TD - Analyse avancé

Limites

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 14^+} \dfrac{-8}{x-14} =$
2. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{-15}{x-5} =$
3. $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{9}{x-7} =$
4. $\lim\limits_{x\to -\frac{61}{3}^+} \dfrac{-3}{x+\frac{61}{3}} =$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^2 - x - \dfrac{23}{5}}{3x^4 - 7 + 4x - x^2 + 7x^3} =$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5}{-\dfrac{35}{3} - 7x - 2x^3 - 9x^2} =$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3 + \dfrac{11}{3}x + 5x^3}{\dfrac{2}{3}x + \dfrac{62}{5}x^2 + 4 + 5x^3} =$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5 - 8x - x^2 - x^3}{-7x^2 - x^3 - x - 5} =$

Exercice 2

1. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
3. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
4. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant 2f(x) - 5 \leqslant 1 + \dfrac{1}{x^2}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
5. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$.
   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (c) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Dérivés

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^3$
2. $x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$
3. $x \mapsto \sqrt{x}$
4. $x \mapsto \sqrt{x-3}$
5. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
6. $x \mapsto (x^2-2x)^2$
7. $x \mapsto (x^2-x)^{47}$
8. $x \mapsto 3(x^4-9x^3+x)^7$
9. $x \mapsto (x-1)(2x+3)$
10. $x \mapsto 4(2x-4)(x+3)$
11. $x \mapsto x\sqrt{x}$
12. $x \mapsto xx^3$
13. $x \mapsto x^2\sqrt{x-1}$
14. $x \mapsto x^3\sqrt{3x-4}$
15. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$
17. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
18. $x \mapsto \dfrac{3}{x^2+1}$
19. $x \mapsto \dfrac{3x-4}{x^2+1}$
20. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{7x-8}}{3x}$

Étude de variation

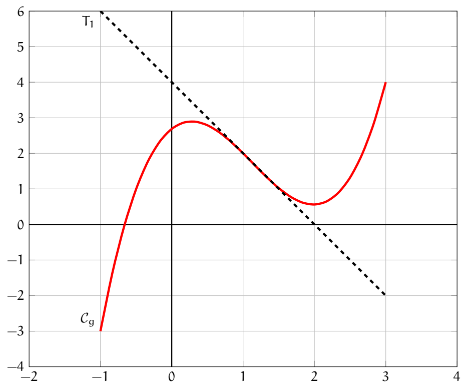
Exercice 4

Le but de l'Exercice est de d'étudier la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$

1. Domaine de définition
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
   (b) Prouver que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.
   (c) En déduire le domaine de définition de la fonction f.
2. Étude de la dérivé
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2}$
   (b) En déduire les variations de f.
3. Étude aux limites
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (c) Conclure sur l'éventuelle existence d'asymptotes.
4. Donner l'équation de la tangente en 0.
5. Tracer, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5

On donne la fonction g définie sur $[-1;3]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-dessous.
La droite T_1 est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.



1. (a) Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$ par lecture graphique.
   (b) En déduire une équation de la tangente T_1.
2. Dans cette question on admet que $g(x) = \dfrac{15}{16}x^3 - \dfrac{51}{16}x^2 + \dfrac{25}{16}x + \dfrac{43}{16}$.
   (a) Déterminer l'équation de T_0 la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0.
   (b) Représenter T_0 dans le graphique ci-dessus.

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2-6x-6}{x+5}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition.
3. Déterminer la dérivé de la fonction f.
4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
5. Étude des asymptotes.
   (a) Déduire du calcul de limite l'équation d'une asymptote verticale.
   (b) Existe-t-il des asymptotes horizontales (non oblique) ?
   (c) Montrer que $f(x) = -x - 1 - \dfrac{1}{x+5}$.
   (d) En déduire l'équation d'une asymptote oblique.
6. Dessiner l'allure de la courbe sur l'intervalle $[-14; 6]$ aussi proprement que faire ce peu.

Exercice 7

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{x - 1}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition.
3. Déterminer la dérivé de la fonction f.
4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
5. Étude des asymptotes.
   (a) Déduire du calcul de limite l'équation d'une asymptote verticale.
   (b) Existe-t-il des asymptotes horizontales (non oblique) ?
   (c) Montrer que $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x-1}$.
   (d) En déduire l'équation d'une asymptote oblique.

6. Dessiner l'allure de la courbe sur l'intervalle $[-5; 5]$ aussi proprement que faire ce peu.

Logarithme

Exercice 8

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants : $A = \ln(8)$, $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$ et $C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les nombres suivants : $A = \ln(24)$, $B = \ln(144)$ et $C = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$
3. Mettre les nombres suivants sous la forme $\ln(X)$ pour un certain réel X.

$$A = 2\ln(3) + \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\ln(9) - 2\ln(3)$$

Exercice 9

Un capital de 5000€ est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. Déterminer le nombre d'année n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000€.

