Trigonométrie

Exercice 1

1. Convertir en degrés :

   (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{9}$ (e) $\frac{5\pi}{36}$

2. Convertir en radian :

   (a) $45°$ (b) $120°$ (c) $30°$ (d) $40°$ (e) $125°$

Exercice 2

Donner la classe des angles suivants modulo 2π, dans $[-\pi;\pi[$.

1. $\frac{15\pi}{6}$ 2. $\frac{197\pi}{3}$ 3. $-\frac{81\pi}{18}$ 4. $\frac{1025\pi}{15}$ 5. $-\frac{2048\pi}{12}$ 6. $-\frac{75\pi}{6}$ 7. $\frac{12321\pi}{44}$

Exercice 3

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 4

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Exercice 5

Pour tout réel x simplifier $A(x) = \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Exercice 6

1. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$
2. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ \cos(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$
3. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
4. $\cos(2x) = \sin(3x)$
5. $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\sin(3x) < \frac{1}{2}$

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = 2x - \sin(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1$.
2. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 9

Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0)$, $M(\cos(x); \sin(x))$, $P(\cos(x); 0)$. On considère de plus le point T intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OA) en A.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que $AT = \tan(x)$.
3. Soient A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT. En comparant ces aires, prouver que $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
4. En déduire que $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.
5. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 10

Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ étudier les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x}$
2. $x \mapsto \frac{\sin(5x)}{2x}$
3. $x \mapsto \frac{x}{\sin(3x)}$
4. $x \mapsto \frac{\sin(5x)}{\sin(4x)}$
5. $x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$

Exercice 11

Dériver les fonctions suivantes après avoir donner l'ensemble de définition.

1. $x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$
2. $x \mapsto x\cos(x)$
3. $x \mapsto x\sin(x) - 2\cos(x)$
4. $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$
5. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
6. $x \mapsto \cos^2(x)$
7. $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$
8. $x \mapsto \frac{x + \mathrm{cox}(x)}{x^2 + 1}$
9. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
10. $x \mapsto \cos(3x)$
11. $x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x)$
12. $x \mapsto \sin(\cos(x))$
13. $x \mapsto \frac{\sin(5x)}{\sin(4x)}$
14. $x \mapsto \sqrt{\cos(3x)^2 + 1}$

Exercice 12

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{2 + \mathrm{cox}(x)}$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Étudier les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (1 + \sin(x)) \times \cos(x)$$

1. Montrer que $f'(x) = -2\sin^2(x) - \sin(x) + 1$.
2. (a) Factoriser le polynôme $-2x^2 - x - 1$.
   (b) En déduire une forme factorisé de f'
3. En déduire le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Tracer la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à f en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 14

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$.

1. Démontrer que f est impair et périodique. En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$.
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Donner l'allure de la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 15

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$.

1. Démontrer que f est périodique de période 2π.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$
   (b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
3. A l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$.
4. (a) Montrer que pour tout réels a et b, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 16

Montrer que l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ admet au moins une solution x_0 dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donner la valeur de $\sin(x_0)$.

Exercice 17

Montrer que l'équation $x^2 = x\sin(x) + \cos(x)$ admet deux solutions réels.