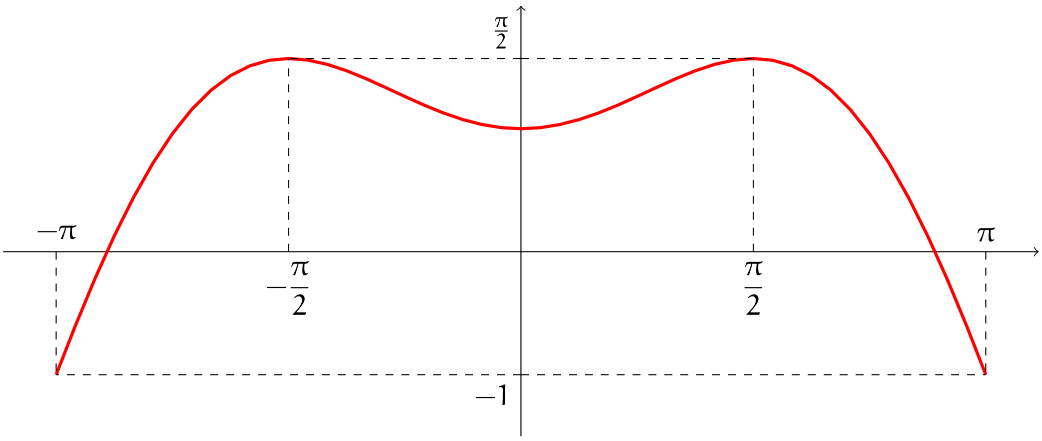
Considérons la fonction $f(x) = x\sin(x) + \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ mais que nous n'étudierons que sur $[-\pi; \pi]$. Calculons sa dérivé.

$$f'(x) = 1.\sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x)$$

Nous connaissons parfaitement le signe du cosinus ainsi que de x nous pouvons donc dresser le tableau de signe de f' et donc de variation de f.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

Ce qui permet d'obtenir la représentation graphique suivante de la fonction f.



Considérons à présent la fonction $g(x) = \dfrac{1}{\cos(2x) - 1}$ que nous souhaitons étudier entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. Cependant cette fonction ne peut être définie que si son dénominateur est non nul. Or ce dernier s'annule lorsque $\cos(2x) = 1$. A travers l'étude de la fonction cosinus nous avons observé que $\cos(X) = 1$ lorsque $X = 0$. N'oublions pas que nous travaillons dans le cercle trigonométrique, c'est à dire qu'il faut considérer les angles modulo 2π. Pour être précis, $\cos(X) = 1$ si et seulement si $X \equiv_{2\pi} 0$. En nombre réel cela signifie pour $X = -2\pi$, $X = 0$, $X = 2\pi$, $X = 4\pi$, etc. Génériquement on peut écrire $X = 0 + 2k\pi$ pour tous les $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\cos(2x) = 1$ si et seulement si $2x = 2k\pi$ soit encore $x = k\pi$ pour tous les $k \in \mathbb{Z}$. Puisque nous souhaitons étudier cette fonction entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$, il faut alors interdire les valeur 0 et π. En conclusion le domaine de définition de g est

$$\mathcal{D}_g = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup]0; \pi[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Calculons la dérivée :

$$g'(x) = -\frac{(\cos(2x) - 1)'}{(\cos(2x) - 1)^2} = -\frac{-2\sin(2x)}{(\cos(2x) - 1)^2} = \sin(2x)\frac{2}{(\cos(2x) - 1)^2}$$

Puisque la fraction $\dfrac{2}{(\cos(2x)-1)^2}$ est strictement positive sur le domaine de définition de g alors il suffit de déterminer le signe de $\sin(2x)$ pour trouver le signe de g'. Or $\sin(X) > 0$ si $0 < X < \pi$. En en déduit que $\sin(2x) > 0$ si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. On peut alors tracer le tableau de signe de g' donc les variations de g.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
g	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

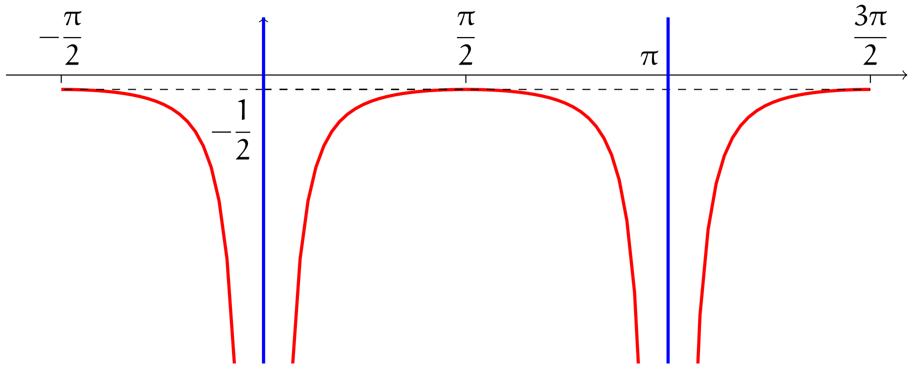
A propos des limites. En utilisant le lemme du précédent paragraphe on a Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{\cos(2x)-1} &= \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{(2x)^2}\frac{(2x)^2}{\cos(2x)-1} \\
&= \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{(2x)^2}\frac{1}{\frac{\cos(2x)-1}{(2x)^2}} \\
&= \lim_{X\to 0^{\pm}} \frac{1}{X^2}\frac{1}{\frac{\cos(X)-1}{X^2}} \qquad \text{où } X = 2x \\
&= \lim_{X\to 0^{\pm}} \frac{1}{X^2}\frac{1}{-\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{X\to 0^{\pm}} -\frac{2}{X^2} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \pi^{\pm}} \frac{1}{\cos(2x)-1} &= \lim_{X\to 0^{\pm}} \frac{1}{\cos(2(x+\pi))-1} \qquad \text{où } X = x-\pi \\
&= \lim_{X\to 0^{\pm}} \frac{1}{\cos(2x+2\pi)-1} \\
&= \lim_{X\to 0^{\pm}} \frac{1}{\cos(2x)-1} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

