Variables aléatoires

Exercice 1

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 rouges et 2 vertes.

On tire au hasard et simultanément deux boules.

1. Calculer les probabilités des évènements $R =$ "Les deux boules sont rouges" et $V =$ "Les deux boules sont vertes".
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de boules vertes obtenues.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$.

Exercice 2

Une urne contient 4 boules blanches et une boule noire indiscernable au toucher. Vous tirez deux boules de l'urne avec remise.

– Vous perdez 10€ si vous obtenez deux boules blanches.
– Vous perdez 5€ si vous obtenez exactement une boule noire.
– Vous gagnez 50€ si vous obtenez deux boules noires.

On note X la variable aléatoire du gain algébrique d'une partie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
3. Mêmes questions si l'urne contient deux boules blanches et trois boules noires.

Exercice 3

Dans une salle sans fenêtre à l'université 6 étudiants dont un tueur compulsif, 3 idiots et 2 futurs Nobel sont enfermés. Le tueur compulsif n'est pas suicidaire.

– Un idiot éteint la lumière.
– Dans le noir, le tueur compulsif tue au hasard.
– Les cris d'agonies du tué font qu'un futur Nobel rallume la lumière.
– Un idiot éteint la lumière à nouveau.
– Le tueur tue à nouveau au hasard.
– Si un futur Nobel est en vie, il allume la lumière ouvre la porte et sauve tout le monde, sinon, dans le noir, le tueur tue tout le monde.

On note X le nombre de futur Nobel tués au cours de cette "expérience aléatoire".

1. Représenter la situation sur un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que tout le monde (sauf le tueur) soit tué ? sauvé ?
3. Déterminer la loi de X.
4. Quel est l'espérance de X ?

Exercice 4

Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{1}{5}$. Calculer $P(Y \geqslant 2)$.

Exercice 5

Sur des petits bout de papier, on a noté le nom des 25 étudiants d'une classe. Chacun des étudiants tire au hasard et avec remise un papier du chapeau et tarte l'étudiant dont le nom est inscrit. On note X le nombre d'étudiant qui se tarte eux-même.

1. Quelle est la loi de X ?
2. En moyenne, combien d'étudiant se tarte eux-même ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un étudiant se tarte lui-même ?

Exercice 6

(Pondichéry, avril 2009)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identique mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancé est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X.
   (b) Quelle est son espérance ?
   (c) Calculer $P(X = 2)$.
2. On choisi au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On lance le dé choisi trois fois de suite. On considère les événements :
   - D : "Le dé choisi est est le dé bien équilibré" ;
   - A : "Obtenir exactement deux 6".

   (a) Calculer la probabilité des événements
   - E_1 : "Choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6",
   - E_2 : "Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6"

   (on pourra construire un arbre pondéré).

   (b) En déduire que $P(A) = \frac{7}{48}$.
   (c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
   (d) On choisit au hasard et de manière équiprobable l'un des deux dés et on le lance $n > 1$ fois de suite. On note B_n l'évènement "Obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers". Déterminer, en fonction de n, $P(B_n)$.

Exercice 7

Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure tenue est la suivante : le cabinet effectue une première sélection sur dossier dont 40% sont retenues. Les candidats sélectionnés passent ensuite un entretient à la suite duquel 70% sont retenues. Ces derniers sont alors convoqués à un ultime entretient avec le DRH de l'entreprise qui ne gardera que 25% des candidats.

Partie A. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit retenu à l'issue du premier entretient.
3. Montrer que la probabilité que le candidat ne soit pas recruté est de 93%.

Partie B. On dispose de 5 dossiers de candidatures étudiés indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personne recrutées parmi ces 5 candidats.

1. Quel est la loi de X ?
2. Quel est la probabilité que exactement 2 candidats soient recrutés ; on arrondira le résultat au millième.

Partie C. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieur à $99,9\%$?

Exercice 8

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établis la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9€ si les deux boules tirées sont de couleurs blanches ;
- un joueur perd 1€ si les deux boules tirées sont de couleurs noires ;
- un joueur gagne 5€ si les deux boules tirées sont de couleurs différentes. On dit dans ce cas qu'il gagne la partie.

Partie A. On suppose ici que $k = 7$.

1. Déterminer la probabilité de gagner une partie.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de partie gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   (a) Quel est la loi de X ?
   (b) Exprimer p_n en fonction de n et calculer p_{10} (arrondi au millième).
   (c) Déterminer le nombre minimale de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B. On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Justifier que $P(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
2. Donner la loi de probabilité de Y_k.
3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur (c'est à dire que lorsque son gain moyen est positif).

Exercice 9

Partie A. Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participent à une course cycliste qui comprend 10 étapes et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté. A la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations étant indépendantes.

1. A l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. A l'issu d'une étape, on choisi au hasard un coureur au hasard parmi les 50 cyclistes. Montrer que la probabilité que ce participant ai subit un contrôle antidopage est 0.1.
3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes.
   (a) Quel est la loi de X ?
   (b) Calculer les probabilités suivantes en arrondissant au dix-millième.
      i. Le gagnant de la course a été contrôlé exactement 5 fois.
      ii. Le second de la course n'a pas été contrôlé
      iii. Le troisième de la course à été contrôlé au moins une fois.

Partie B. On note T l'événement "Sur un test antidopage, le contrôle est positif" dont les statistiques donne $P(T) = 5\%$. Un contrôle antidopage n'est pas fiable à 100% :
– si un coureur est dopé, le test est positif dans 97% des cas,
– si un coureur n'est pas dopé, le test est positif dans 1% des cas.

1. Calculer la probabilité qu'un coureur pris au hasard soit dopé.
2. Sachant qu'un coureur est contrôlé positif, quel est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Exercice 10

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A. On choisit au hasard un membre de cette association.

1. Montrer que la probabilité que le membre choisi soit une femme est de $\dfrac{2}{5}$.
2. On choisi un membre parmi les adhérents de la section tennis. Quel est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

Partie B. Pour financer une sortie, les membres de l'association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante, pour tenir la loterie.
   (a) Déterminer la probabilité pour qu'en 4 semaines consécutives, il y ai exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membre choisi pour tenir la loterie.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ai au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisi pour tenir la loterie. Calculer p_n.

(c) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 99\%$.

2. Pour la loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapporte 20€ chacun, les autres ne rapportent rien. Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5€ puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

   (a) Déterminer la loi de X.

   (b) Calculer et interpréter le gain moyen de à ce jeu.