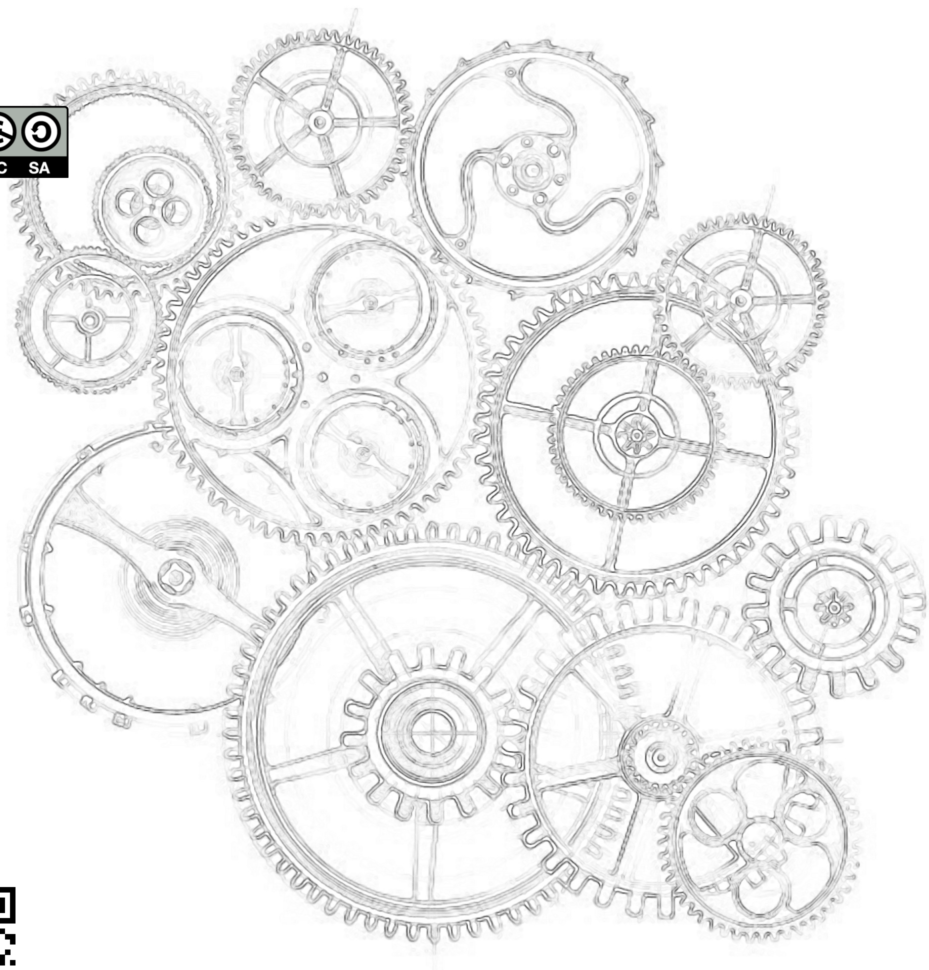
Exercices Modélisation

David Hébert

hebert.iut@gmail.com

2023



Trigonométrie - Formule et formulaire

Exercice

1. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
2. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Exercice

Exprimer les expressions trigonométriques suivantes uniquement en fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.
On parle de *délinéarisation*.

1. $\cos(2x)$
2. $\sin(2x)$
3. $\sin(4x)$
4. $\sin(3x)$
5. $\cos(5x)$
6. $1-\sin^2(2x)$
7. $1+\cos^2(2x)$
8. $\sin(x)\cos(2x)$

Exercice

Exprimer les expressions trigonométriques suivantes uniquement à l'aide du sinus.

1. $\cos(x)$
2. $\cos(x+2020\pi)$
3. $\cos(x+2021\pi)$
4. $\cos\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)$
5. $\cos^2\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $\cos(x)+\sin(x)$
7. $\cos(2x)+\sin(2x)$
8. $\cos(2x)-\sin(2x)$
9. $\cos(2x)\sin(3x)$

Exercice

Exprimer les expressions trigonométriques suivantes uniquement à l'aide du cosinus.