On déduit de ces résultats que les droites $x = 0$ et $x = \pi$ sont des asymptotes verticale à la courbe représentative de g.



Un nombre ... imaginaire

On pourrait donner plein d'histoire racontant la naissance des nombres complexes qui s'utilisent presque partout (mécanique classique, quantique ou céleste etc). On peut aussi et plus simplement rester dans un univers mathématico-mathématique et poser une définition, base de travail.

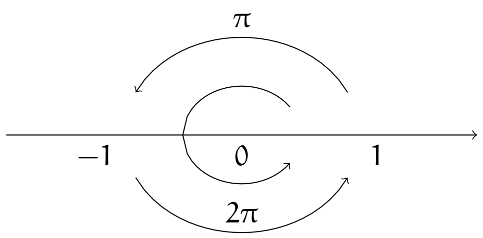
Définition

On note i le nombre vérifiant $i^2 = -1$.

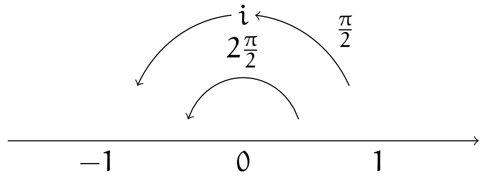
Cette définition suffit ! Mais *en vrai*, il faudrait, pour ne pas créer de faille spatio-temporelle dans l'univers des mathématiques, le définir plus proprement ou plutôt nous assurer que cette définition est cohérente. L'un des premiers penseurs de cet étrange nombre est Gauss (encore) et la *création* qu'il en a fait en son temps et ce que nous en avons fait avec notre technologie[4] en font une définition très cohérente (pour faire peur : on note i la classe de X dans l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$).

Bref ! On a dans notre poche un nombre qui au carré vaut -1. Évidemment ce nombre n'est pas réel, puisque les nombres réels sont tous positifs lorsqu'ils sont au carré. Mais alors qu'est-ce que ce i ? Où est-il ?

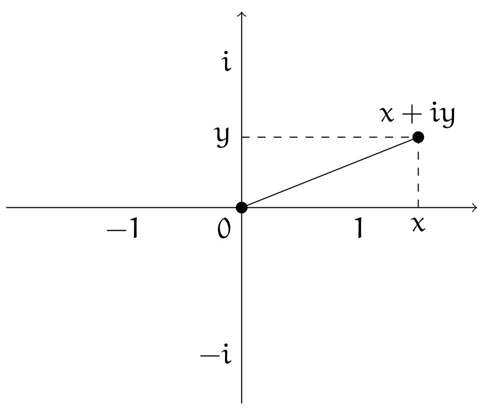
Regardons de plus près l'opération *mettre au carré*. Lorsque l'on met au carré le nombre -1 on obtient 1. C'est à dire que sur l'axe des nombres réels, le nombre -1 *passe de l'autre coté du* 0. Le nombre -1 fait un angle de π par rapport à l'axe des nombres réels et le fait qu'il se retrouve *de l'autre coté du* 0 peut se traduire par *on a doublé son angle*. Double... carré... on voit le nombre 2 et c'est assez satisfaisant.



Voyons maintenant le nombre i. Au carré, il vaut -1. Cela équivaut, avec notre considération géométrique, à dire que l'angle que fait le nombre i lorsqu'il est doublé fait π (pour arriver au -1). Un petit dessin montre que ce nombre est donc en dehors de l'axe des nombres réels (heureusement) !



Le nombre i est donc *ailleurs* que sur l'axe des nombres réel, sur un autre axe que l'on place généralement perpendiculaire à celui des nombres réels et que l'on nomme l'**axe des imaginaires**. Un nombre complexe est alors un point non plus sur la droite (réelle) mais dans le plan (complexe).



Définition

Un **un nombre complexe** est une expression

$$z = x + iy$$

pour deux nombres réels x et y appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre z notée $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
On note

$$\mathbb{C}$$

l'ensemble des nombres complexes.

Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est réelle ! Par exemple la partie imaginaire du nombre $3-2i$ est -2 et sa partie réelle est 3.

4. Des outils mathématiques sont des éléments de la technologie

Calcul dans l'ensemble des nombres complexe

Les calculs dans l'ensemble des nombres complexes se fait exactement comme dans celui des nombres réelles à ceci près que i vérifie $i^2 = -1$.

Proposition

Soient z et z' deux nombres complexes alors

$$\mathrm{Re}(z \pm z') = \mathrm{Re}(z) \pm \mathrm{Re}(z')$$

$$\mathrm{Im}(z \pm z') = \mathrm{Im}(z) \pm \mathrm{Im}(z')$$

Démonstration. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Il s'agit de voir que $\mathrm{Re}(z \pm z')x \pm x'$ et $\mathrm{Im}(z \pm z') = y \pm y'$

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + iy) \pm (x' + iy') \\ &= x + iy \pm x' \pm iy' \\ &= x \pm x' + iy \pm iy' \\ &= (x \pm x') + i(y \pm y') \end{aligned}$$

□

Proposition

Soit z un nombre complexe et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z), \qquad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$$

Démonstration. Soit $z = x + iy$. Il s'agit de voir que $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda x$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda y$

$$\begin{aligned} \lambda z &= \lambda(x + iy) \\ &= \lambda x + \lambda(iy) \\ &= \lambda x + i(\lambda y) \end{aligned}$$

□

Ces deux propositions montre que les nombres complexes ont une structure *linéaire*. Pour l'addition on additionne les parties réelles ; respectivement pour la partie imaginaire. De même pour la multiplication réelle.

Les choses se "compliquent" pour la multiplication et la division. Bien qu'en fait il ne s'agit que d'opérations algébriques classique avec la règle $i^2 = -1$.

Proposition

Soient z et z' deux nombres complexes.

$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$$

$$\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z') + \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z')$$

Démonstration. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + y'$.

$$\begin{aligned} zz' &= (x + iy)(x + iy) \\ &= xx' + ixy' + iyx' + iyiy' \\ &= xx' + ixy' + iyx' + \underbrace{i^2}\, yy' \\ &= xx' + ixy' + iyx' - yy' \\ &= xx' - yy' + ixy' + iyx' \\ &= xx' - yy' + i(xy' + yx') \end{aligned}$$

□

Dans la pratique on n'utilise pas ces formules, on le redémontre, en développant ou factorisant au besoin. Ces formules montrent *simplement* qu'on peut faire comme si i était une variable x ou avec la règle imaginaire $i^2 = -1$.

Par exemple, si $z_1 = 3 + \frac{i}{2}$ et $z_2 = 1 - i$ alors

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2^2 &= 2(3 + \frac{i}{2}) - (1-i)^2 \\ &= (6+i) - (1^2 - 2 \times 1 \times i + i^2) \\ &= (6+i) - (1 - 2i - 1) \\ &= (6+i) - (-2i) \\ &= 6 + i + 2i \\ &= 6 + 3i \end{aligned}$$

Pour la division de nombre complexe, il faut faire un peu plus d'effort mais sans plus de difficulté.

Nombre complexe conjugué

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appel **nombre complexe conjugué** à z le nombre noté $\bar{z}$, défini par

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$$

En d'autre terme le nombre conjugué associé à un nombre complexe z est le même que z en changeant uniquement le signe de la partie imaginaire. Par exemple $\overline{7 + i\sqrt{2}} = 7 - i\sqrt{2}$.

Lemme : Quelque que soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)\overline{(x+iy)} \\ &= (x+iy)(x-iy) \\ &= (x)^2 - (iy)^2 \qquad \text{Identité remarquable} \\ &= x^2 - i^2y^2 \\ &= x^2 - (-1)y^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

□

Proposition

Soient z et z' des nombres complexes.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Re}(z')^2 + \mathrm{Im}(z')^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Re}(z')^2 + \mathrm{Im}(z')^2}$$

Démonstration. Cela découle de l'observation

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$$

et des résultats précédents. □

Encore une fois, la formule n'est là que pour démontrer la méthode. En aucun cas on l'applique en tant que tel. On la redémontre. Par exemple

$$\begin{aligned} \frac{3 - \frac{i}{2}}{2+i} &= \frac{\left(3 - \frac{i}{2}\right)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{6 - 3i - i - \frac{i^2}{2}}{2^2 - i^2} \\ &= \frac{6 - 3i - i + \frac{1}{2}}{4+1} \\ &= \frac{\frac{13}{2} - 4i}{5} \\ &= \frac{13}{10} - \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Le nombre conjugué est cohérent avec les calculs dans l'ensemble des nombres complexe.

Théorème

Soient z et z' des nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

1. $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \overline{z'}$
2. $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$
3. $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition □

Proposition

Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.

