Nombres complexes

Exercice 1

Mettre les nombres suivants sous la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. $(5-i)(7+2i)$
2. $(i-1)(3+7i)$
3. $(1+i)^2$
4. $(1+i)^4$
5. $\dfrac{1}{1-i}$
6. $\dfrac{i}{1+2i}$
7. $\dfrac{3+6i}{4-2i}$
8. $\dfrac{7-8i}{9+4i} + \dfrac{7+8i}{9-4i}$

Exercice 2

Déterminer le module des nombres complexes suivants ainsi que leur nombre conjugué.

1. $3-4i$
2. $\sqrt{7}i - \sqrt{2}$
3. $(1+i)^2$
4. $\dfrac{1}{1-i}$
5. $\dfrac{i}{1+i}$
6. $\dfrac{3+6i}{4-2i}$
7. $\dfrac{7-8i}{9+4i} + \dfrac{7+8i}{9-4i}$

Exercice 3

Mettre les nombre suivants sous forme cartésienne.

1. e^{i}
2. e^{1+i}
3. $e^{i\vartheta} + e^{2i\vartheta}$ où $\vartheta \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Exercice 4

Mettre les nombre suivants sous forme polaire.

1. $i - \sqrt{3}$
2. $\sqrt{2}(1-i)$
3. $7+7i$
4. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}$

Exercice 5

Déterminer le module et l'argument des nombres suivants.

1. 1
2. -1
3. i
4. $-i$
5. $1+i$
6. $1-i$
7. $\sqrt{12} - 2i$
8. e^{i}
9. e^{1+i}
10. $ie^{i\frac{\pi}{4}}$
11. $1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$
12. $i + e^{\frac{\pi}{4}}$

Exercice 6

Calculer le module et l'argument des nombres $u = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{u}{v}$.

Exercice 7

Déterminer les racines des polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 - x + 1$
3. $2x^2 + 4x + 2$
4. $-x^2 + 2x - 3$
5. $x^2 + 1$
6. $x^2 + 3x + 1$

Exercice 8

Déterminer les racines carrés des nombres complexes suivants.

1. 1
2. i
3. $3 + 4i$
4. $8 - 6i$
5. $7 + 24i$
6. -1

Exercice 9

Déterminer les racines des polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1$
2. $z^2 - \sqrt{3}z - i$
3. $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12)$
4. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i$
5. $z^4 + 10z^2 + 169$
6. $z^4 + 2z^2 + 4$

Exercice 10

Soient $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. En déduire la forme exponentielle et cartésienne de $z_1 z_2$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 11

Soient $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $z = e^{i\vartheta}$. Déterminer le module et l'argument de $1 + z$ et $1 + z + z^2$.

Exercice 12

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $\dfrac{1}{1 + e^{i\alpha}}$ où $\alpha \in [0; \pi[$.

Exercice 13

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $\dfrac{1}{1 - e^{i\alpha}}$ où $\alpha \in]0; \pi]$.

Exercice 14

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Simplifier l'expression $\dfrac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)}$

Exercice 15

1. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. Calculer les racines carrés de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
4. En raisonnant de la même manière, trouver les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 16

Linéariser les expressions suivantes ($\vartheta \in \mathbb{R}$).

1. $\cos^2(\vartheta)$
2. $\sin^2(\vartheta)$
3. $\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)$
4. $\cos(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$
5. $\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)$
6. $\cos^2(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$
7. $\cos(\vartheta)\sin^4(\vartheta)$
8. $\sin^5(\vartheta)$
9. $\cos^6(\vartheta)$

Exercice 17

Délinéariser les expressions suivantes ($\vartheta \in \mathbb{R}$).

1. $\cos(2\vartheta)$
2. $\sin(3\vartheta)$
3. $\cos(4\vartheta)$
4. $\sin(5\vartheta)$

Exercice 18

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que

1. $|z| = 1$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$
4. $|2z-1| = 3$
5. $|z-1| = |z+1|$
6. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$
7. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$

Exercice 19

Dans le plan complexe on note A et B les points d'affixe respectives $-3+2i$ et $5-3i$. On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z+3-2i}{z-5+3i}$$

1. Interpréter géométriquement le module de z' puis l'argument de z'.
2. Déterminer la partie réel et la partie imaginaire de z' en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
3. Déterminer puis construire le ensembles suivants.
   (a) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
   (b) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel.
   (c) L'ensemble E_3 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.
   (d) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 2$.
   (e) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel strictement négatif.