1. $\sin(x)$
2. $\sin(x+2020\pi)$
3. $\sin(x+2021\pi)$
4. $\sin\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)$
5. $\sin^2\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $\cos(x)+\sin(x)$
7. $\cos(2x)+\sin(2x)$
8. $\cos(2x)-\sin(2x)$
9. $\cos(2x)\sin(3x)$

Exercice

1. Pour tout réel x simplifier $A(x) = \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)$
2. Pour tout réel x simplifier $B(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+2x\right)$

Trigonométrie - Équation *à la main*

Exercice

1. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ \sin(x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$
2. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ \cos(x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(x) = -1$
2. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(3x) = \dfrac{1}{2}$
4. $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin\left(-3x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5\pi}{6}\right) = 0$

Exercice

Reprendre les équations précédentes et donner leur solution dans

1. $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$
2. $[2020\pi; 2021\pi[$

Trigonométrie - Équation *à la calculatrice*

Exercice

A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur approchée d'une solution, si c'est possible, de chacune des équations suivantes.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\sin\left(\dfrac{1}{10}x\right) = 0.1$
3. $\cos\left(2^{10}x - 4096\right) = 0.2$
4. $\sin(-x + \pi) = 0.3$
5. $\cos\left(\dfrac{x}{10} - 1\right) = 0.4$
6. $\sin(\cos(x) + 1) = 0.5$
7. $\sin\left(\cos\left(5x - \dfrac{1}{3}\right)\right) = 0.6$
8. $\sin\left(x^2 - x\right) = 0.7$
9. $\cos\left(\cos(x)^2\right) = 0.8$
10. $\sin^2(1 - \sin(x)) = 0.9$

Fonction réciproque - Cadre général

Exercice

1. La fonction $f(x) = 3x + 4$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction réciproque.
2. Discuter, suivant les valeurs de a et de b de la fonction réciproque de $f(x) = ax + b$.

Exercice

En prenant soin de préciser les domaines, donner les fonctions réciproque des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 - x - 6$
2. $g(x) = -x^2 + 4x - 3$
3. $h(x) = x^2 + x + 1$
4. $k(x) = \sqrt{x-1}$
5. $p(x) = -\sqrt{2x+4}$
6. $q(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$

Exercice

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante de $]0;+\infty[$ sur lui-même.

1. Déterminer la fonction réciproque de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Quelle est la fonction réciproque de f sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. En raisonnant de la même manière et en précisant les intervalles déterminer les fonctions réciproques de $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

Exercice

1. Sans vous poser des questions de domaine, déterminer la fonction réciproque de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
2. De manière général, sans se poser des questions de domaine, déterminer la fonction réciproque de $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
3. En vous posant des questions de domaine, donner une condition nécessaire et suffisante pour que g admette une fonction réciproque sur des domaines à préciser.

Fonction réciproque - Trigonométrie

Exercice

Déterminer la valeur exacte des opérations suivantes.

1. $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)$
3. $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $\operatorname{Arcsin}(0)$
5. $\operatorname{Arctan}(0)$
6. $\operatorname{Arctan}(1)$
7. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$
8. $\operatorname{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Exercice

1. Pour quelle valeur de x, l'expression $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$ est-elle définie.
2. En vous servant du théorème de Pythagore, proposez une simplification de $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$.
3. De la même manière, en prenant soin de préciser les valeurs de x, déterminer une simplification de $\cos(\operatorname{Arcsin}(x))$.

Exercice

1. Dans un triangle rectangle les deux plus petit coté mesurent 13 et 22 centimètres. Déterminer la mesure des trois angles de ce triangle rectangle.
2. Même question avec des mesures de 1 et 0.01 centimètres.

Exercice

1. Soit $x \in [-\pi; 0]$ déterminer en fonction de x la valeur de $\mathrm{Arccos}(\cos(x))$.
2. Même question si $x \in [2020\pi; 2021\pi[$.
3. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, simplifier l'expression $\sin(\mathrm{Arcsin}(\sin(x)))$

Logarithme et exponentielle

Exercice

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x-1} + 1 \end{array}$$

Partie A. Étude de la fonction.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivé f' de f.
4. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B. Recherche d'une tangente.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f, d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer que T_a passe par l'origine si et seulement si le nombre réel a vérifie l'équation

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0$$

3. Étudier la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2 e^{x-1}$.
4. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Calculer $g(1)$. En déduire la valeur exacte de α.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f qui passe par 0.

Exercice

Dans le plan, on considère les points $B(100; 100)$ et $C\left(50; \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ ainsi que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{ax+b} \end{array}$$

pour certain réel a et b. On note Γ la courbe représentative de f. On suppose que B et C sont des points de Γ.