Démonstration. Si $z = \bar{z}$ alors $x + iy = x - iy$ et en identifiant la partie imaginaire $y = -y$ ce qui équivaut à $y = 0$ et x est réel. □

Définition

On dira qu'un nombre est **imaginaire pure** si $z = -\bar{z}$.

Racines carrés

Le fait d'avoir un *nombre* dont le carré vaut -1, qui est un nombre négatif, nous donne un nouvel outil d'extraction de racine carré.

En effet, par définition de racine carré, trouver $\sqrt{-1}$ c'est trouver un nombre z, qui aujourd'hui peut donc être complexe, vérifiant $z^2 = -1$. Nous avons donc une jolie solution : i... mais ce n'est pas la seule. Il y a aussi $-i$. Donc $\sqrt{-1}$ vaut à la fois i et $-i$. Ce n'est pas du tout satisfaisant ! Il faut donc donner un cadre un peu plus propre pour obtenir un concept plus cohérent.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. Les **racines carrés** de z sont des nombres Z vérifiant $Z^2 = z$.

Si $z \neq 0$, il y a toujours deux racines carrées.

Voyons à présent comment, dans la pratique, on détermine les racines carrées d'un nombre complexe.

Proposition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe alors et Z une racine carré de z alors

$$\mathrm{Re}(Z) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$$

Le signe à choisir étant déterminé par le signe de y. Précisément

Si $y > 0$ alors $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont de même signe

Sinon $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont de signe différent.

Démonstration. Posons $Z = a + ib$. Par définition $Z^2 = z$ c'est à dire $(a + ib)^2 = x + iy$ soit $(a^2 - b^2) + 2i(ab) = x + iy$. En particulier, en comparant les parties imaginaires on a $2ab = y$. Cette égalité montre que si $y > 0$ alors nécessairement a et b sont de même signe et de signe différent sinon. Quant à la partie réelle elle permet d'obtenir la formule

$$a^2 - b^2 = x$$

D'un autre coté puisque $Z^2 = z$ alors $\overline{Z}^2 = \overline{z}$ et donc $(Z\overline{Z})^2 = z\overline{z}$ ce qui équivaut à $(a^2+b^2)^2 = x^2+y^2$ et puisque ces carrés sont positifs on a

$$a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

En sommant les deux égalités trouvées on arrive à $2a^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$ soit $a = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}$. La différence permet de trouver b. □

Par exemple déterminons les racine carrés de $z = 3-2i$. On cherche donc $Z = a+ib$ tel que $Z^2 = z$ soit $(a^2-b^2)+i(2ab) = 3-2i$. En identifiant partie réelle et partie imaginaire on en déduit que $a^2-b^2 = 3$ et $2ab = -2$ soit encore $ab = -1$. D'autre part en passant par la forme conjuguée on a $a^2+b^2 = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$. Ainsi $2a^2 = \sqrt{13}+2$ et $a = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}}$ et de même $b = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}$. Puisque $ab = -1$ alors a et b sont de signe différent. Ainsi les deux racines de $3-2i$ sont

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$$

$$Z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$$

Théorème

Si le discriminant d'un polynôme à coefficient réelle ax^2+bx+c est négatif alors le polynôme admet deux racines complexes conjuguées.

Démonstration. Si $\Delta < 0$ est le discriminant alors il admet deux racines carrées dont les calculs amènent à $Z_1 = i\sqrt{-\Delta}$ et $Z_2 = -i\sqrt{-\Delta}$. En appliquant alors les formules classique on trouve deux racines au polynôme ax^2+bx+c :.

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

qui sont bien des nombres complexes conjuguées. □

Considérons par exemple l'équation $x^2+x+1 = 0$. Son discriminant vaut -3. Alors ce polynôme admet z et $\overline{z}$ comme solution où $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

On peut aussi considérer des polynômes où les coefficients sont complexe. Il suffit de raisonner exactement comme dans le cas réel en extrayant les deux racines carrés complexe (qui ne sont plus conjugués en général).

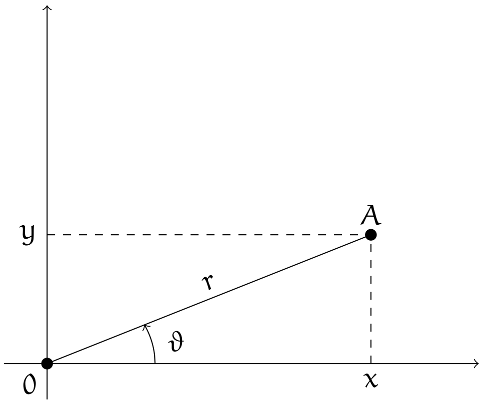
En particulier, tous les polynômes admettent des racines [5]

Forme polaire

Pour représenter un point dans le plan nous avons besoin de deux informations (principalement parce qu'une plan est un objet de dimension 2). Nous avons étudier tout au long de l'année une seule méthode de coordination : les coordonnées cartésienne. Pour placer un point nous donnons son abscisse et son ordonnée. Inversement : étant donnée un point du plan, il possède une abscisse et une ordonnée.

