

Intégrale et primitive

Exercice

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x$

2. $x \mapsto 1$

3. $x \mapsto 2x$

4. $x \mapsto 3x$

5. $x \mapsto x - 1$

6. $x \mapsto e^x$

7. $x \mapsto e^x + 1$

8. $x \mapsto \frac{1}{x}$

9. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

10. $x \mapsto \sin(x) + 1$

11. $x \mapsto \frac{2}{x+1}$

12. $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$

13. $x \mapsto \tan(x)$

14. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

15. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$

16. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}$

17. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

18. $x \mapsto 2xe^{x^2}$

19. $x \mapsto \cos^2(x)$

20. $x \mapsto \sin^2(x)$

21. $x \mapsto xe^{x^2}$

22. $x \mapsto \sin(x)e^{\cos(x)}$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^1 x^5 dx$

2. $\int_0^3 x^2 + 1 dx$

3. $\int_{-2}^{-1} (x+1)^2 dx$

4. $\int_5^3 2x + 1 dx$

5. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

6. $\int_{-1}^1 2xe^{x^2+1} dx$

7. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx$

8. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$

9. $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$

10. $\int_{-3}^3 e^{3x+1} dx$

11. $\int_0^1 xe^{x^2+x} + \frac{1}{2}e^{x^2+x} dx$

12. $\int_{-\ln(2)}^{\ln(3)} (1 - 2e^{-t}) dx$

13. $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

14. $\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt$

15. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

16. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie.

1. $\int_0^1 x e^{-x} dx$

5. $\int_0^1 (1 - 2x^2)e^{-x} dx$

2. $\int_1^e x \ln(x) dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos(3x) dx$

3. $\int_1^2 \ln(x) dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(2x) dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin(x) dx$

Exercice

On pose $I = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx$ et $J = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx$.

1. En intégrant par partie I déterminer la valeur de $I + J$.
2. En intégrant par partie J déterminer la valeur de $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et de J.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(I_n)_n$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2}$
3. En déduire les valeurs de I_{2k} et I_{2k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice

On considère $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Exercice

On considère $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)} dx$.

1. Rappeler la dérivé de la fonction tangente et en déduire la valeur de I.
2. On considère la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$.
 - (a) Calculer la dérivé f' de f .
 - (b) En déduire une relation entre I et J puis donner la valeur de J.