1. Montrer que les réels a et b sont solutions du système suivant

$$(S) : \begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Résoudre le système S. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{0.01x-1}$
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{100}{e} \times 0.01xe^{0.01x}$. En déduire la limite de f en $-\infty$; on pourra poser $X = 0.01x$.
5. Étudier les variations de f. On dressera le tableau de variations complet.

Exercice

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x-1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé f' de f.
3. En déduire les variations de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;+\infty[$. On admettra que $\alpha \simeq 0.567$.
5. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\ln(\alpha) = -\alpha$
6. Déterminer le signe de f.

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g:]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x-\ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
2. En déduire les variations de g.
3. Montrer que $g(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} > 0$.
4. En déduire le signe de g.

Partie C. On note Λ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle. Soit $x \in]0;+\infty[$. On note M le point de Γ d'abscisse x et N le point de Λ d'abscisse x.

1. Sur un schéma représenter Γ et Λ ainsi que les points M et N pour $x = 2$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $MN = g(x)$.
3. Justifier que la distance MN est minimal lorsque $x = \alpha$.
4. Montrer que la tangente à Γ en α et la tangente à Λ en α sont parallèles.

Exercice

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x-x-1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} h:[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-2)+1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de h au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de la fonction h.
3. En déduire les variations de h.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;+\infty[$.
5. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C. On considère la fonction

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Prouver que $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. (Difficile) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

Nombre complexe - Forme cartésienne

Exercice

Mettre les nombres suivants sous la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. $(5 - i)(7 + 2i)$
2. $(i - 1)(3 + 7i)$
3. $(1 + i)^2$
4. $(1 + i)^4$
5. $\dfrac{1}{1 - i}$
6. $\dfrac{i}{1 + 2i}$
7. $\dfrac{3 + 6i}{4 - 2i}$
8. $\dfrac{7 - 8i}{9 + 4i} + \dfrac{7 + 8i}{9 - 4i}$

Exercice

Déterminer le nombre conjugué des nombres complexes suivants.

1. $3 - 4i$
2. $\sqrt{7}i - \sqrt{2}$
3. $(1 + i)^2$
4. $\dfrac{1}{1 - i}$
5. $\dfrac{i}{1 + i}$
6. $\dfrac{3 + 6i}{4 - 2i}$
7. $\dfrac{7 - 8i}{9 + 4i} + \dfrac{7 + 8i}{9 - 4i}$

Exercice

Soient $z_1 = 7 + 15i$ et $z_2 = -9 + i$. Déterminer la partie imaginaire de z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1} \times z_2$ et $\dfrac{z_2}{\overline{z_1}}$.

Exercice

Déterminer les racines des polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 - x + 1$
3. $2x^2 + 4x + 2$
4. $-x^2 + 2x - 3$
5. $x^2 + 1$
6. $x^2 + 3x + 1$

Exercice

Déterminer les racines carrés des nombres complexes suivants.

1. 1
2. i
3. $3 + 4i$
4. $8 - 6i$
5. $7 + 24i$
6. -1

Exercice

Déterminer les racines des polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2-(1+2i)z+i-1$
2. $z^2-\sqrt{3}z-i$
3. $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)$
4. $z^2-(3+4i)z-1+5i$
5. z^4+10z^2+169
6. z^4+2z^2+4

Nombre complexe - Forme polaire

Exercice

Mettre les nombre suivants sous forme cartésienne.

1. e^i
2. e^{1+i}
3. $e^{i\vartheta}+e^{2i\vartheta}$ où $\vartheta\in\mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Exercice

Mettre les nombre suivants sous forme polaire.

1. $i-\sqrt{3}$
2. $\sqrt{2}(1-i)$
3. $7+7i$
4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\sqrt{3}$

Exercice

Déterminer le module et l'argument des nombres suivants.

1. 1
2. -1
3. i
4. $-i$
5. $1+i$
6. $1-i$
7. $\sqrt{12}-2i$
8. e^i
9. e^{1+i}
10. $ie^{i\frac{\pi}{4}}$
11. $1+2e^{i\frac{\pi}{2}}$
12. $i+e^{\frac{\pi}{4}}$

Exercice

Calculer le module et l'argument des nombres $u=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{u}{v}$.

Exercice

Soient $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. En déduire la forme exponentielle et cartésienne de z_1z_2.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice

Soient $\vartheta\in\mathbb{R}$ et $z=e^{i\vartheta}$. Déterminer le module et l'argument de $1+z$ et $1+z+z^2$.