Mais il existe une autre manière de représenter un point du plan qui vient principalement de l'astronomie (Gauss était astronome de formation et non mathématicien...). Pour représenter un point dans le plan nous avons besoin de savoir uniquement quel angle il fait avec l'axe des ordonnée et à quelle distance il se trouve de l'origine.

5. Cela s'appelle le théorème de d'Alembert-Gauss... oui encore Gauss. Ce n'est pas pour rien qu'on l'appel *le prince des mathématiques*.



Définition

1. On appel **coordonnées cartésiennes** d'un point A du plan la donnée d'un couple (x, y) où x est **l'abscisse**, y **l'ordonnée** représentant respectivement la projection de A sur l'axe $(0x)$ et $(0y)$.
2. On appel **coordonnées polaires** d'un point A du plan la donnée d'un couple (r, ϑ) où r est **le module**, ϑ **l'argument** représentant respectivement la distance de $0A$ et l'angle $(0x; 0A)$ (mesuré en radian).

La trigonométrie va nous permettre de passer de l'un à l'autre.

Proposition

Soit A un point du plan de coordonnées cartésienne (x, y) et de coordonnée polaire (r, ϑ) alors

$$x = r\cos(\vartheta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dans cette proposition, la notation $\tan^{-1}$ fait référence à une touche de la calculatrice (normalement au dessus de la touche de la fonction tangente, parfois notée Arctan ou Atan suivant les modèles). Écrire $\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ est strictement équivalent à écrire $\tan(\vartheta) = \frac{y}{x}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les définitions de sinus et cosinus dans le triangle du schéma précédent pour obtenir les deux premières formules ainsi que la dernière. Quand à la troisième, il s'agit du théorème de Pythagore. $\square$

Revenons dans l'ensemble des nombres complexes que nous avions ponctuellement délaissé. Un nombre complexe c'est $x + iy$ où x et y représentent les coordonnées cartésiennes du point du plan. D'après la proposition précédente on a $x + iy = (r\cos(\vartheta)) + i(r\sin(\vartheta)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$, (x, y) les coordonnées cartésiennes qu'il défini et (r, ϑ) ses coordonnées polaires. On note $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ son module et $\arg(z) = \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ son argument.

Proposition

Soient z et z' des nombres complexes et λ un nombre réel strictement positif.

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|z|^2 = z\bar{z}$
4. $|\lambda z| = \lambda|z|$ et $|-\lambda z| = \lambda|z|$
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

1. $\arg(zz') \equiv_{2\pi} \arg(z) + \arg(z')$
2. $\arg(\bar{z}) \equiv_{2\pi} -\arg(z)$
3. $\arg(\lambda) \equiv_{2\pi} 0$ et $\arg(-\lambda) \equiv_{2\pi} \pi$
4. $\arg(\lambda z) \equiv_{2\pi} \arg(z)$
5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv_{2\pi} \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration. Soient $z = x + iy = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ et $z' = x' + iy' = r'(\cos(\vartheta') + i\sin(\vartheta'))$ alors

$$\begin{aligned}
zz' &= [r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))][r'(\cos(\vartheta') + i\sin(\vartheta'))] \\
&= rr'(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))(\cos(\vartheta') + i\sin(\vartheta'))) \\
&= rr'(\underbrace{\cos(\vartheta)\cos(\vartheta') - \sin(\vartheta)\sin(\vartheta')} + i(\underbrace{\cos(\vartheta)\sin(\vartheta') + \cos(\vartheta')\sin(\vartheta)})) \\
&= rr'(\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta'))
\end{aligned}$$

Cette formule montre que $|zz'| = rr' = |z||z'|$ et $\arg(zz') \equiv_{2\pi} \vartheta + \vartheta' \equiv_{2\pi} \arg(z) + \arg(z')$.

On a également $\overline{z} = r(\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta)) = r(\cos(-\vartheta) + i\sin -(\vartheta))$. Cette formule montre que $|\overline{z}| = r = |z|$ et $\arg(\overline{z}) \equiv_{2\pi} -\vartheta \equiv_{2\pi} -\arg(z)$.

Les formules 3 sont des conséquences triviales des définitions.

Les formules 4 se déduisent des formules 1.

Finalement $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$.

Puisque $|z'|^2$ est un nombre réel strictement positif alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z||\overline{z'}|}{|z'|^2} = \dfrac{|z||z'|}{|z'|^2} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

De même $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv_{2\pi} \arg\left(\dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}\right) \equiv_{2\pi} \arg(z\overline{z'}) \equiv_{2\pi} \arg(z) + \arg(\overline{z'}) \equiv_{2\pi} \arg(z) - \arg(z')$ □

Ces formules montrent que essentiellement le module se comporte comme une racine carré (ce qui est évident au vu de la formule) et que l'argument se comporte comme un logarithme. Cette observation motive la définition suivante.

Définition

Soit ϑ un angle défini modulo 2π. On pose $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

La proposition précédente montre que cette notation est cohérente avec ce que nous connaissions de l'exponentielle. Nous retrouvons entre autre $e^{i\vartheta}e^{i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')}$ et $\dfrac{1}{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta} = \overline{e^{i\vartheta}}$.

