Suites

Exercice 1

Déterminer, les variations des suites suivantes :

1. $u_n = 3n + 2$
2. $u_n = 2 - n^2$
3. $u_n = \frac{1}{n}$
4. $u_n = n^2$
5. $\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n \\ u_0 &= 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n \\ u_0 &= -1 \end{cases}$
7. $u_n = \sqrt{n}$
8. $u_n = \frac{3n}{n^2+1}$
9. $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2^{n^2} \\ u_0 &= 0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{n-\sqrt{n}} \\ u_0 &= 9 \end{cases}$
11. $u_n = \ln(n)$
12. $u_n = e^{1+\frac{1}{n}}$

Exercice 2

Calculer, si possible, les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{2n}{n+1}$
2. $u_n = \frac{n^2}{n+1}$
3. $u_n = \frac{n^2}{2n+n^2+n^3}$
4. $u_n = (-1)^n$
5. $u_n = (1 + 10^{-1983})^n$
6. $u_n = (1 - 10^{-1983})^n$
7. $u_n = \frac{1}{2^n} - e^{-n}$
8. $u_n = 2^{n+1} - e^n$
9. $u_n = 3^{n-1} - e^n$
10. $u_n = n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
11. $u_n = n(e^n - 1)$
12. $u_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'explorer de nouvelles formes indéterminées. En effet, les F.I. classiques sont $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. Deux nouvelles s'y ajoutent : 1^∞ et 0^0.

1. (a) Simplifier l'expression de $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$. En déduire $\lim a_n$.
   (b) Simplifier l'expression de $b_n = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{2n}$. En déduire $\lim b_n$.
   (c) Soit x un nombre réel strictement positif. En vous aidant des exemples précédents, montrer qu'il est possible de trouver une suite c_n admettant pour limite x et représentant la forme 1^∞.
2. (a) Simplifier l'expression de $\alpha_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$. En déduire $\lim \alpha_n$.
   (b) Simplifier l'expression de $\beta_n = \left(\frac{1}{1983^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$. En déduire $\lim \beta_n$.
   (c) Soit x un nombre réel non nul. En vous aidant des exemples précédents, montrer qu'il est possible de trouver une suite γ_n admettant pour limite x et représentant la forme 0^0.

Exercice 4

1. Rappeler, à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme, la définition du nombre réel a^b pour deux nombres réels strictement positif a et b.
2. On considère $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. En vous servant de la formule précédente, écrire u_n à l'aide des fonctions exponentielles et logarithme.
3. Calculer $\lim n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On pourra considérer le changement de variable $X = \frac{1}{n}$.
4. En déduire $\lim \alpha_n$.

5. En adaptant les questions précédentes, montrer que $\lim \left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. En imitant les considérations précédentes, déterminer une limite v_n tel que $\lim v_n = e^x$.

Exercice 5

Parmi les suites suivantes déterminer celle qui sont arithmétiques. Préciser la raison.

1. $u_n = 2n + 3$
2. $u_n = n^2 - n$
3. $u_{n+1} = \frac{3n+1}{2}$
4. $u_{n+1} = u_n - 1$ et $u_0 = 2$

Exercice 6

Parmi les suites suivantes déterminer le suites qui sont géométriques. Préciser la raison.

1. $u_n = 5^{n+3}$
2. $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$
3. $u_{n+1} = 3^n + 3n$
4. $u_{n+1} = 4u_n$ et $u_0 = 2$

Exercice 7

Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r et u_{100}.
2. $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r et u_{10}.

Exercice 8

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

1. $u_0 = 4$ et $q = 5$. Exprimer u_n en fonction de n.
2. $u_4 = 8$ et $q = 2$. Calculer u_2 et u_6.
3. $u_5 = 64$ et $u_7 = 256$. Calculer q et u_{10}.

Exercice 9

Un bûcheron fou veut raser une forêt de dix mille arbres. Chaque année il coupe cinquante arbre de plus que l'année précédente. Au bout de dix ans il a rasé la forêt. Combien d'arbre a-t-il coupé la première année ?

Exercice 10

Dans un milieu nutritif une paramécie se multiplie par mitose toutes les secondes (la paramécie se divise en 2). En combien de temps le nombre de paramécie sera supérieur à un million ?

Exercice 11

On considère la suite arithmético-géométrique u définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3 \end{cases}$$

Montrer que la suite $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de u_n.

Exercice 12

Même exercice avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n + 1 \end{array}\right.$$

et $v_n = u_n - 2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 3 \end{array}\right.$$

et $v_n = u_n - 3$.

Exercice 13

Déterminer la valeur exacte de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$. (Astuce : étudier la suite $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$)

Exercice 14

[BAC S septembre 2014 - France métropolitaine]

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 un injection de $10\mathrm{mL}$ de médicament. On estime que 20% du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ exprimer u_n en fonction n.
   (c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieur à 1% de la quantité initiale ? Justifier la réponse.
2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de $10\mathrm{mL}$ de médicament. On estime que 20% du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de $5\mathrm{mL}$, la machine réinjecte $4\mathrm{mL}$ de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine. Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n. L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables	n est un entier naturel v est un nombre réel
Inintialisation	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 15 Affecter à v la valeur $0.8\times v$ Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v+4$ Afficher v Fin de boucle

   (a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

   (b) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte $2\mathrm{mL}$ de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à $6\mathrm{mL}$ et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes. Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.
3. On programme la machine de façon que :
   – à l'instant 0, elle injecte $10\mathrm{mL}$ de médicament,
   – toutes les minutes, elle injecte $1\mathrm{mL}$ de médicament.
   On estime que 20% du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

(d) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 15

[BAC S 2014 - Amérique du sud]

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Partie A : Conjectures.

1. Calculer les valeurs exactes, en fraction irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n)

Partie B : Validation des conjectures. On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.
2. (a) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
3. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
4. En déduire la limite l de (v_n).
5. Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?