Exercice 20

On se place dans le plan complexe de centre O. On fera un dessin que l'on complètera au fur et à mesure. On considère les points A, B et C d'affixe respectives $a = -1+2i$, $b = -2-i$ et $c = -3+i$.

1. Placer les points A, B et C.
2. Calculer $\frac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par
$$z' = \frac{z+1-2i}{z+2+i}$$
   (a) Calculer l'affixe c' du point C' image de C par f et placer le point C' sur la figure.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tel que $z \neq b$ et $|z'| = 1$.
   (c) justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.
4. On appel J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On appel K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note L le milieu de $[JK]$. Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC

Exercice 21

Dans le plan complexe, on note r la rotation de centre O et de rayon $\frac{\pi}{6}$. On considère le point A d'affixe $z_A = -\sqrt{3}+i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ (conjugué de z_A). On considère également B l'image de A_1 par r et on note z_B son affixe.

1. Ecrire le nombre z_A sous forme exponentielle et placer A et A_1 dans le repère ; on prendre $2cm$ pour unité graphique.
2. Vérifier que $z_B = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
3. En déduire l'écriture cartésienne de z_B et placer B dans le repère.
4. Démontrer que le triangle OAB est isocèle en O.
5. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisse et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A$.

Exercice 22

On se place dans le plan complexe. On appel f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que
$$z' = \frac{1}{z+1}$$
Le but de l'exercice est de déterminer l'image de la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$ par f.

1. Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives $z_A = -\frac{1}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2}+i$ et $z_C = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.
   (a) Placer les points A, B et C dans un repère. On prendra $2cm$ pour unité graphique.
   (b) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer ces points dans le repère.
   (c) Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la transformation du plan qui à tout point du plan d'affixe z associe le point d'affixe $z+1$.
   (a) Qu'est-ce que g ?
   (b) Sans donner d'explication placer les points $A_1 = g(A)$, $B_1 = g(B)$ et $C_1 = g(C)$.
   (c) De même tracer D_1 l'image de D par g.
   (d) Démontrer que D_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$
3. Soit h l'application qui a tout point du plan d'affixe $z \neq 0$ associe le point z' d'affixe $\frac{1}{z}$.
   (a) Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

(b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|$$

(c) En déduire que l'image de D_1 par h est incluse dans un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. On tracera ce cercle sur la figure.

Exercice 23

Dans le plan complexe centré en O, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit f la transformation qui à tout point du plan d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ de $C' = f(C)$. On placera C et C' dans un repère cartésien.
   (b) Montrer que C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Δ l'ensemble des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Représenter Δ.
4. Montrer que pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.
5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
6. Que peut-on en déduire sur les points A, M et M' ?
7. Soient $\vartheta \in]0; 2\pi[$ et $z = e^{i\vartheta}$ un point de $\mathcal{C}$ distinct de A. Déterminer $A' = f(A)$ en fonction de ϑ.
8. Donner un programme de construction (uniquement avec une règle) de M' quelque soit le point M du plan.

Exercice 24

On se place dans le plan complexe et on considère les points A et B d'affixe respective $z_A = 1$ et $z_B = i$. A tout point M du plan d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = -iz$.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme cartésienne de z.
   (b) En déduire la forma cartésienne de z'.
   (c) Placer les points A, B, M et M' dans un repère ; on prendra 2 centimètres pour unité graphique.
2. On reviens au cas général.
   (a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[AM]$ en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) Ecrire les coordonnées des points I, B, M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que $BM' = 2OI$.

Exercice 25

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point M est dit *invariant* lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatérale (le point O est le centre du repère).
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tel que M' soit réel.
4. Dans le plan, placer A et B et tracer $\mathcal{E}$.

Exercice 26

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :
$$z^2 - 8z + 64 = 0$$
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   (a) Calculer le module et l'argument de a.
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O (l'origine du repère) dont on déterminera le rayon.
   (d) Placer les points A, B et C dans le repère.
3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $b' = 8$
   (b) Calculer le module et l'argument de a'. Dans la suite on admet que $a' = -4+4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3}+4i$
4. On admet que si M et N sont deux points d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|m-n|$.
   (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

Exercice 27

On désigne par (E) l'équation
$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$
d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égale à 2 et dont l'argument est égale à $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Calculer a^2 sous forme algébrique.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. Démontrer que si z est une solution de (E) alors son conjugué $\bar{z}$ l'est également.
4. En déduire toutes les solutions de (E) (on admettra que (E) a au plus 4 solutions).

Exercice 28

On se place dans le plan complexe centré en O. Soient A, B et C trois points sur un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. Montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$