Par exemple $2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Corollaire

Tout nombre complexe z peut s'écrire

$$z = re^{i\vartheta}$$

où $r = |z|$ et $\vartheta \equiv_{2\pi} \arg(z)$. On appel cette forme la **forme polaire** du nombre complexe.

Déterminons la forme polaire de $z = 1 - i\sqrt{3}$. Pour commencer on a facilement $|z| = 2$. D'après les formules permettant de passer de coordonnées cartésiennes à polaire on a $\cos(\vartheta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\vartheta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Parce qu'on connait bien notre trigonométrie on sait que le seul angle (modulo 2π) avec cette valeur de cosinus et sinus et $-\dfrac{\pi}{6}$. Finalement

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Corollaire Formules d'Euler

Soit ϑ un angle défini modulo 2π.

$$\cos(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \qquad \sin(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition de l'exponentielle complexe. □

23. Nombres complexes appliqués à la géométrie

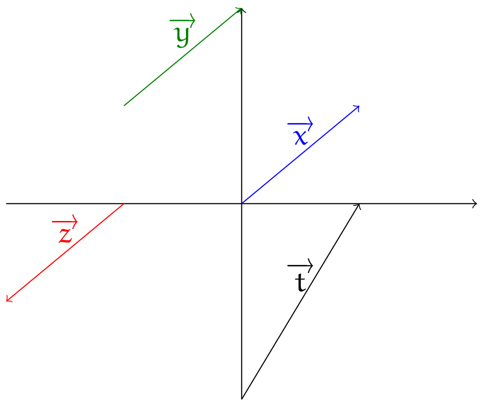
Vecteurs

Nous commençons par quelques rappels, qui peuvent ne pas en être, de géométrie plane. Nous sommes volontairement sibyllin, l'objectif de ce cours n'étant pas d'introduire des éléments de géométrie mais plutôt de voir comment les nombres complexes s'utilisent dans ce cadre. L'un des outils les plus fameux est le *vecteur*. C'est un objet de la géométrie caractérisé par :

— une direction,
— un sens,
— une norme (taille).

Ces objets existent à peu près partout en géométrie. Nous nous cantonnerons à donner les détails uniquement dans le plan (qui deviendra plus tard le plan complexe, mais qui pourra être vu dans ce paragraphe comme le repère classique). Gardons en tête qu'en dimension 3, les vecteurs existent aussi. L'objectif de rester dans le plan et de faire le lien entre les éléments de géométrie et la construction *géométrique* des nombres complexes.

Détaillons les 3 caractères qui définissent un vecteurs. Il faut penser les vecteurs comme des flèches inflexibles mais que l'on peut déplacer.



Dans la représentation ci-contre

- $\vec{x} = \vec{y}$ car les vecteurs sont orientés dans la même direction, ont le même sens et la même taille.
- $\vec{x} \neq \vec{z}$ car bien que ces vecteurs aient la même taille et la même direction ils ne sont pas orienté dans le même sens. Dans cas on a alors $\vec{x} = -\vec{z}$
- $\vec{x} \neq \vec{t}$ car ces deux vecteurs n'ont ni la même taille ni la même direction.

Dans la pratique, si A et B deux points du plan de coordonnées cartésiennes respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. On note $||\overrightarrow{AB}||$ sa norme et le théorème de Pythagore permet de montrer que

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Un outils fameux du calcul vectoriel est la relation de Chasles (que nous avons déjà vu dans le cadre du calcul intégrale) :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Précisons à présent le liens avec les nombres complexes.

Affixe

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan (d'origine O) de coordonnée cartésienne $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. On dit que z est l'**affixe du point** M et également l'**affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$.

Proposition

Soient A et B des points du plan complexe d'affixe respective a et b alors $b - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Cela découle de la relation de Chasles puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ □

En particulier, toutes les opérations connues sur les vecteurs se transposent avec le langage des affixes.

Corollaire

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs du plan complexe d'affixe respective z et z'.

1. L'affixe de $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{u'}$ est $z \pm z'$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors l'affixe de $\lambda\overrightarrow{u}$ est λz
3. En particulier $(\lambda = -1)$, l'affixe de $-\overrightarrow{u}$ est $-z$.
4. En particulier $(\lambda = 0)$, l'affixe de $\overrightarrow{0}$ est 0.
5. $||\overrightarrow{u}|| = |z|$.
6. L'angle entre $\overrightarrow{u}$ et l'axe des abscisse est $\arg(z)$.

Transformation affine du plan complexe

On s'intéresse dans ce chapitre aux transformations du plan complexe. En d'autre terme aux fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Elles sont très nombreuses et parfois assez difficile à appréhender. Ici on ne s'intéressera qu'au transformation affine, c'est à dire à définir et étudier toutes les transformation

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{array}$$

pour deux nombres complexes a et b.

