Formulaire

Polynômes réelles

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ alors

Si $\Delta < 0$ alors le polynôme n'a pas de solution réelle.

Si $\Delta = 0$ alors le polynôme admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et $P(x) = a(x - x_0)^2$.

Si $\Delta > 0$ alors le polynôme admet deux racines simples :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Limites

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ (quelque soit le signe de l'infini). Si $f(x)$ tend vers 0 mais en restant positif (c'est à dire 0^+) alors $\frac{1}{f(x)}$ tendra vers $+\infty$. De même en changeant les signes.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$
l	l'	$l + l'$	$l \times l'$
$l > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l < 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Pour obtenir la limite de $\frac{g(x)}{f(x)}$ on écris $\frac{g(x)}{f(x)} = g(x) \times \frac{1}{f(x)}$.

Dérivation

On dira qu'une fonction f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est un nombre fini ; $f'(a)$.

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(\lambda u) = \lambda u'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

f	f'
$\forall n \in \mathbb{R}, \quad x^n$	nx^{n-1}
$n = -1, \quad \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$n = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

f	f'
$\forall n \in \mathbb{R}, \quad u^n$	$nu^{n-1} \times u'$
$n = -1, \quad \frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \times u'$
$n = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$
$\sin(u)$	$\cos(u) \times u'$
$\cos(u)$	$-\sin(u) \times u'$
$\tan(u)$	$(1 + \tan^2(u)) \times u'$
$\ln(u)$	$\frac{1}{u} \times u'$
e^u	$e^u \times u'$

Équation de la tangente à f en a

$$T_a \ : \ y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Logarithme

Pour $x > 0$, on note $\ln(a)$ l'aire comprise entre la courbe $x \mapsto \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite $x = a$.

On note $\ln$ la fonction *logarithme népérien* définie sur $]0; +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

$\ln(1) = 0$

$\forall a > 0, b > 0, \ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\forall a > 0, \ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\forall a > 0, n \in \mathbb{Z}, \ \ln(a^n) = n\ln(a)$

$\forall a > 0, b > 0, \ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\forall \alpha > 0, \beta > 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

$\forall \alpha > 0, \beta > 0 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

Exponentielle

On note e^x, la fonction *exponentielle*, la fonction réciproque de la fonction $\ln$. Elle satisfait donc

$$\forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$$

$e^0 = 1$

$\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},\ \ e^{a+b} = e^a \times e^b$

$\forall a \in \mathbb{R},\ \ \dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$

$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z},\ \ (e^a)^n = e^{na}$

$\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},\ \ \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\forall \alpha > 0, \beta > 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = +\infty$

$\forall \alpha > 0, \beta > 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha (e^x)^\beta = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Probabilités

$P(\varnothing) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Deux évènements sont dit indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Variables aléatoires

Support : $\mathrm{Supp}(X) = \left\{ k \in \mathbb{Z} \middle| P(X = k) > 0 \right\}$

Espérance : $E(X) = \sum\limits_{k \in \mathrm{Supp}(X)} k \times P(X = k)$

$E(X^2) = \sum\limits_{k \in \mathrm{Supp}(X)} k^2 \times P(X = k)$

Variance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Loi binomiale

Loi de n succès-échecs, p étant la probabilité d'UN succès

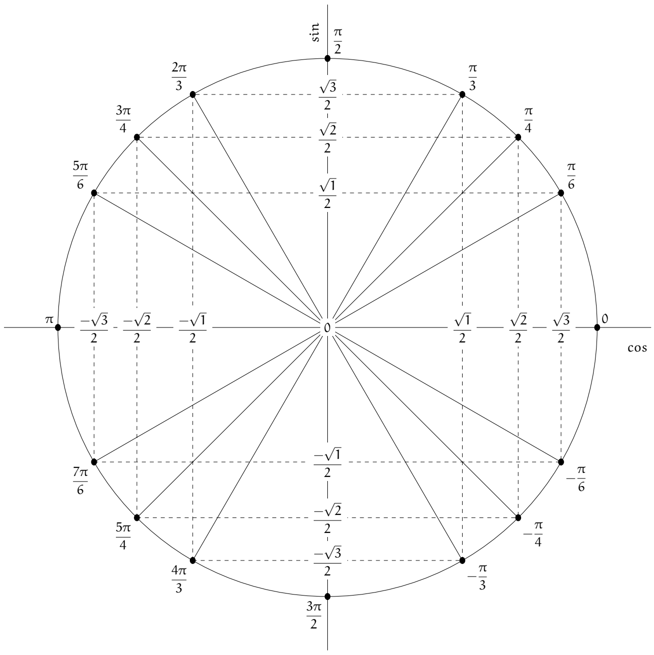
$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$P(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)$

Trigonométrie



$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$

$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x - y) + \cos(x + y)\right)$

$\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right)$

$\cos(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(x + y) - \sin(x - y)\right)$

$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$

$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\dfrac{x + y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$