Exercice

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $\dfrac{1}{1+e^{i\alpha}}$ où $\alpha \in [0;\pi[$.

Exercice

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}}$ où $\alpha \in]0;\pi]$.

Exercice

1. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. Calculer les racines carrés de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
4. En raisonnant de la même manière, trouver les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice

Linéariser les expressions suivantes ($\vartheta \in \mathbb{R}$).

1. $\cos^2(\vartheta)$
2. $\sin^2(\vartheta)$
3. $\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)$
4. $\cos(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$
5. $\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)$
6. $\cos^2(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$
7. $\cos(\vartheta)\sin^4(\vartheta)$
8. $\sin^5(\vartheta)$
9. $\cos^6(\vartheta)$

Exercice

Délinéariser les expressions suivantes ($\vartheta \in \mathbb{R}$).

1. $\cos(2\vartheta)$
2. $\sin(3\vartheta)$
3. $\cos(4\vartheta)$
4. $\sin(5\vartheta)$

Nombre complexe - Géométrie

Exercice

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que

1. $|z| = 1$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$
4. $|2z-1| = 3$
5. $|z-1| = |z+1|$
6. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$
7. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$

Exercice

Dans le plan complexe on note A et B les points d'affixe respectives $-3+2i$ et $5-3i$. On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z+3-2i}{z-5+3i}$$

1. Interpréter géométriquement le module de z' puis l'argument de z'.
2. Déterminer la partie réel et la partie imaginaire de z' en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

3. Déterminer puis construire le ensembles suivants.
   (a) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
   (b) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel.
   (c) L'ensemble E_3 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.
   (d) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 2$.
   (e) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel strictement négatif.

Exercice

On se place dans le plan complexe de centre O. On fera un dessin que l'on complètera au fur et à mesure. On considère les points A, B et C d'affixe respectives $a = -1 + 2i$, $b = -2 - i$ et $c = -3 + i$.

1. Placer les points A, B et C.
2. Calculer $\frac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par
$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$
   (a) Calculer l'affixe c' du point C' image de C par f et placer le point C' sur la figure.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tel que $z \neq b$ et $|z'| = 1$.
   (c) justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.
4. On appel J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On appel K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note L le milieu de $[JK]$. Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC

Exercice

Dans le plan complexe, on note r la rotation de centre O et de rayon $\frac{\pi}{6}$. On considère le point A d'affixe $z_A = -\sqrt{3}+i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ (conjugué de z_A). On considère également B l'image de A_1 par r et on note z_B son affixe.

1. Ecrire le nombre z_A sous forme exponentielle et placer A et A_1 dans le repère ; on prendre $2cm$ pour unité graphique.
2. Vérifier que $z_B = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
3. En déduire l'écriture cartésienne de z_B et placer B dans le repère.
4. Démontrer que le triangle OAB est isocèle en O.
5. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisse et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A$.

Exercice

On se place dans le plan complexe. On appel f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que
$$z' = \frac{1}{z + 1}$$
Le but de l'exercice est de déterminer l'image de la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$ par f.

1. Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives $z_A = -\frac{1}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2} + i$ et $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
   (a) Placer les points A, B et C dans un repère. On prendra $2cm$ pour unité graphique.
   (b) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer ces points dans le repère.
   (c) Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la transformation du plan qui à tout point du plan d'affixe z associe le point d'affixe $z + 1$.
   (a) Qu'est-ce que g ?

(b) Sans donner d'explication placer les points $A_1 = g(A)$, $B_1 = g(B)$ et $C_1 = g(C)$.

(c) De même tracer D_1 l'image de D par g.

(d) Démontrer que D_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$

3. Soit h l'application qui a tout point du plan d'affixe $z \neq 0$ associe le point z' d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

   (a) Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

   (b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|$$

   (c) En déduire que l'image de D_1 par h est incluse dans un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. On tracera ce cercle sur la figure.

Exercice

Dans le plan complexe centré en O, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit f la transformation qui à tout point du plan d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ de $C' = f(C)$. On placera C et C' dans un repère cartésien.
   (b) Montrer que C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Δ l'ensemble des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Représenter Δ.
4. Montrer que pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.
5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
6. Que peut-on en déduire sur les points A, M et M' ?
7. Soient $\vartheta \in]0; 2\pi[$ et $z = e^{i\vartheta}$ un point de $\mathcal{C}$ distinct de A. Déterminer $A' = f(A)$ en fonction de ϑ.
8. Donner un programme de construction (uniquement avec une règle) de M' quelque soit le point M du plan.