De la même manière que dans le cas réelle les droites $f(x) = ax + b$ sont dirigées par a (le coefficient directeur), les valeurs de a de la transformation $f(z) = az + b$ dirigent la nature de la transformation. Dans la suite de ce paragraphe on va discuter suivant les valeurs du nombre complexe a la nature de $f(z) = az+b$.

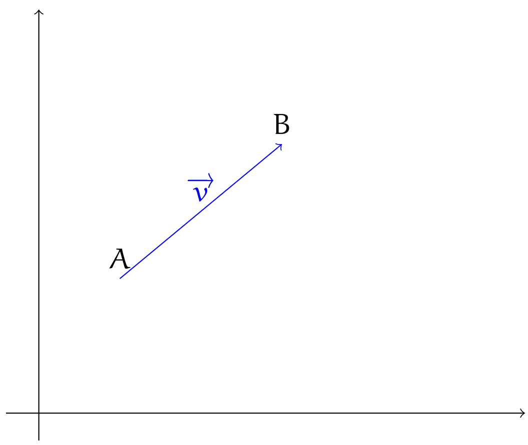
Les translations.

Définition

Si $a = 1$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **translation**.

Si f est une translation alors elle est de la forme $f(z) = z + b$. Le **vecteur de translation** a pour affixe b.

Par exemple $f(z) = z + \frac{1}{2} + i$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $\frac{1}{2} + i$. Le point A d'affixe $1 + i$ est transformé en B d'affixe $\frac{3}{2} + 2i$



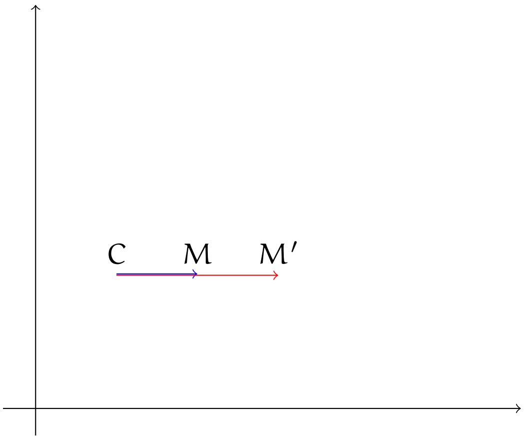
Les homothéties.

Définition

Si $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ alors la transformation $f(z) = az+b$ du plan complexe est appelée une **homothétie**.

Si f est une homothétie alors elle est de la forme $f(z) = az + b$ pour un certain réel $a \neq 1$ (b pouvant être complexe). Le **rapport de l'homothétie** est le nombre a et le **centre de l'homothétie** est l'unique point fixe de f. Précisément c'est le point C d'affixe $c = \frac{b}{1 - a}$ (obtenu en résolvant l'équation $f(z) = z$).

Par exemple $f(z) = 2z - \frac{1}{2} - i$ est une homothétie de rapport 2 et de centre C d'affixe $\frac{1}{2} + i$.
Géométriquement pour n'importe quelle point M d'affixe z, le point M' d'affixe $f(z)$ est caractérisé par la relation $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$

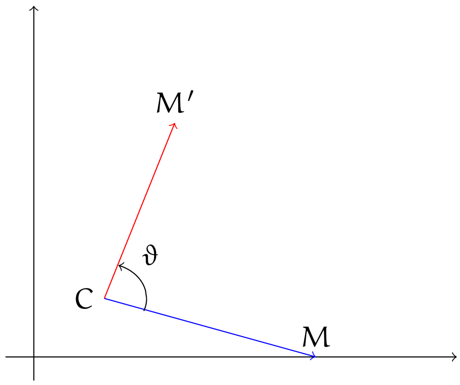


Les rotations.

Définition

Si $a \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|a| = 1$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **rotation**.

Par exemple $f(z) = iz + 1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$) et de centre C d'affixe $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.



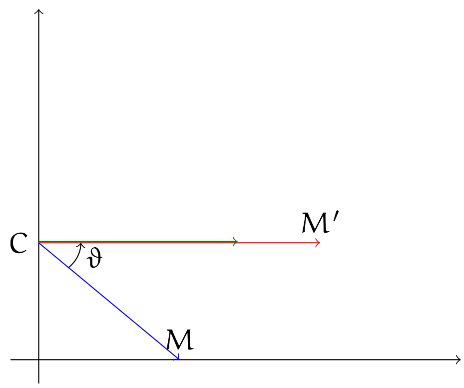
En passant par la forme polaire des nombres complexe, on observe qu'un nombre complexe de module 1 est de la forme $e^{i\vartheta}$. Si f est une rotation alors elle est de la forme $f(z) = e^{i\vartheta}z + b$. L'**angle de la rotation** est le nombre ϑ (modulo 2π) et le **centre de la rotation** est l'unique point fixe de f. Précisément c'est le point C d'affixe $c = \frac{b}{1 - e^{i\vartheta}}$ (obtenu en résolvant l'équation $f(z) = z$).

Les similitudes.

Définition

Si $a \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|a| \neq 1$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **similitude**.

