Logarithme népérien

Exercice 1

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants : $A = \ln(8)$, $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$ et $C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les nombres suivants : $A = \ln(24)$, $B = \ln(144)$ et $C = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$
3. Mettre les nombres suivants sous la forme $\ln(X)$ pour un certain réel X.

$$A = 2\ln(3) + \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\ln(9) - 2\ln(3)$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes le plus possible.

1. $\ln(49) - \ln(7)$
2. $2\ln(2) - 4\ln(4) + 8\ln(8)$
3. $\ln(25) - \ln\left(\frac{5}{2}\right) - \ln(2)$
4. $\ln(1) + \ln(10) + \ln(100)$
5. $\ln(\sqrt{11}) + \ln\left(\frac{121}{8}\right) + 3\ln(2)$
6. $\dfrac{\ln(1) + \ln(2) + \ln(3)}{\ln(42) - \ln(7)}$
7. $\ln(8) - \ln(3) + \ln(6)$
8. $\dfrac{\ln(8)}{\ln(\sqrt{2})}$
9. $\dfrac{\ln(\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\ln(6)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$
10. $\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5}\right)$
11. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}{\ln(7) - \ln(3)}$

Exercice 3

Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$.

1. $\ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left((ab)^2\right)$
5. $\ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$
6. $\dfrac{\ln(a)}{\ln(ab^2)}$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(2 + 5x) = \ln(x + 6)$
2. $\ln(x - 1) + \ln(x + 3) = \ln(3)$
3. $\ln(x - 1) = \ln(2x - 1)$
4. $2\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(4 - x^2)$
5. $x\ln(x^2 - 3) = 0$
6. $\ln\left(\frac{x - 1}{2x - 1}\right) = 0$
7. $\ln(x) = 1$
8. $\ln(x) = 2$
9. $\ln(3x + 1) = 1$
10. $\ln(x^2 - e^2) = 2$
11. $\ln(x^2) = 2$

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2+5x) < \ln(x+6)$
2. $\ln(x-1)+\ln(x+3) \geqslant \ln(3)$
3. $\ln(x-1) \leqslant \ln(2x-1)$
4. $2\ln(x)+\ln(x-1) > \ln(4-x^2)$
5. $x\ln(x^2-3) \leqslant 0$
6. $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right) \leqslant 0$
7. $\ln(x) < 1$
8. $\ln(x) > 2$
9. $\ln(3x+1) > 1$
10. $\ln(x^2-e^2) \geqslant 2$
11. $\ln(x^2) \geqslant 2$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes :

1. $(1.2)^n \geqslant 4$
2. $(0.8)^n \leqslant 0.1$
3. $(3.9)^n \geqslant 2014$
4. $(0.1)^n \leqslant 10^{-3}$
5. $(1.1)^n \geqslant 20$
6. $(0.9)^n \leqslant 0.1$
7. $(-0.1)^n \leqslant 0.01$

Exercice 7

Un capital de 5000€ est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. Déterminer le nombre d'année n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000€.

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x)$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} x-4+\ln(x)$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (poser $X=\dfrac{1}{x}$)
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ (poser $X=2x$).

Exercice 9

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivées.

1. $-\dfrac{x}{2}+1+2\ln(x)$
2. $x\ln(x)-x$
3. $\ln\left(\ln(x)\right)$
4. $x\ln(2x-3)$
5. $\ln(x^2+x+1)$
6. $\ln(-x^2+x+1)$
7. $\ln(1-x^2)$
8. $\ln(4-x)+\ln(x)$
9. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
10. $\ln(x-1)-\ln(x+1)$
11. $\ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+3x+2}\right)$

Exercice 10

Étudier la fonction $f(x)=x\ln(x)-x$.

Exercice 11

Étudier la fonction $f(x) = x + 1 - \ln(x+1)$.

Exercice 12

Étudier la fonction $f(x) = 1 + x - 2x\ln(x)$

Exercice 13

1. On considère la fonction $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que la droite $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   (e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (f) En déduire les variations de f.
   (g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 14

1. On considère la fonction $g(x) = -x^2 + 1 - \ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{\ln(x)}{2x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que la droite $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   (e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (f) En déduire les variations de f.
   (g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 15

1. On considère la fonction $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.

(d) En déduire les variations de g.

(e) En déduire le signe de g.

2. On considère la fonction $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

   (a) Donner le domaine de définition de f.

   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.

   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (d) Prouver que $f'(x) = g(x)$.

   (e) En déduire les variations de f.

   (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 16

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x^n)+x-1$. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0;1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.