Exercice

On se place dans le plan complexe et on considère les points A et B d'affixe respective $z_A = 1$ et $z_B = i$. A tout point M du plan d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = -iz$.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme cartésienne de z.
   (b) En déduire la forma cartésienne de z'.
   (c) Placer les points A, B, M et M' dans un repère ; on prendra 2 centimètres pour unité graphique.
2. On reviens au cas général.
   (a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[AM]$ en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) Ecrire les coordonnées des points I, B, M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que $BM' = 2OI$.

Exercice

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point M est dit *invariant* lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatérale (le point O est le centre du repère).
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tel que M' soit réel.
4. Dans le plan, placer A et B et tracer $\mathcal{E}$.

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   (a) Calculer le module et l'argument de a.
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O (l'origine du repère) dont on déterminera le rayon.
   (d) Placer les points A, B et C dans le repère.
3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $b' = 8$
   (b) Calculer le module et l'argument de a'. Dans la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$
4. On admet que si M et N sont deux points d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|m-n|$.
   (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

Exercice

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égale à 2 et dont l'argument est égale à $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Calculer a^2 sous forme algébrique.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. Démontrer que si z est une solution de (E) alors son conjugué $\overline{z}$ l'est également.
4. En déduire toutes les solutions de (E) (on admettra que (E) a au plus 4 solutions).

Exercice

On se place dans le plan complexe centré en O. Soient A, B et C trois points sur un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. Montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$

Intégrales et primitives

Exercice

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x$
2. $x \mapsto 1$
3. $x \mapsto 2x$
4. $x \mapsto 3x$
5. $x \mapsto x - 1$
6. $x \mapsto e^x$
7. $x \mapsto e^x + 1$
8. $x \mapsto \frac{1}{x}$
9. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
10. $x \mapsto \sin(x) + 1$
11. $x \mapsto \frac{2}{x+1}$
12. $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$
13. $x \mapsto \tan(x)$
14. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
15. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
16. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}$
17. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$
18. $x \mapsto 2xe^{x^2}$
19. $x \mapsto \cos^2(x)$
20. $x \mapsto \sin^2(x)$
21. $x \mapsto xe^{x^2}$
22. $x \mapsto \sin(x)e^{\cos(x)}$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^{1} x^5 \, dx$
2. $\int_{0}^{3} x^2 + 1 \, dx$
3. $\int_{-2}^{-1} (x+1)^2 \, dx$
4. $\int_{5}^{3} 2x + 1 \, dx$
5. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} \, dx$
6. $\int_{-1}^{1} 2xe^{x^2+1} \, dx$
7. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \, dx$
8. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx$
9. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1} \, dx$
10. $\int_{-3}^{3} e^{3x+1} \, dx$
11. $\int_{0}^{1} xe^{x^2+x} + \frac{1}{2}e^{x^2+x} \, dx$
12. $\int_{-\ln(2)}^{\ln(3)} (1 - 2e^{-t}) \, dx$
13. $\int_{1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$
14. $\int_{0}^{1} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$
15. $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} \, dx$
16. $\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} \, dx$
17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie.

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\ dx$
2. $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\ dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x)\ dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x^2)e^{-x}\ dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos(3x)\ dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin(x)\ dx$

Exercice

On pose $I = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\ dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\ dx$.

1. En intégrant par partie I déterminer la valeur de $I + J$.
2. En intégrant par partie J déterminer la valeur de $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et de J.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(I_n)_n$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$
3. En déduire les valeurs de I_{2k} et I_{2k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice

On considère $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\ dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\ dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Exercice

On considère $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\ dx$.

1. Rappeler la dérivé de la fonction tangente et en déduire la valeur de I.
2. On considère la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$.
   (a) Calculer la dérivé f' de f.
   (b) En déduire une relation entre I et J puis donner la valeur de J.

Série de Fourier

Exercice

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire tel que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \in]0; \pi[$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier
2. En déduire la valeurs des séries suivantes.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Exercice

Soit f la fonction 2π-périodique tel que $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi; \pi[$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Exercice

Soit f la fonction 2π-périodique tel que $f(x) = (x-\pi)^2$ pour $x \in [0; 2\pi[$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice

Soit f la fonction 2π-périodique paire tel que $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ pour $x \in [0; \pi]$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice

Soit f la fonction 2π-périodique impaire tel que $f(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0; \pi]$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$