Par exemple $f(z) = (1 + i)z + 1$ est une similitude puisque $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Son rapport est $\sqrt{2}$, son angle est $\frac{\pi}{4}$ et son centre est C d'affixe $c = \frac{1}{1 - (1 + i)} = \frac{1}{-i} = i$



En passant par la forme polaire des nombres complexe, on observe que $a = re^{i\vartheta}$. Si f est une similitude alors elle est de la forme $f(z) = re^{i\vartheta}z + b$. L'**angle de la similitude** est le nombre ϑ (modulo 2π), le **rapport de la similitude** est le nombre r et le **centre de la similitude** est l'unique point fixe de f. Précisément c'est le point C d'affixe $c = \frac{b}{1 - a}$ (obtenu en résolvant l'équation $f(z) = z$).
On peut voir toute similitude comme une rotation (d'angle ϑ) suivit d'une homothétie (de rapport r).

Partie 4

Annexe

24. Les lettres de l'alphabet grec

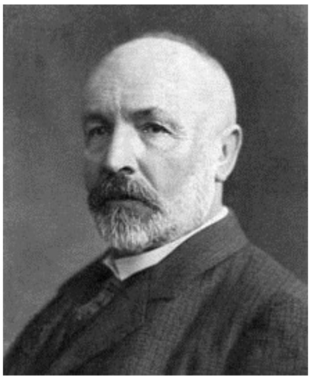
α		Alpha	ν		Nu
β		Beta	ξ	Ξ	Ksi
γ	Γ	Gamma	o		Omicron
Δ	δ	Delta	π	Π	Pi
ϵ	ε	Epsilon	ρ		Rho
ζ		Dzeta	σ	Σ	Sigma
η		Eta	τ		Tau
θ	ϑ Θ	Theta	υ		Upsilon
ι		Iota	ϕ	φ Φ	Phi
κ		Kappa	χ		Chi
λ	Λ	Lambda	ψ		Psi
μ		Mu	ω	Ω	Omega

25. Mathématiciens célèbres (liés aux cours)

ABEL

ALEMBERT

ARCHIMEDE



CANTOR

CAUCHY

CHASLES

CRAMER

DESCARTES

ERDOS

EUCLIDE

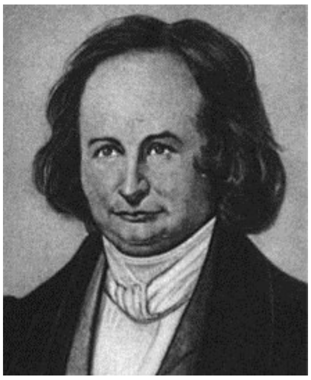
EULER

FERMAT


GALOIS


GAUSS

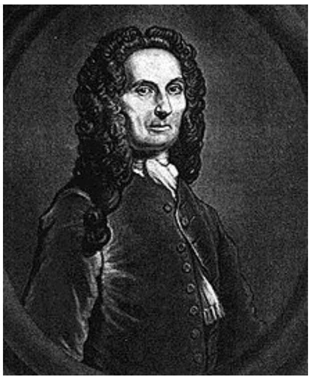

HILBERT

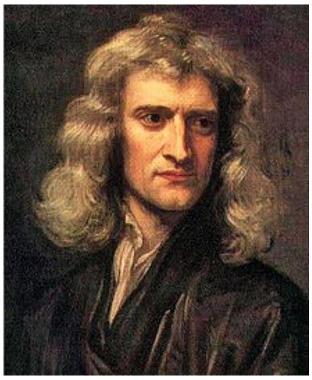

JACOBI


LEIBNIZ


MINKOWSKI

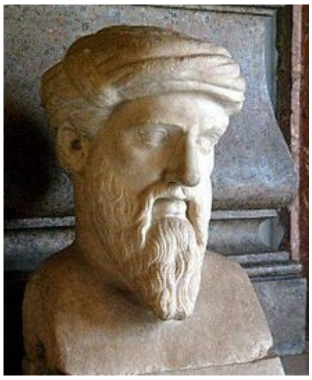

MOBIUS


MOIVRE


NEWTON


NOETHER

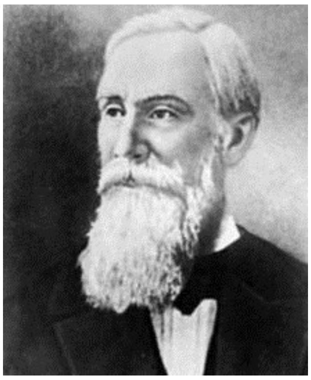

PERELMAN

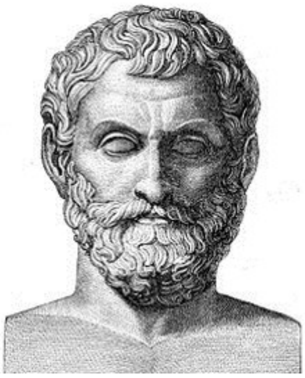

PYTHAGORE


RAMANUJAN


RIEMANN


GERMAIN


TCHEBYCHEV


THALES