Nombre complexe - Géométrie

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que

1. $|z| = 1$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$
4. $|2z-1| = 3$
5. $|z-1| = |z+1|$
6. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$
7. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$

Exercice 2

Dans le plan complexe on note A et B les points d'affixe respectives $-3+2i$ et $5-3i$. On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z+3-2i}{z-5+3i}$$

1. Interpréter géométriquement le module de z' puis l'argument de z'.
2. Déterminer la partie réel et la partie imaginaire de z' en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
3. Déterminer puis construire le ensembles suivants.
   (a) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
   (b) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel.
   (c) L'ensemble E_3 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.
   (d) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 2$.
   (e) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel strictement négatif.

Exercice 3

On se place dans le plan complexe de centre O. On fera un dessin que l'on complètera au fur et à mesure. On considère les points A, B et C d'affixe respectives $a = -1+2i$, $b = -2-i$ et $c = -3+i$.

1. Placer les points A, B et C.
2. Calculer $\dfrac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z+1-2i}{z+2+i}$$

   (a) Calculer l'affixe c' du point C' image de C par f et placer le point C' sur la figure.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tel que $z \neq b$ et $|z'| = 1$.
   (c) justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.
4. On appel J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On appel K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On note L le milieu de $[JK]$. Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC

Exercice 4

Dans le plan complexe, on note r la rotation de centre O et de rayon $\dfrac{\pi}{6}$. On considère le point A d'affixe $z_A = -\sqrt{3}+i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ (conjugué de z_A). On considère également B l'image de A_1 par r et on note z_B son affixe.

1. Ecrire le nombre z_A sous forme exponentielle et placer A et A_1 dans le repère ; on prendre $2\mathrm{cm}$ pour unité

graphique.

2. Vérifier que $z_B = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
3. En déduire l'écriture cartésienne de z_B et placer B dans le repère.
4. Démontrer que le triangle OAB est isocèle en O.
5. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisse et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A$.

Exercice 5

On se place dans le plan complexe. On appel f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1}{z+1}$$

Le but de l'exercice est de déterminer l'image de la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$ par f.

1. Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives $z_A = -\frac{1}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2} + i$ et $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
   (a) Placer les points A, B et C dans un repère. On prendra 2cm pour unité graphique.
   (b) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer ces points dans le repère.
   (c) Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la transformation du plan qui à tout point du plan d'affixe z associe le point d'affixe $z + 1$.
   (a) Qu'est-ce que g ?
   (b) Sans donner d'explication placer les points $A_1 = g(A)$, $B_1 = g(B)$ et $C_1 = g(C)$.
   (c) De même tracer D_1 l'image de D par g.
   (d) Démontrer que D_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$
3. Soit h l'application qui a tout point du plan d'affixe $z \neq 0$ associe le point z' d'affixe $\frac{1}{z}$.
   (a) Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.
   (b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|$$

   (c) En déduire que l'image de D_1 par h est incluse dans un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. On tracera ce cercle sur la figure.

Exercice 6

Dans le plan complexe centré en O, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit f la transformation qui à tout point du plan d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ de $C' = f(C)$. On placera C et C' dans un repère cartésien.
   (b) Montrer que C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Δ l'ensemble des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Représenter Δ.
4. Montrer que pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.
5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
6. Que peut-on en déduire sur les points A, M et M' ?

7. Soient $\vartheta \in]0;2\pi[$ et $z = e^{i\vartheta}$ un point de $\mathcal{C}$ distinct de A. Déterminer $A' = f(A)$ en fonction de ϑ.
8. Donner un programme de construction (uniquement avec une règle) de M' quelque soit le point M du plan.

Exercice 7

On se place dans le plan complexe et on considère les points A et B d'affixe respective $z_A = 1$ et $z_B = i$. A tout point M du plan d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = -iz$.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme cartésienne de z.
   (b) En déduire la forma cartésienne de z'.
   (c) Placer les points A, B, M et M' dans un repère ; on prendra 2 centimètres pour unité graphique.
2. On reviens au cas général.
   (a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AM] en fonction de $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) Ecrire les coordonnées des points I, B, M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que $BM' = 2OI$.

Exercice 8

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point M est dit *invariant* lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatérale (le point O est le centre du repère).
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tel que M' soit réel.
4. Dans le plan, placer A et B et tracer $\mathcal{E}$.

Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   (a) Calculer le module et l'argument de a.
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O (l'origine du repère) dont on déterminera le rayon.
   (d) Placer les points A, B et C dans le repère.
3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $b' = 8$
   (b) Calculer le module et l'argument de a'. Dans la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$
4. On admet que si M et N sont deux points d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|m - n|$.

(a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

Exercice 10

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égale à 2 et dont l'argument est égale à $\frac{\pi}{3}$.
   (a) Calculer a^2 sous forme algébrique.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. Démontrer que si z est une solution de (E) alors son conjugué $\overline{z}$ l'est également.
4. En déduire toutes les solutions de (E) (on admettra que (E) a au plus 4 solutions).

Exercice 11

On se place dans le plan complexe centré en O. Soient A, B et C trois points sur un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. Montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$