Fonctions
Limites, Dérivations, Variations et TVI

Exercice 1

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1}$
3. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}$
4. $\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^3}{x^2-3}$
5. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{2-x}$
6. $\lim_{x\to +\infty} x+\sqrt{-2+3x^3}$
7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4-x^2+3}{2-x^2}$
8. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+1}{x+1}$
9. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-4}{3x^2-4x}$
10. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+7x^4}{x^4+x^5}$
11. $\lim_{x\to -\infty} \frac{(x+2)(2x+7)}{x}$
12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)}$
13. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^{2014}+1}{x^{2013}}$
14. $\lim_{x\to +\infty} \frac{14x^4+7x^2-9x+1}{3x}$
15. $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$
16. $\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}$
17. $\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x(x-1)}+\frac{4}{x(x+1)}-\frac{7x+2}{x(x^2-1)}$

Exercice 2

Dériver les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^3$
2. $x \mapsto x^4-5x^2+4$
3. $x \mapsto \sqrt{x}$
4. $x \mapsto \sqrt{x-3}$
5. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
6. $x \mapsto (x^2-2x)^2$
7. $x \mapsto (x^2-x)^{47}$
8. $x \mapsto 3(x^4-9x^3+x)^7$
9. $x \mapsto (x-1)(2x+3)$
10. $x \mapsto 4(2x-4)(x+3)$
11. $x \mapsto x\sqrt{x}$
12. $x \mapsto xx^3$
13. $x \mapsto x^2\sqrt{x-1}$
14. $x \mapsto x^3\sqrt{3x-4}$
15. $x \mapsto \frac{1}{x}$
16. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
17. $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
18. $x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$
19. $x \mapsto \frac{3x-4}{x^2+1}$
20. $x \mapsto \frac{\sqrt{7x-8}}{3x}$
21. $x \mapsto \frac{(x-1)(x^2+1)}{6x-7}$
22. $x \mapsto \frac{(x-1)(x^2+1)}{(6x-7)\sqrt{x+4}}$

Exercice 3

Le but de l'exercice est de d'étudier la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$

1. Domaine de définition
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
   (b) Prouver que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.
   (c) En déduire le domaine de définition de la fonction f.
2. Étude de la dérivé
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2}$
   (b) En déduire les variations de f.
3. Étude aux limites
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (c) Conclure sur l'éventuelle existence d'asymptotes.
4. Donner l'équation de la tangente en 0.
5. Tracer, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 4

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1} \end{array}$$

1. Étudier la fonction. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
2. Donner l'équation de la tangente en 0.
3. Représentez, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + x^2 - x \end{array}$$

1. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation $f(x) = 5$.

Exercice 6

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{-2, +2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{x^2 - 4} \end{array}$$

1. Étudier la fonction. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$. En déduire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique.
3. En étudiant le signe de $f(x) - y$ déterminer la position relative de l'asymptote par rapport à la courbe représentative de f.
4. Représentez, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 7

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \end{array}$$

1. Étudier la fonction. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$. En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique.
3. En étudiant le signe de $f(x) - y$ déterminer la position relative de l'asymptote par rapport à la courbe représentative de f.
4. Représentez, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 8

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-x^3+5x}{x^2+3} \end{array}$$

1. Étudier la fonction. On précisera les limites aux bords de l'ensemble de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
2. Trouver deux réels a et b tel que que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2+3}$. En déduire une asymptote oblique et la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.
3. Représentez, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 9

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-2	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+\infty$

1. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 5$.
2. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 4$.
3. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 3$.
4. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.
5. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = -2$.
6. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = -3$.

Exercice 10

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [-3;6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 12x \end{array}$$

1. Déterminer f' et dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 30$ admet au moins une solution.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation $f(x) = 5$.

Exercice 11

Soit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$.

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer la dérivé de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Combien y a-t-il de solution à l'équation $f(x) = 2$. Justifier.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
6. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

Exercice 12

Soit $f(x) = x^3 - 12x$.

1. Calculer la dérivé de f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 30$ admet une unique solution α.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

Exercice 13

Montrer que l'équation $\dfrac{2x^5 - 1}{x^2 + 1} = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Partie A. Généralités sur la fonction f.

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
2. En déduire l'existence éventuelle d'asymptote.
3. Prouver que la droite $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.
4. Etudier la position relative de l'asymptote oblique et de la courbe.

Partie B. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$g(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^3}$$

1. Etudier les limites de g au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de g.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.
5. En déduire, en fonction de x, le signe de $g(x)$.

Partie C. Conclusion

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f'(x) = g(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Dessiner aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de la fonction f.