Exercice 10

1. On considère la fonction $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.

2. On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que la droite $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   (e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (f) En déduire les variations de f.
   (g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exponentielle

Exercice 11

Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto xe^{x-1} + 1$$

Partie A. Étude de la fonction.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivé f' de f.
4. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B. Recherche d'une tangente.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f, d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer que T_a passe par l'origine si et seulement si le nombre réel a vérifie l'équation

$$1 - a^2e^{a-1} = 0$$

3. Étudier la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$.
4. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Calculer $g(1)$. En déduire la valeur exacte de α.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f qui passe par 0.

Exercice 12

Partie A. On considère la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x - x - 1$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$

Partie B. On considère la fonction

$$h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x(x-2)+1$$

1. Déterminer les limites de h au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de la fonction h.
3. En déduire les variations de h.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;+\infty[$.
5. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C. On considère la fonction

$$f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{e^x-1}{e^x-x}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Prouver que $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. (Difficile) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1}$

Développement limités

Exercice 13

Soient $(i) : f(x) = 3-2x+7x^3+x^2\varepsilon(x)$ et $(ii) : g(x) = 4-2x+2x^2+3x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}x^3+x^3\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

1. L'expression (i) donne-t-elle $DL_3(0)$ de f ? un $DL_2(0)$? La fonction f admet-elle un $DL_2(0)$?
2. L'expression (ii) donne-t-elle $DL_3(0)$ de g ? un $DL_2(0)$? La fonction g admet-elle un $DL_2(0)$?

Exercice 14

Montrer, en donnant explicitement le reste, que $h(x) = 1-x+2x^2\ln(1+x)+\dfrac{2x^3}{5+x^2}$ admet un $DL_2(0)$.

Exercice 15

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$.

1. Montrer que f admet un $DL_0(x_0)$ si et seulement si elle est continue en x_0.
2. Montrer que f admet un $DL_1(x_0)$ si et seulement si elle est dérivable en x_0.
3. Montrer que la fonction suivante admet un $DL_2(0)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x+x^2+x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 16

Calculer les développements limités suivants.

1. le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos(x)e^x$.
2. le $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$.
3. le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \mathrm{Sh}(x)$.
4. le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} - \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$.
5. le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Sh}(x)-x}{x}$.
7. le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\sin(x)}$.
8. le $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$.
9. le $DL_6(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.
10. le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$.
11. le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\ln(1+x^2)\right)$.

Exercice 17

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin(x)}{1-\cos(x)}$

Exercice 18

Calculer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \sqrt{2\cos(x)+\sin(x^2)}$. En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{[3]}(0)$ et $f^{[4]}(0)$.

Exercice 19

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{1+x^6} \end{array}$$

Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le la dérivé n-ème en 0 : $f^{[n]}(0)$.

Exercice 20

Déterminer le $DL_2(1)$ de $\dfrac{x^x-1}{\ln(x)}$.

Exercice 21

Déterminer deux réels a et b tel que

$$\cos(x) = \frac{1+ax^2}{1+bx^2} + x^n\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et n le plus grand possible.

Exercice 22

Trouver deux réels a et b tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x} - b = 0$$

Exercice 23

Discuter suivant les valeurs de n de la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(\ln(1+x)) - \ln(1+\tan(x))}{x^n}$$

Fonction a plusieurs variables

Exercice 24

On considère la fonction $f(x, y) = y - x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer l'image de $(1, 2)$.
2. Tracer les lignes de niveau 0, 1 et 2.
3. Déterminer et tracer la fonction partielle $f_{|x=0}$
4. Essayer de proposer une représentation en perspective de f.

Exercice 25

On considère la fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy}{y^2}$.

1. Déterminer le plus grand domaine de définition de f.
2. Déterminer la fonction partielle $f_{|x=a}$ puis en déduire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.
3. Déterminer la fonction partielle $f_{|y=b}$ puis en déduire $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.
4. Déterminer les points critique de f.
5. Calculer les dérivées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.
6. Vérifier le lemme de Schwartz.
7. Déterminer la nature des points critiques.

Exercice 26

Étudiez les fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - 6y^2 + xy + x - 1$
3. $f(x, y) = e^{x^2 - xy}$
4. $f(x, y) = \ln(x + y)$
5. $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
7. $f(x, y) = x^3 - xy^2$
8. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
9. $f(x, y) = (1 + x)(1 + y)$
10. $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 3x - y$

Exercice 27

Vous réalisez N observations de deux caractères quantitatifs x et y. Il semble raisonnable de penser que le modèle se rapproche d'une estimation de la forme $y_i = ax_i + \dfrac{b}{x_i}$. Quelles sont les meilleures estimations de a et de b ?

Exercice 28

Même Exercice que précédemment avec les modèles suivants :

1. $y_i = ax_i^3 + b$
2. $y_i = ae^{x_i} + b$
3. $y_i = (ax_i + b)^2$
4. $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$