Exponentielle

Exercice 1

Déterminer la dérivé des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = e^x - 1$
2. $f_2(x) = xe^x$
3. $f_3(x) = e^{3x+4}$
4. $f_4(x) = 5e^{2x} - 1$
5. $f_5(x) = (x+1)e^x$
6. $f_6(x) = (x^2+1)e^x$
7. $f_7(x) = e^{x^2}$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{\ln(e^{x-1}+1)}{x^2+1}$

Exercice 2

Soit

$$\begin{aligned} g : [0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(e^x - e) + e - 2. \end{aligned}$$

1. Calculer g' la dérivé de g.
2. Calculer g'' la dérivé de g' (la dérivé seconde de g).
3. En déduire les variations de g'.
4. On admettra que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \simeq 0.55$. En déduire les variations de g.

Exercice 3

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto xe^x - 1 \end{aligned}$$

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé f' de f.
3. En déduire les variations de f.
4. On admettra que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \simeq 0.567$. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\ln(\alpha) = -\alpha$
5. Déterminer le signe de f.

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x - \ln(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
2. En déduire les variations de g.
3. Montrer que $g(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} > 0$.
4. En déduire le signe de g.

Exercice 4

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x - x - 1 \end{aligned}$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-2)+1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de h au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de la fonction h.
3. En déduire les variations de h.
4. On admettra que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;+\infty[$. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Prouver que $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. (Difficile) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$