Logarithme et exponentielle

Exercice

Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto xe^{x-1} + 1$$

Partie A. Étude de la fonction.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivé f' de f.
4. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B. Recherche d'une tangente.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f, d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer que T_a passe par l'origine si et seulement si le nombre réel a vérifie l'équation
$$1 - a^2e^{a-1} = 0$$
3. Étudier la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$.
4. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Calculer $g(1)$. En déduire la valeur exacte de α.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f qui passe par 0.

Exercice

Dans le plan, on considère les points $B(100; 100)$ et $C\left(50; \dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ ainsi que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto xe^{ax+b}$$

pour certain réel a et b. On note Γ la courbe représentative de f. On suppose que B et C sont des points de Γ.

1. Montrer que les réels a et b sont solutions du système suivant
$$(S) : \begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$
2. Résoudre le système S. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{0.01x-1}$
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0.01xe^{0.01x}$. En déduire la limite de f en $-\infty$; on pourra poser $X = 0.01x$.
5. Étudier les variations de f. On dressera le tableau de variations complet.

Exercice

Partie A. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto xe^{x} - 1$$

1. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé f' de f.
3. En déduire les variations de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; +\infty[$. On admettra que $\alpha \simeq 0.567$.
5. Montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\ln(\alpha) = -\alpha$
6. Déterminer le signe de f.

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g :]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x}$
2. En déduire les variations de g.
3. Montrer que $g(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$.
4. En déduire le signe de g.

Partie C. On note Λ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle. Soit $x \in]0;+\infty[$. On note M le point de Γ d'abscisse x et N le point de Λ d'abscisse x.

1. Sur un schéma représenter Γ et Λ ainsi que les points M et N pour $x = 2$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $MN = g(x)$.
3. Justifier que la distance MN est minimal lorsque $x = \alpha$.
4. Montrer que la tangente à Γ en α et la tangente à Λ en α sont parallèles.

Exercice

Partie A. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x - 1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$

Partie B. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-2)+1 \end{array}$$

1. Déterminer les limites de h au bord de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivé de la fonction h.
3. En déduire les variations de h.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;+\infty[$.
5. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Prouver que $f'(x) = -\frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. (Difficile) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$